פתרון הבחינה
במתמטיקה

מועד מיוחד תשפ"א, 2021, שאלון: 35481

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע" :
יואל גבע, ארד טלמון, ריקי טל, אביחי כהן, קובי שרוני, אודי נעים, יאיר גולני, רועי גבע

1. ביום ראשון יצאו שתי רכבות מאותו מקום, בשעה 14:00, ונסעו באותו המסלול.

רכבת **א** נסעה ללא עצירות במהירות קבועה של 80 קמ"ש.

רכבת **ב** נסעה במהירות קבועה של 120 קמ"ש ועצרה בדרכה בתחנה אחת למשך 12 דקות.

זמן־מה לאחר שיצאה רכבת **ב** מן התחנה שעצרה בה בדרכה, היא חלפה על פני רכבת **א**.

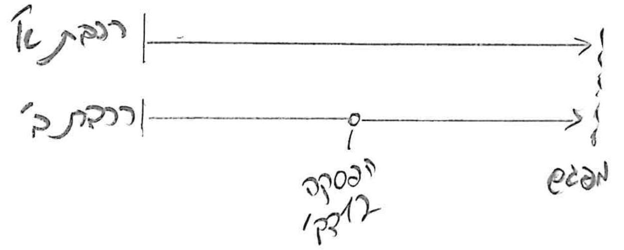
א. באיזו שעה חלפה רכבת **ב** על פני רכבת **א**?

גם ביום שני יצאו שתי הרכבות מאותו המקום ובאותה השעה. ביום זה, רכבת **א** הגבירה את מהירותה ב־ x קמ"ש לעומת יום ראשון ונסעה ללא עצירות, ואילו רכבת **ב** הפחיתה את מהירותה ב־ 2x קמ"ש לעומת יום ראשון.

ביום שני, רכבת **ב** עצרה בדרכה בתחנה אחת למשך 6 דקות, וזמן־מה לאחר שהמשיכה בדרכה חלפה על פני רכבת **א**, במרחק של 90 ק"מ ממקום היציאה של שתי הרכבות.

ב. מצא את x.

יום א



t = זמן הנסיעה של רכבת א' עד המפגש

12 דק' $= \frac{12}{60} = 0.2$ שעות

	t שעות	V קמ"ש	S דרך ק"מ
רכבת א'	t	80	$80 \cdot t$
רכבת ב'	$t-0.2$	120	$120(t-0.2)$
רכבת ב'	$\frac{12}{60}=0.2$	0	0

$$80t = 120(t-0.2)$$
$$80t = 120t - 24$$
$$24 = 40t$$
$$t = 0.6 \text{ שעות} = 36 \text{ דקות}$$

$\{$ הרכבות נפגשו בשעה 14:36 $\}$

יום ב׳

s	v	t	
90	$80+x$	$\frac{90}{80+x}$	רכבת א׳
90	$120-2x$	$\frac{90}{120-2x}$	רכבת ב׳

$$\frac{90}{80+x} = \frac{90}{120-2x} + \frac{6}{60} \qquad \backslash (80+x)(120-2x)$$

$$90(120-2x) = 90(80+x) + 0.1(80+x)(120-2x)$$

$-7200 - 90x$

$$10{,}800 - 180x = 7{,}200 + 90x + 0.1(9{,}600 - 160x + 120x - 2x^2)$$

$$3{,}600 - 270x = 960 - 4x - 0.2x^2$$

$$0.2x^2 - 266x + 2{,}640 = 0$$

$x = 1{,}320$
פסול כי
$V_{\text{רכבת ב׳}} = 120 - 2x > 0$

$\boxed{x = 10}$ $\Rightarrow$

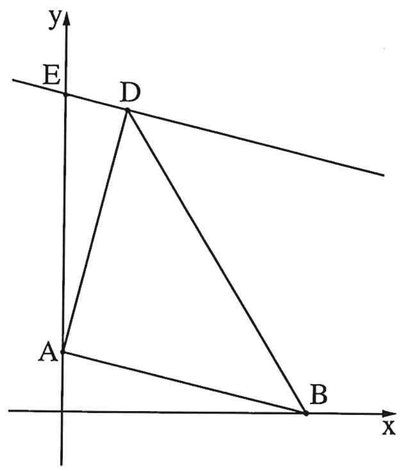
$$\boxed{x = 10 \text{ קמ"ש}}$$

2. בסרטוט שלפניך מתואר משולש ABD .

נתון: הקודקוד A נמצא על ציר ה־ y

והקודקוד B נמצא על ציר ה־ x .

משוואת הצלע AB היא $y=-\frac{1}{4}x+2$.



א. מצא את אורך הצלע AB .

נתון: $AB = AD$.

הקודקוד D נמצא ברביע הראשון, ושיעור ה־ x שלו הוא 2 .

ב. **(1)** מצא את שיעור ה־ y של הקודקוד D .

(2) הוכח כי AD מאונך ל־ AB .

דרך נקודה D העבירו ישר המקביל לצלע AB .

הישר חותך את ציר ה־ y בנקודה E .

ג. מצא את משוואת המעגל החוסם את המשולש AED .

הנקודה F נמצאת על המעגל שאת משוואתו מצאת בסעיף ג.

נתון כי DF הוא קוטר במעגל.

ד. מצא את שיעורי הנקודה F .

א. משוואת AB : $y=-\frac{1}{4}x+2$.

$AB=\sqrt{(8-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{64+4}=\sqrt{68}$

$\boxed{AB=\sqrt{68}=2\sqrt{17}\approx 8.246}$ יחידות

A = חיתוך עם ציר y $\quad x_A=0$

$y_A=-\frac{1}{4}\cdot 0+2=2 \qquad A(0,2)$

B = חיתוך ציר x : $\quad y_B=0$

$0=-\frac{1}{4}x+2$

$\frac{1}{4}x=2$

$x_B=8 \qquad B(8,0)$

$A(0,2)$

$D(2,y)$

ב (1) נתון $AD=AB$ $\Leftarrow$ $AD=\sqrt{68}$ ונתון $x_D=2$

$$AD=\sqrt{68}=\sqrt{(2-0)^2+(y-2)^2} \quad /()^2$$

$$68=4+y^2-4y+4$$

$$0=y^2-4y-60$$

$y=10$

$y=-6$ פסול כי D ברביע הראשון

$\Rightarrow$ $\boxed{y_D=10}$

$D(2,10)$

(2)

$$m_{AD}=\frac{10-2}{2-0}=\frac{8}{2}=4$$

$m_{AD}=4$

$m_{AB}=-\frac{1}{4}$

$m_{AB}\cdot m_{AD}=-1$ $\Leftarrow$ $m_{AD}\cdot m_{AB}=4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-1$

לכן AB ו- AD מאונכים.

(שיפוע הפכי ונגדי)

ג. נתון $DE \parallel AB$. $\sphericalangle DAB=90^\circ$ לפי סעיף ב' (ב2)

$\sphericalangle ADE=\sphericalangle DAB=90^\circ$ זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים.

AE קוטר במעגל שחוסם את $\triangle ADE$ כי נשענת עליו זווית היקפית ישרה

M מרכז המעגל היא אמצע AE

משוואת DE: $m_{AE}=m_{AB}=-\frac{1}{4}$

$D(2,10)$

$$y-10=-\frac{1}{4}(x-2)$$

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}+10$$

$$\boxed{y_{DE}=-\frac{1}{4}x+10\frac{1}{2}}$$

$DE: \; y = -\frac{1}{4}x + 10.5$

E=חיתוך ציר y : $x_E = 0$

$y_E = 10.5$

$E(0, 10.5) \qquad A(0, 2)$

$x_M = \frac{0+0}{2} = 0 \qquad y_M = \frac{10.5+2}{2} = 6.25$

$M(0, 6.25)$

$R = AM = ME = 6.25 - 2 = 4.25$

משוואת המעגל היא

$M(0, 6.25)$

$R = 4.25$

$[x^2 + (y-6.25)^2 = 4.25^2]$

ובכתיב אחר:

$\boxed{x^2 + (y - 6\frac{1}{4})^2 = 18\frac{1}{16}}$

ד. M אמצע DF כי היא מרכז המעגל ו- DF קוטר.

$D(2, 10)$

$M(0, 6.25)$

$F(x, y)$

$0 = \frac{x+2}{2} \qquad 6.25 = \frac{y+10}{2}$

$x + 2 = 0 \qquad 12.5 = y + 10$

$x_F = -2 \qquad y_F = 2.5$

$\boxed{F(-2, 2.5)}$

3. בשקית סוכריות יש 2 סוכריות בטעם לימון, וכל שאר הסוכריות בשקית הן בטעם תות.

הוציאו באקראי מן השקית שתי סוכריות בזו אחר זו ללא החזרה.

ההסתברות ששתי הסוכריות שהוציאו מן השקית הן בטעם לימון היא $\frac{1}{153}$.

א. כמה סוכריות יש בשקית סך הכול?

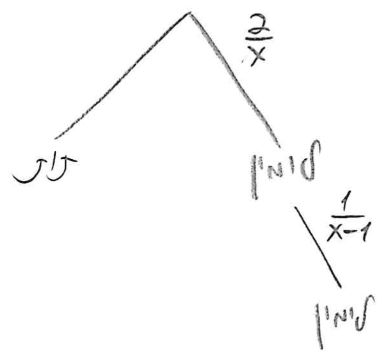
ב. מהי ההסתברות ששתי הסוכריות שהוציאו מן השקית הן בטעמים שונים?

ג. **(1)** מהי ההסתברות שהוציאו לפחות סוכרייה אחת בטעם תות?

(2) אם ידוע שהוציאו לפחות סוכרייה אחת בטעם תות, מהי ההסתברות ששתי הסוכריות שהוציאו הן בטעמים שונים?

החזירו את כל הסוכריות לשקית והוציאו מן השקית באקראי שלוש סוכריות בזו אחר זו ללא החזרה.

ד. מהי ההסתברות שכל שלוש הסוכריות שהוציאו הן באותו הטעם?



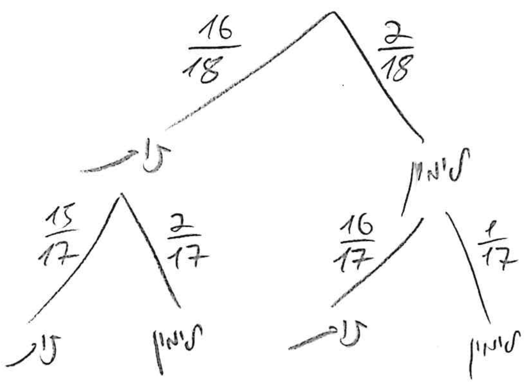
א. $x=$ מספר הסוכריות בשקית סך הכול $(x>0)$

$$\frac{1}{153}=\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x-1}$$

$$x^2-x=306 \qquad \text{נפסל } x=-17$$

$$x^2-x-306=0 \Rightarrow x=18$$

{יש 18 סוכריות בשקית בסך הכל}



ב. $P(\text{טעמים שונים})=\frac{2}{18}\cdot\frac{16}{17}+\frac{16}{18}\cdot\frac{2}{17}$

$$\left[P(\text{טעמים שונים})=\frac{32}{153}\right]$$

ב. (1)

$$P(\text{לפחות אחת ענב}) = 1 - P(\text{שתי לימון}) = 1 - \frac{1}{153} = \frac{152}{153}$$

$$\boxed{P(\text{לפחות אחת ענב}) = \frac{152}{153}}$$

(2)

$$P\left(\text{שתיהם שונים} \,/\, \text{לפחות אחת ענב}\right) = \frac{\frac{32}{153}}{\frac{152}{153}} = \frac{32}{152} = \frac{4}{19}$$

$$\boxed{P\left(\text{שתיהם שונים} \,/\, \text{לפחות אחת ענב}\right) = \frac{4}{19}}$$

ג.

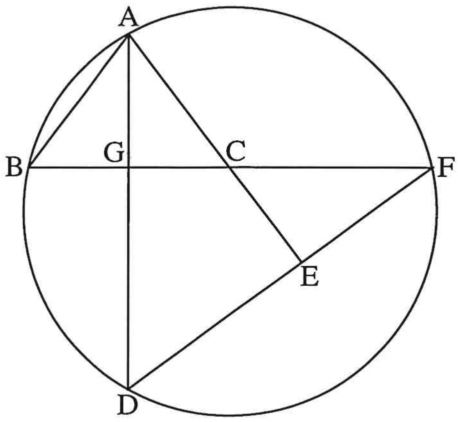
$$P(\text{אותו טעם}) = P(\text{שלוש לימון}) + P(\text{שלוש ענב})$$

$P(\text{שלוש לימון}) = 0$ כי יש רק 2 סוכריות לימון

$$P(\text{שלוש ענב}) = \frac{16}{18} \cdot \frac{15}{17} \cdot \frac{14}{16} = \frac{35}{51}$$

$$\boxed{P(\text{אותו טעם}) = \frac{35}{51}}$$

4. בציור שלפניך מתואר מעגל. הנקודות A , B , D , F , נמצאות על המעגל.



הנקודה E נמצאת על המיתר DF .

הקטעים AE ו־ BF נחתכים בנקודה C .

הקטעים AD ו־ BF נחתכים בנקודה G .

נתון: $AB = AC$.

א. הוכח: $\sphericalangle ABG = \sphericalangle ECF$.

ב. הוכח: $\Delta AGB \sim \Delta FEC$.

נתון: AG הוא חוצה זווית $\sphericalangle BAC$.

ג. הוכח $\sphericalangle CEF = 90^\circ$.

נתון: $BG = 5$, $CE = 6$, $EF = 8$.

ד. מצא את אורך הקטע AC .

א

1) $AB=AC$ נתון

2) A,B,D,F על המעגל

3) $\sphericalangle ABG=\sphericalangle ACB$ זוויות בסיס שוות במשולש ABC (לפי 1)

4) $\sphericalangle ACB=\sphericalangle ECF$ זוויות קודקודיות שוות

5) $\sphericalangle ABG=\sphericalangle ECF$ כלל המעבר (3,4)

מ.ש.ל א.

ב

6) $\sphericalangle BAD=\sphericalangle BFD$ זוויות היקפיות שוות שנשענות על אותה קשת BD

7) $\Delta AGB\sim\Delta FEC$ לפי משפט דמיון ז.ז (5,6)

מ.ש.ל ב.

ב. 8) נתון AG חוצה זווית $\measuredangle BAC$

$\measuredangle A_1 = \measuredangle BAD$, $\measuredangle A_2 = \measuredangle DAE$ $\quad$ $\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$ סימון.

9) $\measuredangle AGB = 90^\circ$, $AG \perp BC$ $\}$ במשולש שווה שוקיים (ABC) חוצה זווית הראש הוא גם גובה לבסיס

10) $\measuredangle CEF = \measuredangle AGB$ זוויות שוות בהתאמה במשולשים הדומים (7)

11) $\measuredangle CEF = 90^\circ$ כלל המעבר (9, 10)

מ.ש.ל.ב.

ג. נתונים: $BG=5$, $CE=6$, $EF=8$

12) $CF^2 = CE^2 + FE^2$ משפט פיתגורס במשולש FCE

$CF^2 = 100$

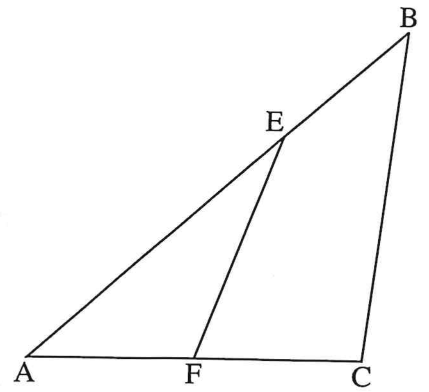
$CF = 10$

13) $\frac{AB}{FC} = \frac{BG}{CE}$ יחס צלעות מתאימות במשולשים דומים שווה ליחס הדמיון (7)

$\frac{AB}{10} = \frac{5}{6}$ הצבת הערכים $\quad AB = 8\frac{1}{3}$

14) $\boxed{AC = 8\frac{1}{3}}$ כלל המעבר (1, 13)

מ.ש.ל.ג.



5. המשולש ABC בציור שלפניך הוא שווה שוקיים.

נתון: $CA = CB = 8$, $AB = 12$.

א. מצא את גודל הזווית $\sphericalangle BAC$.

הנקודה F היא אמצע הצלע AC .

דרך הנקודה F העבירו ישר החותך את הצלע AB בנקודה E .

נתון: שטח המשולש EAF שווה ל- 10 .

ב. מצא את אורך הצלע AE .

ג. חשב את גודל הזווית $\sphericalangle ECB$.

ד. חשב את שטח המרובע EBCF .

א.

$\Delta BAC: \quad BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot \cos\sphericalangle A$

$\cancel{8^2} = \cancel{8^2} + 12^2 - 2\cdot 8\cdot 12\cdot \cos\sphericalangle A \quad | -8^2$

$0 = 12^2 - 2\cdot 8\cdot \cancel{12}\cdot \cos\sphericalangle A \quad | :12$

$16\cos\sphericalangle A = 12 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sphericalangle BAC = 41.41^\circ}$

$\cos\sphericalangle A = \frac{3}{4}$

ב.

$S_{EAF} = 10$

$AF = FC = \frac{1}{2}AC = 4$

$S_{AEF} = \frac{AE\cdot AF\cdot \sin\sphericalangle A}{2}$

$10 = \frac{AE\cdot \overset{2}{\cancel{4}}\cdot \sin\sphericalangle A}{\cancel{2}} \quad | :2$

$AE\cdot \sin\sphericalangle A = 5$

$AE = \frac{5}{\sin\sphericalangle A}$

$\boxed{AE = 7.56}$

ג.

$\triangle ACE$: $CE^2 = 7.56^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7.56 \cdot \cos\angle A$

$CE^2 = 30.4336$

$CE = 5.517$

$BE = \underbrace{AB - AE}_{\text{חיסור קטעים}} = 12 - 7.56 = 4.44$

$\angle B = \angle A = 41.41°$
זוו' בסיס במשו"ש ABC

$\triangle BCE$: $\dfrac{4.44}{\sin\angle ECB} = \dfrac{5.517}{\sin\angle B}$

$\sin\angle ECB = \dfrac{4.44 \cdot \sin\angle B}{5.517}$

$\sin\angle ECB = 0.5324$

$\boxed{\angle ECB = 32.17°}$

ד.

$S_{EBCF} = S_{EFC} + S_{BCE}$

$S_{EFC} = S_{EAC} = 10$

תיכון (EF) מחלק משולש לשני
משולשים שטחים שווים

$S_{BCE} = \dfrac{8 \cdot 4.44 \cdot \sin\angle B}{2} = 11.75$

$\boxed{S_{EBCF} = 21.75}$

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3x^2}{x^2-4x+3}+a$. a הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ (אם יש צורך, הבע באמצעות a).

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש צורך, הבע באמצעות a).

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון: האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$ נמצאת מתחת לציר ה־ x .

ה. בחר ערך מסוים של a שמתאים לנתון. נמק את בחירתך.

הצב בפונקציה $f(x)$ את a שבחרת וענה על סעיפים **ו–ז.**

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ז. מצא משוואת ישר המקביל לציר ה־ x וחותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה אחת בלבד (מצא את 3 האפשרויות).

<u>פתרון:</u>

א. תחום הגדרה: נדרוש: מכנה שונה מאפס:

$x^2-4x+3\neq0$

$(x-1)(x-3)\neq0$

$x\neq1$ וגם $x\neq3$

תחום הגדרה: $\boxed{x<1 \text{ או } 1<x<3 \text{ או } 3<x}$

ב. <u>אסימפטוטות מאונכות לציר x</u>:

מתחום ההגדרה, $x=3$ ו $x=1$ מאפסים את המכנה של הביטוי הרציונלי אך לא את המונה שלו. לכן ניתן לקבוע כי $\boxed{x=3}$ ו $\boxed{x=1}$ הן האסימפטוטות המאונכות לציר ה-x של הפונקציה f .

<u>אסימפטוטות מאונכות לציר y</u>:

המכפלה עם המעריך הגבוה ביותר של x במונה של הביטוי הרציונלי שווה למכפלה עם המעריך הגבוה ביותר של x במכנה של ביטוי זה. ביטוי זה שואף למנת המקדמים $\frac{3}{1}$ כאשר x שואף לאינסוף או למינוס אינסוף. נוסיף לערך זה את הפרמטר a. לסיכום: האסימפטוטה האנכית לציר ה-y של הפונקציה הרציונלית היא $\boxed{y=a+3}$

ג. נקודות קיצון:

$$f(x)=\frac{3x^2}{x^2-4x+3}+a$$

נגזרת:

$$f'(x)=\frac{6x(x^2-4x+3)-3x^2\cdot(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}$$

נפשט:

$$f'(x)=\frac{3x\cdot[2(x^2-4x+3)-x(2x-4)]}{(x^2-4x+3)^2}=\frac{6x\cdot(x^2-4x+3-x(x-2))}{(x^2-4x+3)^2}=$$

$$=\frac{6x\cdot[x^2-4x+3-x^2+2x]}{(x^2-4x+3)^2}=\frac{6x\cdot(3-2x)}{(x^2-4x+3)^2}$$

נשווה את הנגזרת לאפס על מנת למצוא נקודות קריטיות:

$$f'(x)=0$$

$$\frac{6x\cdot(3-2x)}{(x^2-4x+3)^2}=0 \Rightarrow 6x\cdot(3-2x)=0$$

$x=0$ או $3-2x=0 \quad /+2x$

$3=2x \quad /:2$

$1.5=x$

נציג בטבלה:

x	$x<$	0	$<x<$	1	$<x<$	1.5	$<x<$	3	$<x$
$f(x)$		a				$a-9$			
$sign(f'(x))$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
התנהגות $f(x)$ עליה/ירידה	↘	min	↗		↗	max	↘		↘

ראה חישובים עבור הטבלה בעמוד הבא...

ניתן להציב במונה הנגזרת בלבד, לבדיקת סימן הנגזרת.
מכנה הנגזרת הינו חיובי בכל תחום הגדרתה.

$$f'(x)=\frac{6x(3-2x)}{(x^2-4x+3)^2}$$

נציב בביטוי $6x(3-2x)$:

$x=-1$

$$6\cdot(-1)\cdot(3-2\cdot(-1))=-6\cdot 5=-30<0$$

$x=\frac{1}{2}$

$$6\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(3-2\cdot\frac{1}{2}\right)=6>0$$

$x=\frac{5}{4}$

$$6\cdot\frac{5}{4}\cdot\left(3-2\cdot\frac{5}{4}\right)=\frac{15}{2}\cdot\left(3-\frac{5}{2}\right)=\frac{15}{4}>0$$

$x=2$

$$6\cdot 2\cdot(3-2\cdot 2)=-12<0$$

$x=4$

$$6\cdot 4\cdot(3-2\cdot 4)=-120<0$$

נחשב את שיעור ה-y של הנקודות הקריטיות:

$$f(0)=\frac{3\cdot 0^2}{0^2-4\cdot 0+3}+a=a \Rightarrow (0,a)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\cdot\frac{3}{2}+3}+a=\frac{\frac{27}{4}}{\frac{9}{4}-3}+a=\frac{\frac{27}{4}}{-\frac{3}{4}}+a=-9+a \Rightarrow (1.5,a-9)$$

נסכם: מהטבלה - נקודות הקיצון של הפונקציה:

$\boxed{(1.5,\ a-9)\ max \quad , \quad (0,a)\ min}$

ב. תחומי העלייה של הפונקציה f - מהטבלה עבור בסעיף הקודם:

$\boxed{0<x<1 \text{ או } 1<x<1.5}$

תחומי הירידה של הפונקציה f:

$\boxed{x<0 \text{ או } 1.5<x<3 \text{ או } 3<x}$

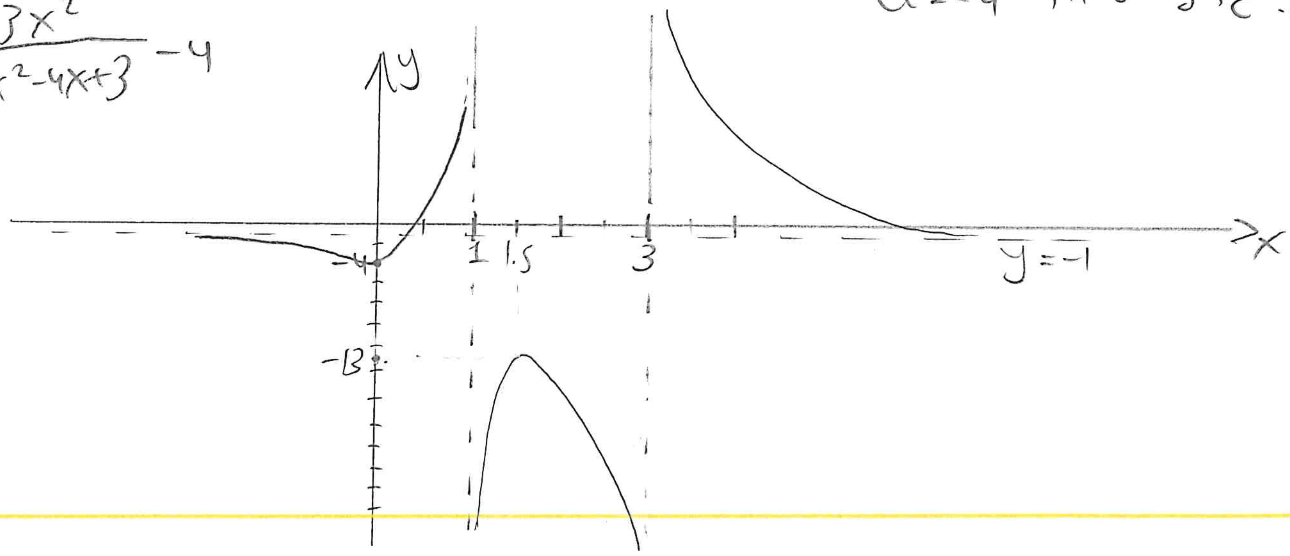
ה. נתון: האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$ נמצאת מתחת לציר ה-x.

לפי הנתון הנ"ל והביטוי שמצאנו בסעיף ב' עבור האסימפטוטה האופקית: $y=a+3$, מתקיים: $a+3<0$ כלומר:
$a<-3$

נבחר למשל $\boxed{a=-4}$ בתחום זה.

ו. גרף עבור $a=-4$

$$f(x)=\frac{3x^2}{x^2-4x+3}-4$$



ג. עבור $a=-4$

ישר המקביל לציר ה-x וחותך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

על פי גרף ששרטטנו בסעיף הקודם.

ישרים המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות הקיצון:

$\boxed{y = a-9 = -4-9 = -13}$ ו- $\boxed{y = a = -4}$

או ישר המתלכד עם האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$

$\boxed{y = a+3 = -4+3 = -1}$

7. נתונה הפונקציה $f(x) = -5 + \sqrt{x^2 - 10x + 16}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

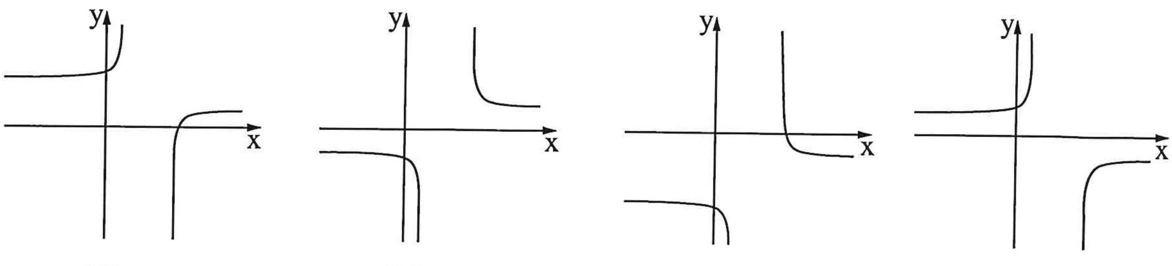
ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים. (בתשובותיך תוכל להשאיר 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. אחד מבין הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. קבע איזה מהם, ונמק את קביעתך.

ו. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי הישר $x = -4$ ועל ידי הצירים.
תוכל להשאיר שורש בתשובתך.



פתרון:

א. תחום הגדרה. נדרוש: ביטוי ממשי מתחת לשורש מסדר זוגי - אי-שלילי:

$0 \le x^2 - 10x + 16$

$0 \le (x-2)(x-8)$

$\boxed{x \le 2 \quad או \quad 8 \le x}$

ב. נגזרת:

$$f'(x) = \frac{2x-10}{2\sqrt{x^2-10x+16}} = \frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+16}}$$

נאפס את המונה: $x=5$ לא נמצא בתחום ההגדרה של הפונקציה.
לכן אין מאפס לנגזרת בתחום ההגדרה.
נבדוק $8<x$; $x<2$ בנגזרת על מנת לבדוק את סימנה:

$$f'(9) = \frac{9-5}{\sqrt{9^2-10\cdot 9+16}} = \frac{4}{\sqrt{7}} > 0$$

$$f'(1)=\frac{1-5}{\sqrt{1^2-10\cdot 1+16}}=\frac{-4}{\sqrt{7}}<0$$

מסימן הנגזרת בתחומים השונים נסיק את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה f:

תחומי עלייה: $8<x$

תחומי ירידה: $x<2$

ג. נקודות חיתוך גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים:

חיתוך עם ציר ה-x, נציב $y=0$ בביטוי האלגברי של הפונקציה:

$$0=-5+\sqrt{x^2-10x+16} \quad /+5$$

$$5=\sqrt{x^2-10x+16} \quad /(\ )^2$$

$$25=x^2-10x+16 \quad /-25$$

$$x^2-10x-9=0$$

$$x_{1/2}=\frac{10\pm\sqrt{100+36}}{2}=5\pm\sqrt{34}$$

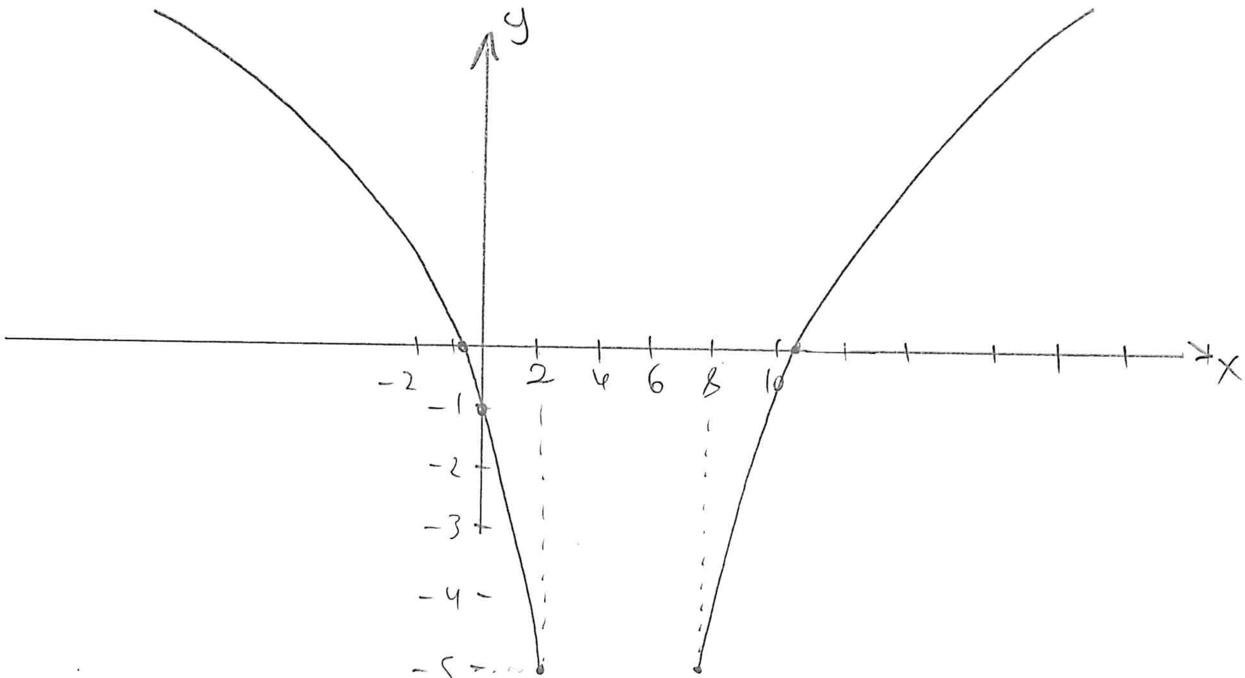
$(5-\sqrt{34},0)\approx(-0.83,0)$

$(5+\sqrt{34},0)\approx(10.83,0)$

חיתוך עם ציר ה-y, נציב $x=0$ בביטוי האלגברי של הפונקציה:

$$f(0)=-5+\sqrt{0^2-10\cdot 0+16}=-5+4=-1 \Rightarrow (0,-1)$$

ד. סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$:
על פי כל סעיפי החקירה עד כה:



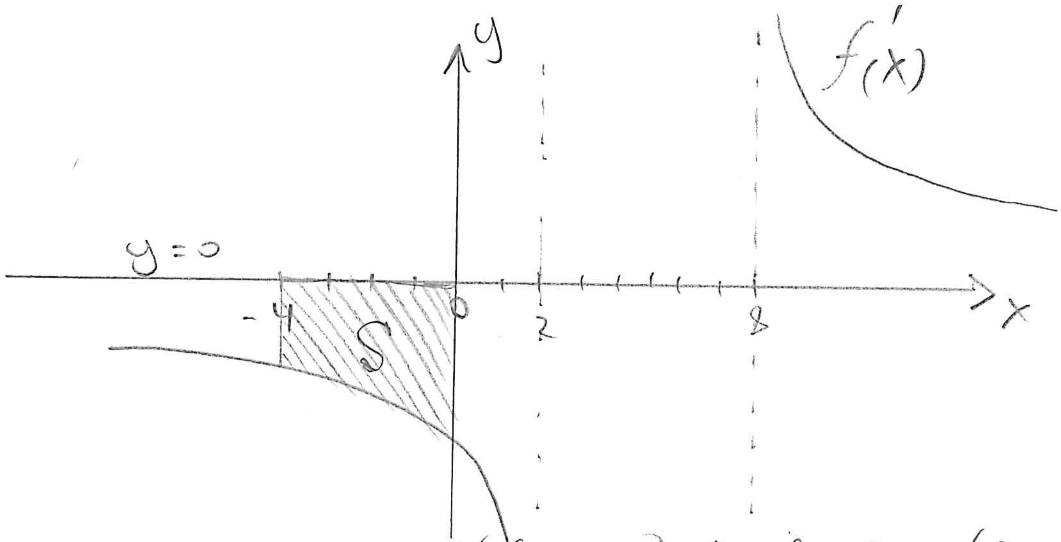
ה. בסעיף ג' מצאנו את תחומי החיוביות והשליליות של הנגזרת $f'(x)$
$f'(x)>0$ כאשר $x>8$; $f'(x)<0$ כאשר $x<0$

לפיכך גרף I נפסל, שכן עבור ערכי x שליליים ערכי y חיוביים.
גרף II נפסל מכיוון שעבור ערכי x חיוביים מסויימים גרף זה עובר מתחום חיוביות לתחום שליליות, דבר המרמז על נקודת קיצון פנימית של f מסוג מקסימום.

גרף III מתאים לתחומי החיוביות והשליליות של $f'(x)$ ולכן
גרף III מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

גרף IV נפסל, מכיוון שעבור ערכי x שליליים ערכי ה-y חיוביים.

1.



נסמן את השטח הדרוש: S (ראה שרטוט).

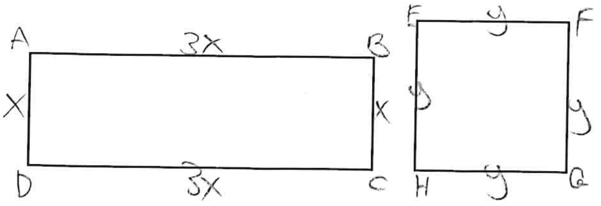
$$S=\int_{-4}^{0}\left(0-f'(x)\right)dx=\int_{-4}^{0}\left(-f'(x)\right)dx=\Big[-f(x)\Big]_{-4}^{0}=$$

$$=\left(-f(0)\right)-\left(-f(-4)\right)=f(-4)-f(0)=$$

$$=\left(-5+\sqrt{(-4)^2-10\cdot(-4)+16}\right)-\left(-5+\sqrt{0^2-10\cdot 0+16}\right)=$$

$$=\sqrt{72}-4=6\cdot\sqrt{2}-4$$

$$S=6\sqrt{2}-4\approx 4.485$$



8. בציור שלפניך ריבוע ומלבן.

נתון: אורך המלבן גדול פי 3 מרוחב המלבן.

סכום ההיקפים של הריבוע והמלבן הוא a .

נסמן את רוחב המלבן ב־ x .

א. הבע באמצעות a ו־ x את אורך צלע הריבוע.

ב. מצא את הערך של x שבעבורו סכום השטחים של הריבוע והמלבן הוא מינימלי (הבע באמצעות a).

ג. נתון כי סכום השטחים של הריבוע והמלבן הוא מינימלי כאשר אורך צלע הריבוע הוא 3 .

מצא את a .

פתרון:

נגדיר את הסימונים הנדרשים בשרטוט.

לפי כך והסימון הנדרש בשאלה: $AD=x$.

כלומר נגדיר במלבן שווה צלע לו $BC=AD=x$.

נתון: אורך המלבן גדול פי 3 מרוחב המלבן: $AB=CD=3x$.

א. נסמן את אורך צלע הריבוע ב-y. כל צלעות הריבוע שוות זו לזו באורכן.

הביטוי לסכום ההיקפים:

$$P_{ABCD}+P_{EFGH}=AD+AB+BC+CD+EF+FG+GH+EH=2x+6x+4y=$$

$$=8x+4y$$

נתון כי סכום ההיקפים הנ"ל הוא a. לכן:

$$8x+4y=a$$

נבודד את y:

$$4y=a-8x$$

$$y=\frac{1}{4}\cdot a-2x$$

אורך צלע הריבוע באמצעות a ו- x:

$$\boxed{\frac{1}{4}a-2x}$$

ד. ראשית נגדיר את פונקציית המטרה:

$$S(x) = S_{ABCD} + S_{EFGH} = x \cdot 3x + y^2 = 3x^2 + \left(\frac{1}{4}a - 2x\right)^2 =$$

$$= 3x^2 + 4x^2 - ax + \frac{1}{16} \cdot a^2 = 7x^2 - ax + \frac{1}{16} \cdot a^2$$

תחום ההגדרה של פונקציית המטרה: נדרוש:

אורך צלע הריבוע חיובי:

$$0 < y$$

$$0 < \frac{1}{4} \cdot a - 2x$$

$$2x < \frac{1}{4} \cdot a$$

$$x < \frac{1}{8} a$$

וכן $0 < x$ (אורך צלע המלבן).

פונקציית המטרה:

$$S(x) = 7x^2 - ax + \frac{1}{16} \cdot a^2 \quad , \quad 0 < x < \frac{1}{8} \cdot a$$

נגזור למציאת מינימום מוחלט בתחום:

$$S'(x) = 14x - a$$

נשווה לאפס:

$$S'(x) = 0$$

$$14x - a = 0$$

$$14x = a$$

$$x = \frac{1}{14} \cdot a \quad \text{(בתחום הנ"ל)}$$

נגזור פעם נוספת לקביעת סוג הקיצון:

$$S''(x) = 14 > 0$$

$$\Downarrow$$

$$S''\left(\frac{1}{14}a\right) > 0$$

לכן עבור $x_{min} = \frac{1}{14}a$ מתקבל סכום שטחים מינימלי של הריבוע והמלבן.

ג. נתון כי סכום השטחים של הריבוע והמלבן הוא מינימלי
כאשר אורך צלע הריבוע הוא 3.

הביטוי לאורך צלע הריבוע (מסעיף א'): $\frac{1}{4}\cdot a-2x$

מהנ"ל נסיק:

$$\begin{cases} \text{I.} \quad \frac{1}{4}\cdot a-2x_{min}=3 \\ \text{II.} \quad x_{min}=\frac{1}{14}\cdot a \end{cases}$$

מסעיף ב': $x_{min}=\frac{1}{14}\cdot a$

נציב II ב-I:

$$\frac{1}{4}\cdot a-2\cdot\frac{1}{14}\cdot a=3$$

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)\cdot a=3$$

$$\frac{7-3}{28}\cdot a=3 \quad \Big/\cdot\frac{28}{3}$$

$$\boxed{a=28}$$