פתרון הבחינה
במתמטיקה

מועד ב, תשפ"א, 2021, שאלון: 35582

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע" :
יואל גבע, ארד טלמון, ריקי טל, אביחי כהן, קובי שרוני, אודי נעים, יאיר גולני, רועי גבע

1. לפניך משוואת הפרבולה: $y^2 = 2ax$ ומשוואת המעגל: $x^2 + y^2 - 2ax - 2x = 0$. a הוא פרמטר גדול מ־ 0 .

א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפרבולה והמעגל. הבע באמצעות a , אם יש צורך.

דרך שתיים מנקודות החיתוך של הפרבולה והמעגל עובר ישר ששיפועו חיובי.

ב. מצא את משוואת הישר. הבע באמצעות a , אם יש צורך.

ממרכז המעגל מעבירים אנך לישר. אורך האנך הוא $2\sqrt{5}$.

ג. **(1)** הבע באמצעות a את מרכז המעגל ואת הרדיוס שלו.

(2) מצא את a .

מגדירים מעגל חדש שמרכזו זהה למרכז המעגל הנתון והרדיוס שלו קטן ב־ 2 מרדיוס המעגל הנתון.

ד. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל החדש שווה למרחק שלהן מן הישר $x = -4$.

פתרון:

א.

$$\begin{cases} x^2+y^2-2ax-2x=0 \\ y^2=2ax \end{cases} \Rightarrow x^2+2ax-2ax-2x=0$$

$$x^2-2x=0$$

$x=0 \rightarrow y=0$

$x=2 \rightarrow y^2=4a$

$y=2\sqrt{a}$, $y=-2\sqrt{a}$

הנקודות הן: $\boxed{(2,-2\sqrt{a}) \ , \ (2,2\sqrt{a}) \ , \ (0,0)}$

ב. כדי ששיפוע הישר יהיה חיובי נבחר את הנקודות $(0,0)$ ו- $(2,2\sqrt{a})$:

שיפוע הישר: $m=\frac{2\sqrt{a}-0}{2-0}=\sqrt{a}$

משוואת הישר: $\boxed{y=\sqrt{a}\,x}$

ג. נשלים לריבוע את משוואת המעגל:

(1) $x^2-2(a+1)x+(a+1)^2+y^2=(a+1)^2$

$(x-(a+1))^2+y^2=(a+1)^2$

מרכז המעגל:	$(a+1,0)$
רדיוס המעגל:	$R=a+1$

(2) לפי מרחק נקודה מישר:

$2\sqrt{5}=\frac{|\sqrt{a}(a+1)|}{\sqrt{(\sqrt{a})^2+1^2}} \Rightarrow 2\sqrt{5}=\frac{|\sqrt{a}(a+1)|}{\sqrt{a+1}}$

נעלה בריבוע:

$20=\frac{a(a+1)^2}{a+1}$

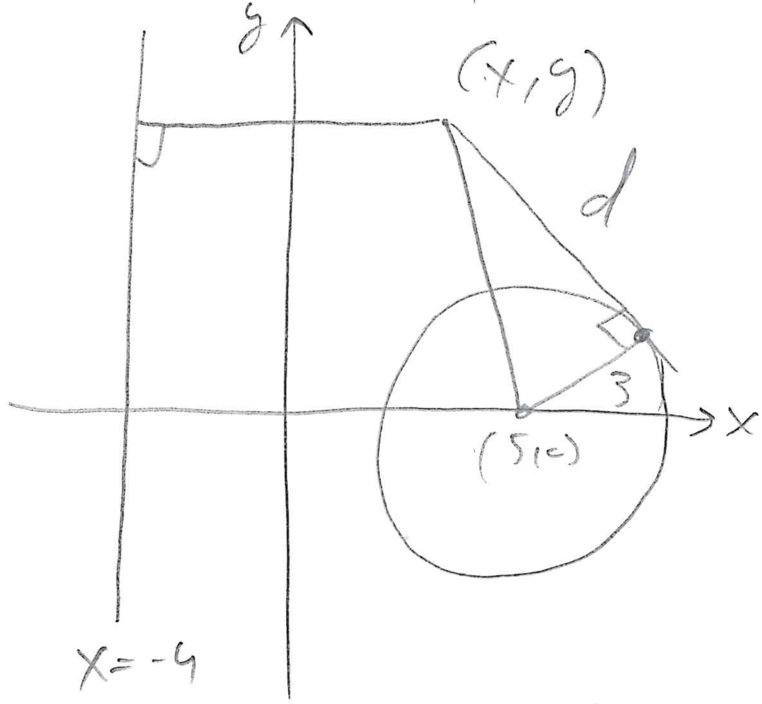
$20=a(a+1)$

$a^2+a-20=0$ → $a=4$, $a=-5$ $\Rightarrow \boxed{a=4}$

3. מרכז המעגל החדש הוא $(a+1,0) \Rightarrow (5,0)$

רדיוס המעגל החדש הוא $a+1-2=3$

נשרטט כדי להבין את המקום הגיאומטרי:



המרחק מהישר הוא $x+4$

ואילו המשיק מחושב בעזרת משפט פיתגורס:

$$d^2+3^2=\left(\sqrt{(x-5)^2+y^2}\right)^2$$

$$d^2=(x-5)^2+y^2-9$$

$$d=\sqrt{(x-5)^2+y^2-9}$$

נשווה את המרחקים:

$$x+4=\sqrt{(x-5)^2+y^2-9}$$

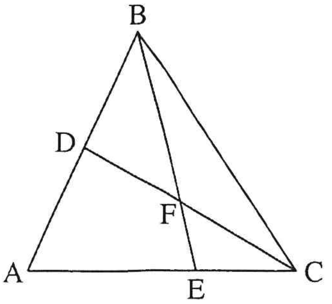
נעלה בריבוע:

$$x^2+8x+16=x^2-10x+25+y^2-9$$

$$\boxed{y^2=18x}$$

המקום הגיאומטרי הוא פרבולה קנונית.

2. נתון משולש ABC (ראה סרטוט).



הנקודה D היא אמצע הצלע AB.

הנקודה E מחלקת את הצלע AC ביחס של $AE : EC = 2 : 1$.

הנקודה F היא מפגש הקטעים BE ו־ CD.

נסמן: $\overrightarrow{CA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{CB} = \underline{v}$

k ו־ t הם מספרים כך ש: $\overrightarrow{BF} = t \cdot \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF} = k \cdot \overrightarrow{CD}$.

א. מצא את t ואת k.

המשולש ABC נמצא במישור $4x + 2y + z - 12 = 0$.

מישור זה חותך את ציר ה־ x בנקודה A, את ציר ה־ y בנקודה C

ואת ציר ה־ z בנקודה B. הנקודה O היא ראשית הצירים.

ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו־ F.

ג. מצא את משוואת המישור AOE.

ד. מצא את נפח הפירמידה FAOE.

<u>פתרון:</u>

א. אין נתונים מספריים על $\underline{u}$ ועל $\underline{v}$, לכן נפתור בעזרת יחידות ההצגה. נביע את $\overrightarrow{BF}$ בשתי דרכים:

1) $\overrightarrow{BF} = t \cdot \overrightarrow{BE} = t(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}) = t(-\underline{v} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}) =$

$= t(-\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{u}) = -t\underline{v} + \frac{t}{3}\underline{u}$

2) $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = -\underline{v} + k \cdot \overrightarrow{CD} =$

$= -\underline{v} + k(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = -\underline{v} + k(\underline{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) =$

$= -\underline{v} + k(\underline{u} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})) = -\underline{v} + k(\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}) =$

$= -\underline{v} + \frac{1}{2}k\underline{u} + \frac{1}{2}k\underline{v} = \frac{k}{2}\underline{u} + (\frac{k}{2} - 1)\underline{v}$

כעת נשווה את הרכיבים:

$$-t\underline{v}+\frac{t}{3}\underline{u}=\frac{k}{2}\underline{u}+\left(\frac{k}{2}-1\right)\underline{v}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases}\frac{t}{3}=\frac{k}{2}\\ -t=\frac{k}{2}-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{3}{2}k\\ t=1-\frac{k}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{3}{2}k=1-\frac{k}{2}$$

$$\boxed{t=\frac{3}{4}\ ,\ k=\frac{1}{2}}$$

(נדרש)

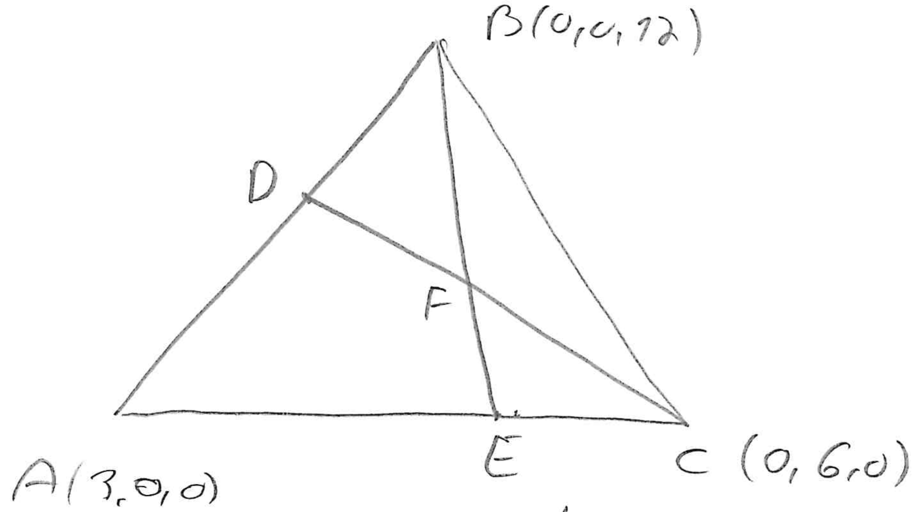
ב. המישור במישור $4x+2y+z-12=0$

נקודה A היא החיתוך עם ציר x: $A(3,0,0)$

נקודה C היא החיתוך עם ציר y: $C(0,6,0)$

נקודה B היא החיתוך עם ציר z: $B(0,0,12)$

נשרטט:



$\Downarrow$

לפי חלוקת הקטע AC ביחס של $AE:EC=2:1$

$$\boxed{E(1,4,0)}$$

כעת:

$$\vec{BF} = \frac{3}{4}\vec{BE}$$
$$\Downarrow$$
$$F - B = \frac{3}{4}(E-B)$$
$$\Downarrow$$
$$F-(0,0,12) = \frac{3}{4}\left((1,4,0)-(0,0,12)\right) = \left(\frac{3}{4}, 3, -9\right)$$

$$\boxed{F = \left(\frac{3}{4}, 3, 3\right)}$$

ג. הנקודות הן:

$O(0,0,0)$

$A(3,0,0)$

$E(1,4,0)$

הצגה פרמטרית:

$$\underline{x} = t(3,0,0) + s(1,4,0)$$

נמצא את הנורמל של המישור:

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(3,0,0)=0\\(a,b,c)\cdot(1,4,0)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3a=0\\a+4b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$$

נבחר $c=1$, ומכיוון שהמישור עובר בראשית

נקבל שמשוואתו היא:

$$\boxed{z=0}$$

הערה: מכיוון ששלושת הקודקודים בעלי שיעור $z=0$ יכולנו לרשום ישר שזו משוואת המישור....

3. שלב ג'- שטח משולש AOE:

$$|\vec{OA}| = 3$$

$$|\vec{OE}| = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}$$

$$\cos\measuredangle AOE = \frac{\vec{OA}\cdot\vec{OE}}{|\vec{OA}|\cdot|\vec{OE}|} = \frac{(3,0,0)\cdot(1,4,0)}{3\cdot\sqrt{17}}$$

$$\cos\measuredangle AOE = \frac{3}{3\cdot\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \measuredangle AOE = 75.96^\circ$$

מכאן:

$$S_{\Delta AOE} = \frac{3\cdot\sqrt{17}\cdot\sin 75.96^\circ}{2} = 6$$

שלב ד'- אורך הגובה של הפירמידה הורד מהנקודה F לבסיס AOE:

$$d = \frac{|3|}{\sqrt{1^2}} = 3$$

לכן:

$$V_{FAOE} = \frac{6\cdot 3}{3} = \boxed{6}$$

3. נתונה משוואה I : $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$. z הוא מספר מרוכב.

א. פתור את משוואה I .

פתרונות המשוואה מיוצגים על ידי כל הקודקודים של מצולע במישור גאוס.

ב. מצא את שטח המצולע.

נתונה משוואה II : $(a \cdot z^2 + b)(z+1) = 0$. z הוא מספר מרוכב, a ו־ b הם מספרים ממשיים השונים מאפס.

ידוע כי שניים מבין הפתרונות של המשוואה הם מספרים מדומים.

ג. הוכח כי $a \cdot b > 0$.

ד. מצא את פתרונות משוואה II. הבע באמצעות a ו־ b , אם יש צורך.

ידוע כי הפתרונות המדומים של משוואה II מיוצגים על ידי נקודות הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית הצירים והרדיוס שלו גדול פי שניים מן הערך המוחלט של פתרונות משוואה I .

ה. מצא את היחס $\frac{b}{a}$.

פתרון:

א.

$$z^4 - 2z^2 + 4 = 0$$

נסמן $z^2 = t$:

$$t^2 - 2t + 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \mp \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{2 \mp \sqrt{-12}}{2} = 1 \mp \sqrt{3}i$$

נחזור להצבה:

(1) $z^2 = 1 + \sqrt{3}i \Rightarrow (x+yi)^2 = 1 + \sqrt{3}i$

$$x^2 + 2xyi - y^2 = 1 + \sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = \sqrt{3} \rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2x} \end{cases}$$

ולכן במשוואה העליונה:

$$x^2 - \frac{3}{4x^2} = 1$$

$$4x^4 - 4x - 3 = 0$$

נפתור ונקבל: $x^2=-\frac{1}{2}$, $x^2=\frac{3}{2}$

הפתרון השלילי לא מתאים כי x ממשי, לכן $x^2=\frac{3}{2}$

נוציא שורש ונקבל $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y=\frac{\sqrt{3}}{-2\sqrt{\frac{3}{2}}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

כלומר הפתרון הוא $\boxed{z=\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \ , \ z=-\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$

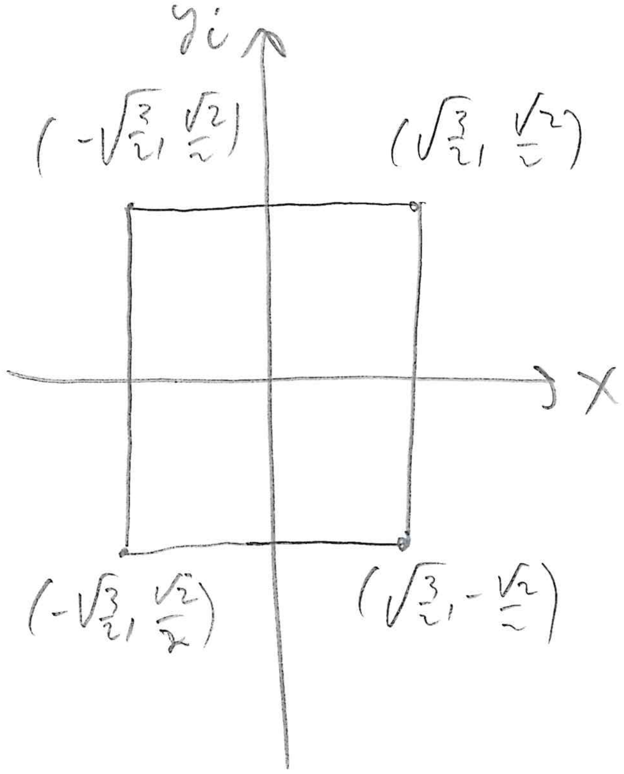
בצורה דומה, עבור $z^2=1-\sqrt{3}i$ נקבל:

$$x^2+2xyi-y^2=1-\sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=1 \\ 2xy=-\sqrt{3} \end{cases} \to y=\frac{-\sqrt{3}}{2x}$$

$$x^2-\frac{3}{4y^2}=1 \to x=\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y=-\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

והפתרונות יהיו: $z=\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z=-\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$



ב.

המרובע הוא מלבן

ששטחו הוא:

$$S = 2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot 2\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$\boxed{S = 2\sqrt{3}}$$

ג. נתונה משוואה: $(az^2+b)(z+1)=0$

פתרונות המשוואה הם:

$z=-1$ (1 → פתרון ממשי

$z^2 = -\frac{b}{a}$ (2

$\downarrow$

$(x+yi)^2 = -\frac{b}{a}$

$\downarrow$

$x^2+2xyi-y^2 = -\frac{b}{a}$

כדי שיתקבלו שני פתרונות מדומים נדרוש $x=0$:

$$-y^2 = -\frac{b}{a}$$

$$y^2=\frac{b}{a}$$

$$\Downarrow$$

y ממשי ולכן המנה חיובית:

$$0<\frac{b}{a}$$

$$\Downarrow$$

המנה חיובית ולכן גם המכפלה חיובית:

$$\boxed{a\cdot b>0}$$

ג. נפתור את המשוואה:

$$y^2=\frac{b}{a}$$

$$\Downarrow$$

$$y=\mp\sqrt{\frac{b}{a}}$$

הפתרונות הם:

$$\boxed{z=-\sqrt{\frac{b}{a}}\,i,\ z=\sqrt{\frac{b}{a}}\,i,\ z=-1}$$

ה. נחשב את הערך המוחלט של פתרון משוואה I:

$$\left|\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right|=\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

לכל הפתרונות אותו ערך מוחלט

רדיוס המעגל הנתון בסעיף זה הוא $R=2\sqrt{2}$

נקודות החיתוך של המעגל עם הציר המדומה

הם $(0,2\sqrt{2})$, $(0,-2\sqrt{2})$

מכאן, לפי סעיף ג' נקבל:

$2\sqrt{2}=\sqrt{\frac{b}{a}} \quad /()^2$

$\boxed{\frac{b}{a}=8}$

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{(bx^2 - 2bx)} - 1$ המוגדרת לכל x. $b < 0$ הוא פרמטר.

הבע את תשובותיך באמצעות b, אם יש צורך.

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה־ x (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נגדיר את הפונקציה: $g(x) = f(x + a)$, a הוא פרמטר. נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון על ציר ה־ y.

ב. (1) מצא את a, ובטא את הפונקציה $g(x)$ באמצעות x ו־ b.

(2) האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית? נמק.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. מצא את שיעור ה־ x של כל אחת מנקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $g'(x)$, וקבע את סוגן.

ד. הצב $b = -0.5$, וחשב את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים העוברים דרך נקודות הקיצון של $g'(x)$ ומאונכים לציר ה־ x.

4 א(1)

חיתוך עם ציר y:

$f(0) = e^0 - 1 = 0$

$\boxed{(0,0)}$

חיתוך עם ציר x:

$e^{(bx^2-2bx)} - 1 = 0$

$e^{(bx^2-2bx)} = e^0$

$bx^2 - 2bx = 0 \quad /:b$

$x(x-2) = 0$

$x = 0 \qquad x = 2$

$\boxed{(2,0)}$

א(2) אנכית: אין, הפונ' מוגדרת לכל x

אופקית: עבור $b<0$

$$\lim_{x\to\infty} e^{b(x^2-2x)}-1=e^{-\infty}-1=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{b(x^2-2x)}-1=e^{-\infty}-1=-1$$

$\boxed{\text{אסימפטוטה אופקית } y=-1}$

א(3) $f'(x)=e^{(bx^2-2bx)}\cdot(2bx-2b)=0$

ביטוי מעריכי בבסיס e הוא תמיד חיובי

$2bx=2b \quad |:2b\neq 0 \quad (b<0)$

$x=1$

x	$x<1$	1	$1<x$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

ביטוי מעריכי בבסיס e תמיד חיובי ולכן ניתן להציב רק בביטוי $(2bx-2b)$ ע"מ לקבוע סימן נגזרת.

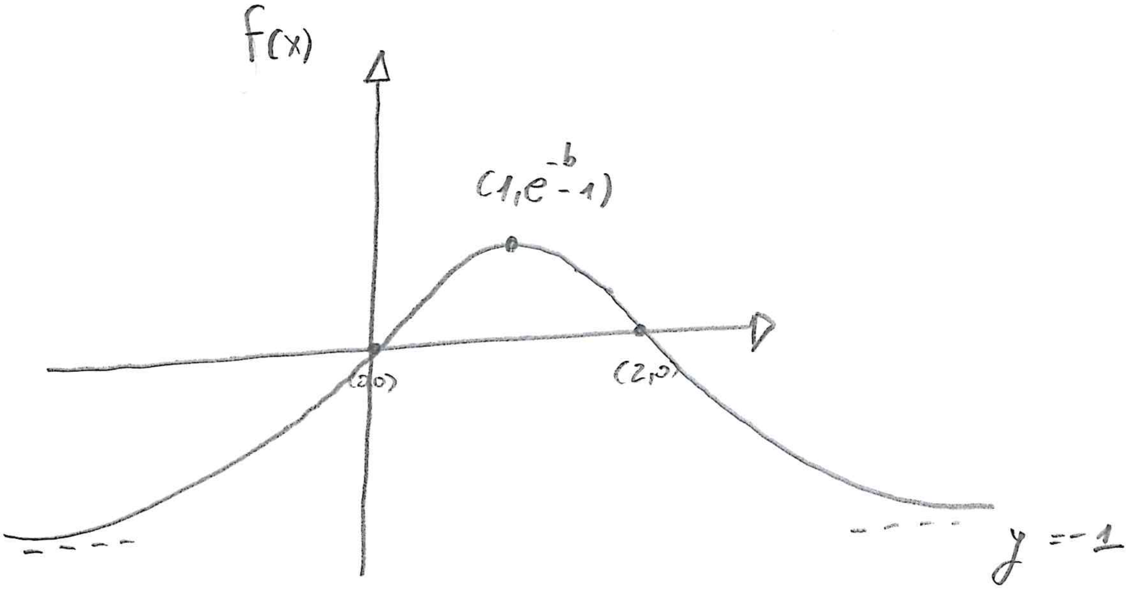
$$\left.\begin{array}{l} f'(2)=4b-2b=2b<0 \\ f'(\frac{1}{2})=b-2b=-b>0 \end{array}\right\}(b<0)$$

המשך א(3)

מציאת שיעור y של נק' הקיצון:

$f(1) = e^{(b-2b)} - 1$ $\boxed{\max(1, e^{-b} - 1)}$

ב(4)



ג(1)ב $g(x)$ היא הזזה אופקית של $f(x)$ ע"מ שנק' הקיצון (המינימום) תמצא על ציר ה-y צריך ש $\boxed{a=1}$

$$g(x) = e^{(b(x+1)^2 - 2b(x+1))} - 1$$

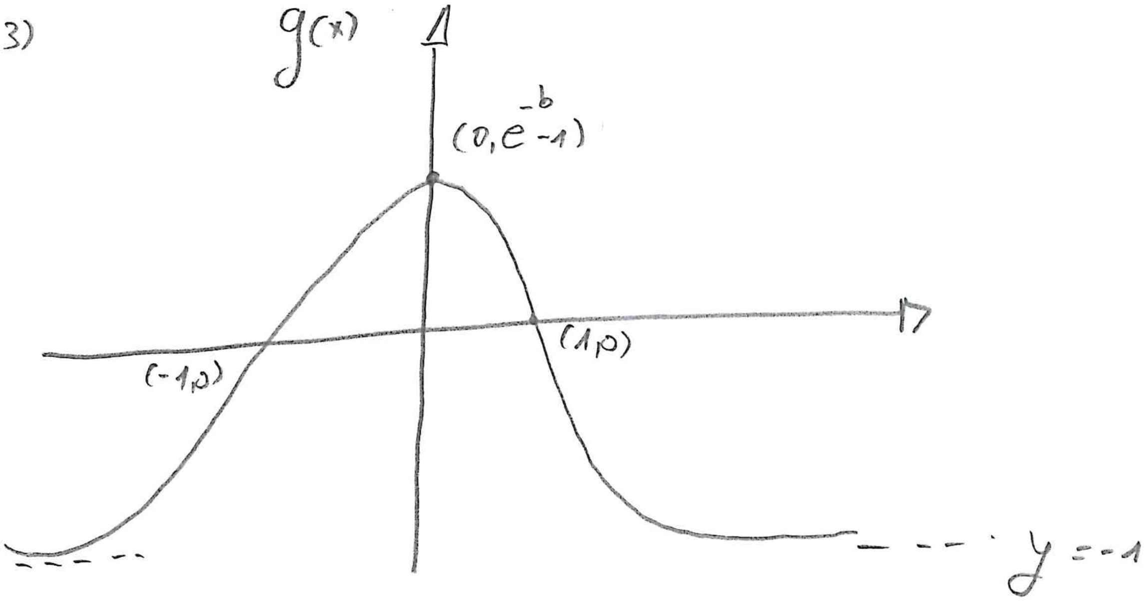
$$g(x) = e^{b(x^2+2x+1-2x-2)} - 1$$

$$\boxed{g(x) = e^{b(x^2-1)} - 1}$$

ב(2) $$g(-x) = e^{b((-x)^2-1)} - 1 = e^{b(x^2-1)} - 1 = g(x)$$

הפונ' $g(x)$ היא זוגית.

ב(3)



ג) $$g'(x) = 2bx \cdot e^{b(x^2-1)}$$

$$g''(x) = 2b e^{b(x^2-1)} + (2bx)^2 e^{b(x^2-1)}$$

$$e^{b(x^2-1)}(2b + 4b^2x^2) = 0$$

ביטוי מעריכי בבסיס e
תמיד חיובי

$$4b^2x^2 = -2b$$

$$x^2 = -\frac{1}{2b} \rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{1}{2b}} \quad (b<0)$$

ניתן לראות שבעבור $x=\sqrt{-\frac{1}{2b}}$ $g(x)$ מחליפה מקעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולכן: $\boxed{x=\sqrt{\frac{-1}{2b}}\ \ \min}$

ניתן לראות שבעבור $x=-\sqrt{-\frac{1}{2b}}$ $g(x)$ מחליפה מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה ולכן: $\boxed{x=-\sqrt{\frac{-1}{2b}}\ \ \max}$

(ד) נמצא חיתוך של $g'(x)$ עם ציר x:

$$g'(x)=0 \to 2bxe^{b(x^2-1)}=0$$

$x=0$

ביטוי מעריכי בבסיס e תמיד חיובי

מכיוון ו $g(x)$ זוגית $g'(x)$ אי זוגית, עבור $b=-\frac{1}{2}$

גבולות האינטגרל הם: $x=1$ $x=-1$, הגבולות סימטריים ולכן נוכל לחשב את השטח בגבולות $x=1$! $x=0$ ולהכפיל ב-2, כאשר: $0<x<1$ $g(x)$ יורדת ולכן $g'(x)$ מתחת לתחום בציר זה

$$2\cdot\int_0^1 -g'(x)\,dx = -2\cdot g(x)\Big]_0^1$$

$$-2(g(1)-g(0)) = -2\left(0-(e^{\frac{1}{2}}-1)\right) = 2(\sqrt{e}-1) = \underline{\overline{1.297}}$$

5. נתונה הפונקציה: $f(x) = a \cdot x^2 - x^3$ המוגדרת לכל x, a הוא פרמטר.

ענה על סעיפים א-ג עבור $0 < a$. הבע את תשובותיך באמצעות a, אם יש צורך.

א. **(1)** מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \ell n(f(x))$.

ב. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגה.

ג. נתון כי לגרף הפונקציה $g(x)$ יש נקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה־ x.

(1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את טווח הערכים האפשריים של a שעבורם גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה־ x בנקודה אחת בלבד.

ענה על סעיף ד עבור $a = 0$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. ציין בגרף את הערכים המספריים של שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה־ x.

פתרון:

א. (1) נמצא את החיתוך עם ציר ה-x:

$ax^2 - x^3 = 0 \rightarrow x^2(a-x) = 0$, $x=0$, $x=a$

ונבדוק תחומים:

$-1 \quad 0 \quad \frac{1}{2}a \quad a \quad 2a \quad x$

$f(-1) = a+1 > 0$

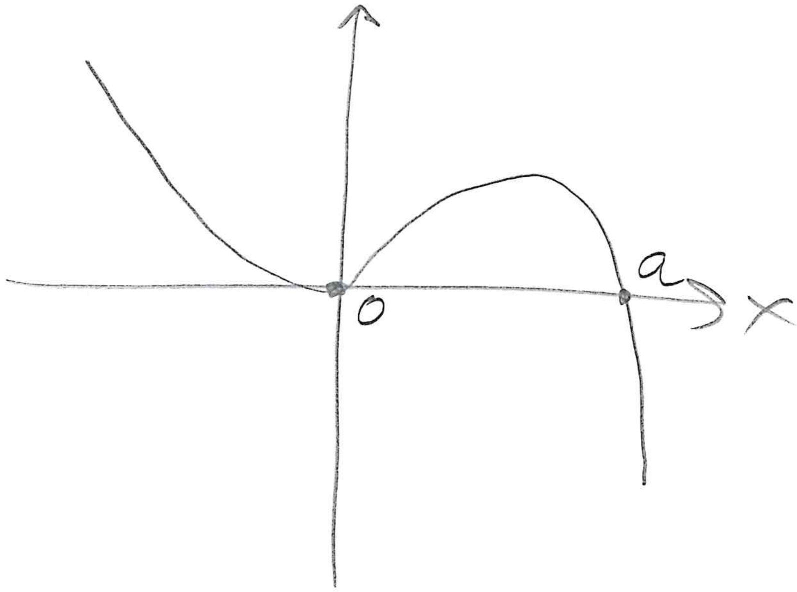
$f(\frac{1}{2}a) = a \cdot (\frac{1}{2}a)^2 - (\frac{1}{2}a)^3 = \frac{a^3}{4} - \frac{a^3}{8} = \frac{a^3}{8} > 0$

$f(2a) = a \cdot (2a)^2 - (2a)^3 = 4a^3 - 8a^3 = -4a^3 < 0$

לסיכום:

$\boxed{\begin{array}{r} \text{תחום שליליות: } a<x \\ \text{תחומי חיוביות: } 0<x<a \text{ או } x<0 \end{array}}$

(2) לפי תחומי החיוביות והשליליות (תחום הגדרה הוא כל x):



ב. $g(x) = \ln(f(x))$

(1) התוכן של ln חייב להיות חיובי, ולפי סעיף א׳

נקבל: $\boxed{0<x<a \text{ או } x<0}$

(2) עבור $\boxed{x=a}$ ו- $\boxed{x=0}$

התוכן של ה-ln מתאפס ולכן אלו

אסימפטוטות אנכיות.

אין אסימפטוטה אנכית כי עבור $x\to$

המונה שואף לאינסוף ולכן ה- ln שואף לאינסוף.

ג) $g(x)=\ln(ax^2-x^3)$

נגזרת: $g'(x)=\dfrac{2ax-3x^2}{ax^2-x^3}$

נשווה לאפס ונפתור: $2ax-3x^2=0$

$x(2a-3x)=0$

$x=0$ ϕ

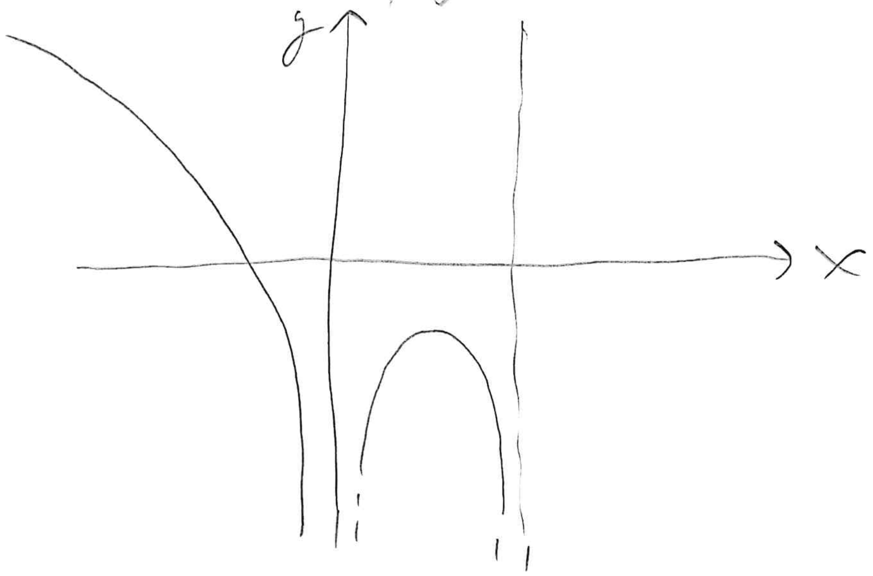
$x=\frac{2a}{3}$

$y=\ln\left(a\cdot\left(\frac{2a}{3}\right)^2-\left(\frac{2a}{3}\right)^3\right)=\ln\frac{4a^3}{27}$

x	$-a$	0	$\frac{a}{2}$	$\frac{2a}{3}$	$\frac{3a}{4}$	a
$g'(x)$	$-$	///	$+$	0	$-$	///
$g(x)$	↘	///	↗		↘	///

לסיכום: $\boxed{\left(\frac{2a}{3}, \ln\frac{4a^3}{27}\right) \text{ מקסימום}}$

ג. (1) נתון שלפונקציה g(x) יש נקודת חיתוך אחת בדיוק עם ציר x.
כלומר לפונקציה f(x) יש נקודה אחת בדיוק שבה שיעור ה-y שלה הוא 1, כי $0 = \ln 1$.
לפי סעיף א' נקודה זו נמצאת משמאל לציר ה-y, ולכן מימין לציר ה-y ערכי הפונקציה f(x) קטנים מ-1, ומכאן שערכי הפונקציה g(x) קטנים מאפס:



(2) כדי שגרף כזה יתקיים, נדרוש ששיעור ה-y של נקודת המקסימום יהיה שלילי,
כלומר $\ln\frac{4a^3}{27} < 0$

נסתכל את אי השוויון:

$$\ln \frac{4a^3}{27} < \ln 1$$

$$\frac{4a^3}{27} < 1$$

$$a^3 < \frac{27}{4} \quad / \sqrt[3]{\ }$$

$$a < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

נתון $0<a$ ולכן $\boxed{0<a<\frac{3}{\sqrt[3]{4}}}$

3. כעת $a=0$, כלומר

$$g(x) = \ln(-x^3)$$

תחום הגדרה $x<0$

חיתוך עם ציר x יהיה ב- $(-1,0)$ (כי $-x^3=1 \rightarrow x=-1$)

ולכן: