

## פתרון הבחינה

# במתמטיקה

מועד ב, תשפ"א, 2021, שאלון: 35581

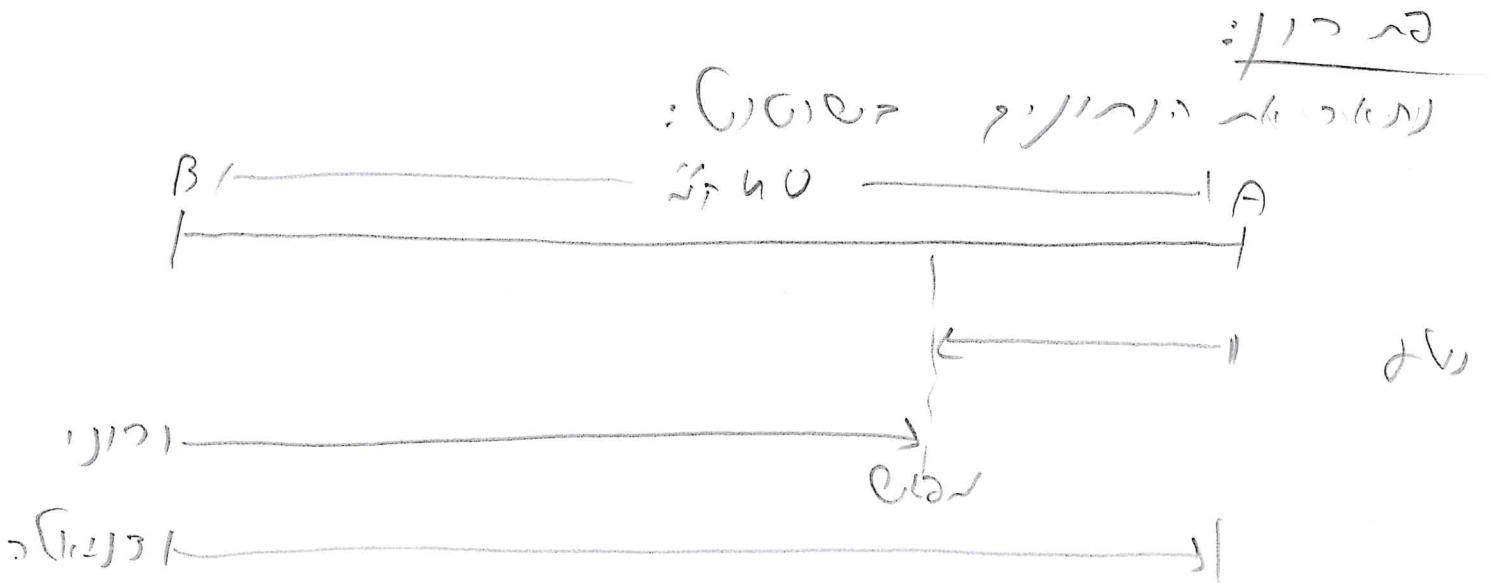
מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע":  
יואל גבע, ארד טלמון, ריקי טל, אביחי כהן, קובי שרוני, אודי נעים, יאיר גולני, רועי גבע

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

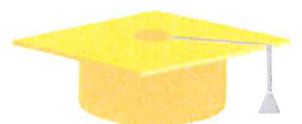
הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



1. נטע, דניאלה ורוני מתאמנות בהליכה ובריצה במסלול AB שאורכו 40 ק"מ.  
 בשעה 8:00 יצאה נטע מנקודה A והלכה במהירות של 4 קמ"ש לכיוון נקודה B.  
 בשעה 9:36 יצאה דניאלה מנקודה B ורצה לכיוון נקודה A.  
 שעתיים לאחר צאתה של נטע, יצאה רוני מנקודה B ורצה במהירות של 12 קמ"ש לכיוון נקודה A.  
 נטע ורוני נפגשו ולאחר מכן המשיכו בדרכן.  
 שעה ר-36 דקות אחרי שנטע ורוני נפגשו, הגיעה דניאלה לנקודה A.  
 המהירות של כל אחת מן המתאמנות היא קבועה באימון כולו.
- באיזו שעה נפגשו נטע ורוני?
  - מהי מהירות הריצה של דניאלה? נמק את תשובתך.
  - האם שלוש המתאמנות נפגשו בנקודה אחת לאורך המסלול? נמק את תשובתך.
  - כל מתאמנת שמגיעה לקצה המסלול מייד מסתובבת וחוזרת לנקודה שממנה היא יצאה.
  - באיזה מרחק מן הנקודה B נפגשו נטע ורוני בפעם השנייה? נמק את תשובתך.



1. נטע יצאה בשעה 8:00 כל היום 4 ק"מ  
 רוני יצאה בשעה 9:36 כל היום 12 ק"מ  
 כשנוני יצאה נטע כבר עזרה 8 ק"מ וזכנו נותרו  
 32 ק"מ בין שתיהן. הנה היום הנשמה שלהן  
 היא 16 ק"מ וזכנו הן (פגשו) נפגשו יחד



שיוני זלואה, באומה הפ ופאטו א שלגה 100:12

ב. בניאלה הטיגה לנהוצה A שלגה ו-163 דקו

זאהרי שנטל וכוני ופאטו באומה הטיגה

ב שלגה 13:36. בניאלה יטוה א שלגה 67:59

זכנו כלה 4 שלגה בפיוק. לבאו

סמהירר הרילה א בניאלה 10 זמנ"ו

ג. נטל וכוני ופאטו 16 דקו לנהוצה A, באומה

24 דקו לנהוצה B. בניאלה גזגז 24 דקו

בזמן של שטתיים ו-24 דקו  $(\frac{24}{10} = 2.4)$

זכנו הטיגה אטל אטוה נהוצה א שלגה 55:10

דפיוק. באומה, השאש ופאטו אנהוצה הסו.

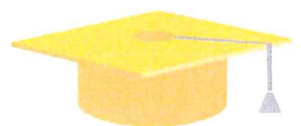
ד. מרטל המכס א נטל וכוני, כוני רזה גז

16 דקו לנהוצה A, וואז מסקב וחוצה אנהוצה B

כפנטל גזיוו האכר אנהוצה A. כוני טל אנהוצה

A כקבור זגו  $\frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ , בזמן אנהוצה נטל אנהוצה

זגו  $5\frac{1}{3} = 4 \cdot \frac{4}{3}$ , באומה האנהוצה אנהוצה יהיה  $\frac{4}{3}$  זגו

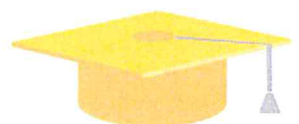


לכאן, נסמן  $x$  את המספר שלגיבסיה פג  
לפי ונהיה שגורמה:

$$2x - 4x = 2 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow 8x = \frac{64}{3} \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

לכאן, נסמן  $x$  הכביש-פגיה כוני תגדור  
המספר שלגיבסיה פגיה  $A$ .

לכאן  $x$  הכביש-פגיה תגדור  $B$



2. נתונה סדרה הנדסית אינסופית  $a_n$ , שאיבריה  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , והמנה שלה  $q$ .  
א. הבע באמצעות  $a_1$  ו- $q$  את ערכי הסכומים שלפניך.

$$A = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{40} \quad (1)$$

$$B = a_4 + a_8 + a_{12} + \dots + a_{40} \quad (2)$$

נתון כי  $a_n$  היא סדרה עולה וכי  $\frac{A}{B} = \frac{10}{9}$ .  
ב. מצא את ערכו של  $q$ .

ג. בונים מן הסדרה  $a_n$  הנתונה סדרה הנדסית אינסופית  $b_n$  המקיימת לכל  $n$  טבעי:  $b_n = 3 \cdot a_{n+1}$ .  
מצא את המנה של הסדרה  $b_n$ .

ד. בונים סדרה הנדסית אינסופית חדשה:  $\dots, \frac{1}{b_4}, -\frac{1}{b_3}, \frac{1}{b_2}, -\frac{1}{b_1}$ .  
הבע את הסכום של כל איברי הסדרה החדשה באמצעות  $a_1$ .

נתונה הסדרה:  $b_1, a_1, \frac{1}{a_1}$ .

ה. (1) האם ייתכן שסדרה זו חשבונית? נמק את תשובתך.

(2) האם ייתכן שסדרה זו הנדסית? נמק את תשובתך.

סך כולל:

1c. (1)  $A = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{40}$

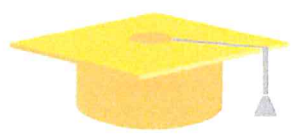
נספרה 15 האיברים במחלקה הראשונה בסדרה  
ואכן המנה החפשה היא  $q^2$ , מספר האיברים  
הוא 16 ו-1 כולל:

$$A = \frac{a_1 q (q^{20} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{a_1 q (q^{40} - 1)}{q^2 - 1}$$

(2)

$$B = a_4 + a_8 + a_{12} + \dots + a_{40}$$

בסדרה 15 יש כולל דקות 16 מחלקה



ואכן הנני החזננה היא  $q^4$ , מספר האיזכיר  
הוא 10, וזהו האנ:

$$B = \frac{a_1 q^3 (q^4)^{10} - 1}{q^4 - 1} = \frac{a_1 q^3 (q^{40} - 1)}{q^4 - 1}$$

ג. נתון  $\frac{A}{B} = \frac{10}{9}$ , הסדרה היא סדרה עולה.  
(3) את הסכומים מסגל ג:

$$\frac{\frac{a_1 q (q^{40} - 1)}{q^2 - 1}}{\frac{a_1 q^3 (q^{40} - 1)}{q^4 - 1}} = \frac{10}{9} \Rightarrow \frac{a_1 q (q^{40} - 1) (q^4 - 1)}{a_1 q^3 (q^{40} - 1) (q^2 - 1)} = \frac{10}{9}$$

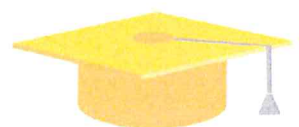
$$\frac{(q^2 - 1)(q^4 + 1)}{q^2 (q^2 - 1)} = \frac{10}{9} \Rightarrow \frac{q^4 + 1}{q^2} = \frac{10}{9}$$

$$9q^4 + 9 = 10q^2$$

$$q^2 = 9 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$q = 3$$

נתון נדרשה עליה ואכן  $q = 3$



ד. נתון:  $b_n = 3 \cdot a_{n+1}$

$b_n = 3 \cdot a_1 \cdot 9^n \Rightarrow b_n = 3a_1 \cdot 3^{2n}$

$b_n = a_1 \cdot 3^{n+1} \Rightarrow b_n = 9a_1 \cdot 3^{n-1}$

באופן זה, היחס של סדרות  $b_n$  הוא  $9=3$

3. סדרה חשבונית:

$-\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, -\frac{1}{b_3}, \frac{1}{b_4}$

נראה כי היחס הוא:

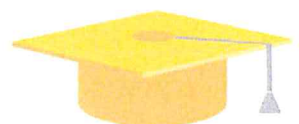
$\frac{\frac{1}{b_2}}{-\frac{1}{b_1}} = -\frac{b_1}{b_2} = -\frac{1}{3}$

נראה כי היחס בין האיברים הוא:

$b_2 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 3a_1 = 9a_1 \Rightarrow -\frac{1}{b_2} = -\frac{1}{9a_1}$

הסדרה היא חשבונית, ולכן:

$S = \frac{-\frac{1}{9a_1}}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{-\frac{1}{9a_1}}{\frac{4}{3}} = \boxed{-\frac{1}{12a_1}}$



$\frac{1}{a_1}, a_1, 9a_1$

ה. נתונים סדרה

$b_n = 9a_n$

נניח  $a_1 = 1$  ?



$\frac{1}{a_1}, a_1, 9a_1$

(א) נבדוק האם יתכן הפנים הקוץ אסדרה:

$a_1 - \frac{1}{a_1} = 9a_1 - a_1 \Rightarrow -\frac{1}{a_1} = 8a_1 \Rightarrow a_1^2 = -\frac{1}{8}$

למשל אינן פתרון ולכן אין יתכן שהסדרה תהיה חסבונה

(ב) נבדוק האם תאכן  $a_1 = 3$  זדוקה:

$\frac{9a_1}{a_1} = \frac{a_1}{\frac{1}{a_1}} \Rightarrow a_1^2 = 9 \rightarrow a_1 = 3$

יש פתרון, ולכן יש הסדרה הנוצרת





3. בתחרות ספורט שנערכת בבית ספר משתתפים תלמידים רבים. כל משתתף צריך להצליח לעבור 3 מכשולים בזה אחר זה לפי הסדר. משתתף שלא מצליח לעבור מכשול מודח מייד מן התחרות. ההסתברות להצליח לעבור מכשול שונה ממכשול למכשול, אך שווה לכל המשתתפים. משתתף שמצליח לעבור את כל שלושת המכשולים עולה לשלב חצי הגמר. 28% מן המשתתפים בתחרות הצליחו לעבור את שני המכשולים הראשונים. ההסתברות שמשתתף שמצליח לעבור את שני המכשולים הראשונים יודח מן התחרות גדולה פי 3 מן ההסתברות שהוא יעלה לשלב חצי הגמר.
- א. חשב את ההסתברות שמשתתף בתחרות יעלה לשלב חצי הגמר.
- ההסתברות שמשתתף יצליח לעבור את המכשול הראשון ולא יעבור את המכשול השני היא 0.42.
- ב. חשב את ההסתברות שמשתתף בתחרות לא יצליח לעבור את המכשול הראשון.
- ג. בחרו באקראי שלושה משתתפים: עומר, גל וליאור. ידוע ששלושתם הצליחו לעבור את המכשול הראשון.
- (1) חשב את ההסתברות שבדיוק שניים מהם יעלו לשלב חצי הגמר.
- (2) חשב את ההסתברות שמבין שלושה, רק עומר וגל יעלו לשלב חצי הגמר.

3/א.

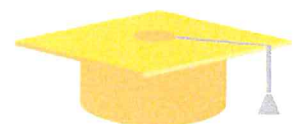
$$P(\text{אצל המכשול הראשון}) = x, \quad P(\text{אצל המכשול השני}) = y, \quad P(\text{אצל המכשול השלישי}) = z$$

I:  $P(\text{אצל המכשול הראשון והשני}) = 0.28$  (נ"ן)

II:  $P(\text{אצל המכשול הראשון והשני והשלישי}) \cdot P(\text{אצל המכשול הראשון}) = 3 P(\text{אצל המכשול הראשון והשני והשלישי})$

I → II:  $0.28(1-z) = 3 \cdot 0.28 \cdot z \quad | :0.28$   
 $1-z = 3z$   
 $1 = 4z$   
 $z = 0.25$  | :4

$P(\text{אצל המכשול הראשון והשני והשלישי}) = 0.28 \cdot 0.25 = 0.07$



א. I:  $P(\text{אירועים תואמים}) = xy = 0.28$

II:  $P(\text{אירועים נפרדים}) = x(1-y) = 0.42$

I:  $xy = 0.28$

II:  $x - xy = 0.42$

I + II:  $x = 0.7$

$y = 0.4$

$P(\text{אירועים נפרדים}) = 1 - x = 0.3$

ב. (א) מכיוון שלשלושת האירועים תוצאות משותפות, הסיכוי של כל אחד מהם לתקום אצל האירוע האחר הוא:

$P(\text{אירועים תואמים}) \cdot P(\text{אירועים תואמים}) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1$

I:  $P(\text{הסתברות שלקדווק שניים שונים}) = \binom{3}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^1 = 0.027$

א. II:  $P(\text{הסתברות שלקדווק שניים שונים}) = 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 0.009$



4. שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה P (ראה סרטוט).

מרכזי המעגלים הם הנקודות M ו-N,

והרדיוסים שלהם הם  $R_1$  ו- $R_2$  בהתאמה,  $R_2 < R_1$ .

מעבירים משיק משותף לשני המעגלים דרך הנקודה P.

מן הנקודה M יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל שמרכזו N בנקודות A ו-B.

ישרים אלה חותכים את המשיק המשותף לשני המעגלים

בנקודות C ו-D, כמתואר בסרטוט.

א. הוכח כי  $AB \perp MN$ .

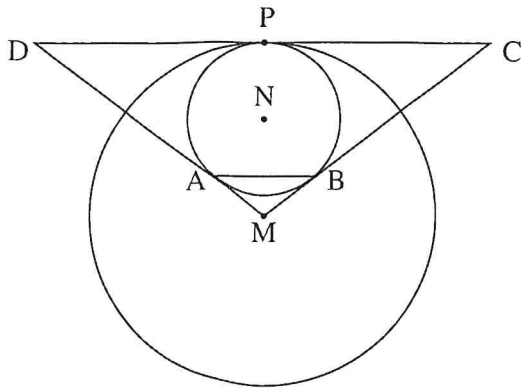
ב. הוכח כי  $AB \parallel DC$ .

ג. הוכח כי  $NB \cdot MC = MN \cdot \frac{DC}{2}$ .

נתון:  $MN = 8$ ,  $\frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{3}$ .

ד. (1) מצא את  $R_1$  ואת  $R_2$ .

(2) מצא את DC.



פתרון

נימוק

לשם

כדי לנסה בנקודה P  
שני ישרים אנכיים היוצאים  
מאותה נקודה על-אורך.

$AN = BN$  (1)

$AM = BM$  (2)

הגדרה פתרון (יחידה קטן)  
שני צוותים של צלף סמוכים  
שלושה הים קליון.

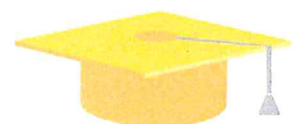
$AN = BM$  (3)

הוא פתרון

אזכרתי בקליון שאזכרתי  
בהמשך.

$AB \perp MN$  (4)

המשפט



ט"ו

קני"ה ע"ר

המשפחה הולדת המכונה  
מגלים שיש להם  
ודוברת ההלכה שלהם

משיק שאונקארדיוס  
הדובר ההלכה

הוא המעביר. אפי. 4, 6, 7

ט"ו

5) קני"ה ע"ר  
מ

6) מ ע מ  
מ

7) M P L D C

8) A B I I D C  
מ. י. ל. ק. י.

קני"ה ע"ר

זאת מהדורה מהלך אמת  
יוצאת לאור של שיקים אמת  
אזי הולדת המעביר הולדת  
עם מרכז המעביר חובה  
הולדת ישפון של המשפחה

9) קני"ה ע"ר מ

10) מ חובה מלוי מ



נילוך

משלם חזרה כולל בשלם  
לפי (10).

אם נקודה אחת לעל יזלאת,  
לפי שיקים לעל, אזי הולך המשק  
אם הקודה גם נכנס העל חזרה  
אם הכולל שבין לפי השיקוי.

אם בשולם חזרה זולל מלכדעם  
אזכה השולם שזה שוקיים.  
לפי (7), (12).

בשולם חזרה זולל החול, האזכה  
והניכון מלכדיי. לפי (13)  
חישוק

כדיוסייג כמעל שלויק.

חישוק, לפי (11), (15), (16)

לעל

$$\frac{PC}{MC} = \frac{PN}{MN} \quad (11)$$

$$P = PN \quad (12)$$

כולל מל

$$P = PC \quad (13)$$

שולם לעל  
שיקיים (אמ=אמ)

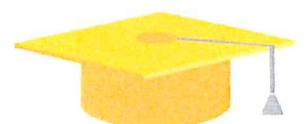
$$P = PC \quad (14)$$

$$PC = \frac{PC}{2} \quad (15)$$

$$PN = NB \quad (16)$$

$$NB \cdot MC = MN \cdot \frac{PC}{2} \quad (17)$$

נילוך 2



נילוד

נתון

נתון

במערכת הנילוד מקביל  
זוג המרחבים של אהבים  
הרציוס.

חישוק אפי (19), (18), (20)

הזכה אפי (19), (17), (21)

חישוק אפי (22)

שטף פיתוחים נשאלת אפי.  
אפי (7)

הזכה אפי (21), (23), (6)

חישוק אפי (23), (15)

טגים

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{3} \quad (18)$$

$$MN = 8 \quad (19)$$

$$MN = R_1 - R_2 \quad (20)$$

$$R_1 = 14, R_2 = 6 \quad (21)$$

✓ י.ש. (1) 3

$$G \cdot MC = 8 \cdot \frac{DC}{2} \quad (22)$$

$$DC = \frac{3}{2} MC \quad (23)$$

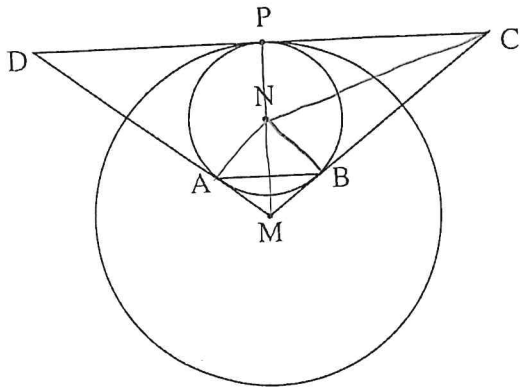
$$PC^2 + PM^2 = MC^2 \quad (24)$$

$$\left(\frac{DC}{2}\right)^2 + 14^2 = MC^2 \quad (25)$$

$$DC = 12\sqrt{7} \quad (26)$$

✓ י.ש. (2) 7

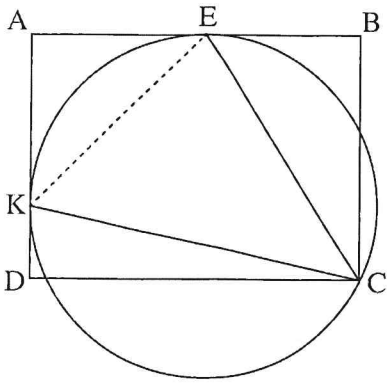




למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.**





5. המרובע ABCD הוא מלבן ששתיים מצלעותיו, AB ו-AD, משיקות למעגל שרדיוסו R בנקודות E ו-K בהתאמה (ראה סרטוט). הנקודה C נמצאת על המעגל.

א. הוכח:  $\angle KCE = 45^\circ$ .

נתון:  $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ ,  $\angle KCD = \alpha$ .

ב. (1) הבע באמצעות  $\alpha$  את הזוויות של המשולש KCE.

(2) הבע באמצעות R ו- $\alpha$  את האורכים של צלעות המשולש KCE.

ג. הבע באמצעות  $\alpha$  את היחס  $\frac{EB}{AE}$ .

נתון:  $\frac{EB}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

ד. חשב את  $\alpha$ .

פתרון:

א.  $\angle BAN = 90^\circ$  (ש"ל כנ"ס ישר)  $\implies AE = AK$  (ש"ל ז"ל) (ש"ל ז"ל) (ש"ל ז"ל)

$\implies \angle AKE = \angle AEA = 45^\circ$  (הי"ש -  $180^\circ$  בש"ל)  $\implies \angle KCE = \angle KEA = 45^\circ$  (ש"ל ז"ל) (ש"ל ז"ל) (ש"ל ז"ל)

ג. (1)  $\angle APC = 90^\circ$  (ש"ל ז"ל)  $\implies \angle AKC = 90^\circ - \alpha$  (הי"ש -  $180^\circ$  בש"ל)  $\implies \angle CKE = 45^\circ + \alpha$  (ש"ל ז"ל) (ש"ל ז"ל)

$\implies \angle CEK = 90^\circ - \alpha$  (הי"ש -  $180^\circ$  בש"ל)  $\implies \angle CKE = 45^\circ + \alpha$ ,  $\angle CEK = 90^\circ - \alpha$ ,  $\angle KCE = 45^\circ$

לפיכך:  $\boxed{\angle CKE = 45^\circ + \alpha, \angle CEK = 90^\circ - \alpha, \angle KCE = 45^\circ}$





(2) גובה הסינוס ג' שולש :CKE

$$\frac{KE}{\sin 45^\circ} = 2R, \quad \frac{CE}{\sin(45^\circ + \alpha)} = 2R, \quad \frac{CK}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R$$

$KE = \sqrt{2}R, \quad CE = 2R \sin(45^\circ + \alpha)$   
 $CK = 2R \cos \alpha$

: (2ב)

ד. נתון ג' שולש :BCE

$\angle B = 90^\circ$  (5/1) ג' שולש ישרי  
 $\angle BCE = 45^\circ - \alpha$  (1.2) ג' שולש ישרי  
 ג' שולש ישרי

$$\frac{EB}{CE} = \sin(45^\circ - \alpha)$$

$$EB = 2R \sin(45^\circ + \alpha) \cdot \sin(45^\circ - \alpha)$$

$$\frac{AE}{KE} = \sin 45^\circ$$

$$AE = R$$

ג' שולש ישרי :AEK

$\frac{EB}{AE} = 2 \sin(45^\circ + \alpha) \cdot \sin(45^\circ - \alpha)$



$$\frac{EB}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

⇓

3. נתון:

$$2 \sin(45^\circ + \alpha) \cdot \sin(45^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

⇓

פ. 2:  $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$

$$2 \sin(45^\circ + \alpha) \cdot \cos(45^\circ + \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

⇓

3/1:  $\sin(2\alpha) = \cos(90^\circ - 2\alpha)$

$$\sin(90^\circ + 2\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

⇓

$$90^\circ + 2\alpha = 135^\circ + 360^\circ k \quad \text{או} \quad 90^\circ + 2\alpha = 45^\circ + 360^\circ k$$

⇓

$$\boxed{\alpha = 22.5^\circ}$$

$$\alpha = -22.5^\circ + 180^\circ k$$

⇓

אם  $\alpha < 0$ .

$$\boxed{\alpha = 22.5^\circ}$$

אם  $\alpha > 0$ .



6. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ ,  $a > 0$  הוא פרמטר.

הבע את תשובותיך באמצעות  $a$ , אם יש צורך.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. הוכח כי הפונקציה  $f(x)$  היא זוגית.
- ג. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).  
(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים (אם יש כאלה).  
(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.  
(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

נתונה הפונקציה  $(f(x))^2$  שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

ד. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $(f(x))^2$ , וקבע את סוגן.

נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$ . תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$  זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

ה. הסתמך על הסעיפים הקודמים וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

הצב:  $a = 2$ .

ו. חשב את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקציה  $g(x)$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים  $x = 3$  ו- $x = 4$ .

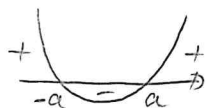
ל נצטרך שבין השנים יהיה תיובי:

$$x^2 - a^2 > 0$$

$$x^2 - a^2 = 0 \quad \text{גורמים:}$$

$$x^2 = a^2$$

$$x = \pm a$$



$$\boxed{x < -a \quad \vee \quad x > a}$$

$$f(f(x)) = \frac{(f(x))^2}{\sqrt{(f(x))^2 - a^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = f(x)$$

$$f(-x) = f(x) \quad \text{כי } f(x) = f(x)$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

(כאן) (כאן)  $\frac{0}{0}$  בגיה חלקן אין תיאור ע"א

ל (1) תיאור ע"א  $x$ :

$$\boxed{\text{אם } x \neq 0 \text{ אין תיאור ע"א הציורים}}$$

תיאור ע"א  $y$ :  $x \neq 0$



$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} \approx \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} = \frac{x^2}{|x|}$$

(2) אוקייג' :

$$\begin{aligned} x \rightarrow \infty &= \frac{x^2}{x} = x = \infty \\ x \rightarrow -\infty &= \frac{x^2}{-x} = -x = -(-\infty) = \infty \end{aligned}$$

אין אוקייג'ן

אין פונקציה :  $\int_{x=-a}^{x=a}$  ערכים אולי נאמסים אר האנוני האנוני

$$u = x^2 \quad u' = 2x \quad (3) \text{ ע}$$

$$v = \sqrt{x^2 - a^2} \quad v' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - a^2}}}{x^2 - a^2} = \frac{2x(x^2 - a^2) - x^3}{\frac{x^2 - a^2}{1}} = \frac{x^3 - 2a^2x}{(x^2 - a^2)\sqrt{x^2 - a^2}}$$

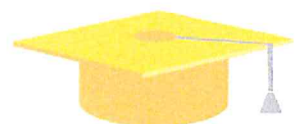
$$f'(x) = \frac{x(x^2 - 2a^2)}{(x^2 - a^2)\sqrt{x^2 - a^2}} = 0 \rightarrow x = 0 \text{ (נסו)}$$

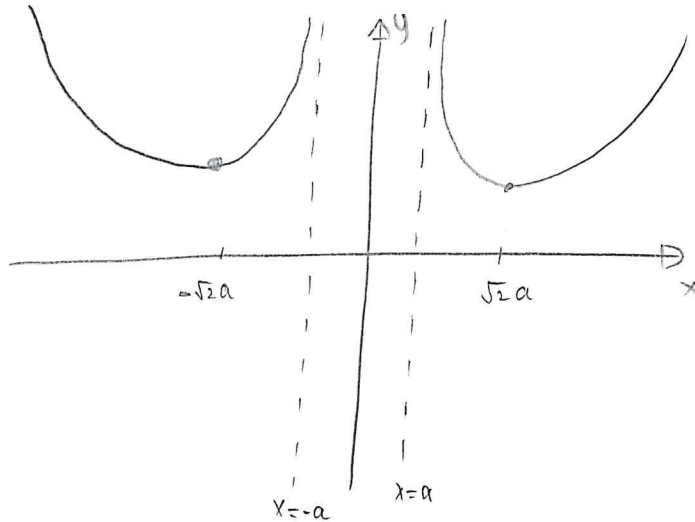
$$x = \pm \sqrt{2}a$$

$x$	$x < -1.5a$	$x < -\sqrt{2}a$	$-1.1a < x < -a$			$a < x < 1.1a$	$\sqrt{2}a < x$	$x < 1.5a$
$f'(x)$	-	0	+			-	0	+
$f(x)$	↘	min	↗			↘	min	↗

min  $(\sqrt{2}a, 2a)$     min  $(-\sqrt{2}a, 2a)$

$$f(\pm\sqrt{2}a) = \frac{2a^2}{\sqrt{2a^2 - a^2}} = \frac{2a^2}{a} = 2a$$





ג (4)

$$h(x) = (f(x))^2$$

$$h'(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) = 0$$

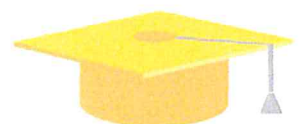
$$\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ \text{נכס} \\ f(x) \text{ חיובי} \end{array} \quad \begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ x = \pm \sqrt{2}a \end{array}$$

3

שים לב!  $f(x)$  חיובי, בתה, נגן סרטיק  $f'(x)$  !  $h(x)$  לאחר!  
כעטג סימן ציה, חכן אחמי ערה וירוכה של  $f(x)$  !  $h(x)$  ציה.  
נוגע שנקודו - נקובין גכונ  $h(x)$  הן כן כן חומ.

$$h(\pm\sqrt{2}a) = (f(\pm\sqrt{2}a))^2 = (2a)^2 = 4a^2$$

(חומ  $(\sqrt{2}a, 4a^2)$ )  
(חומ  $(-\sqrt{2}a, 4a^2)$ )



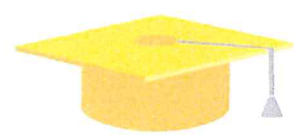
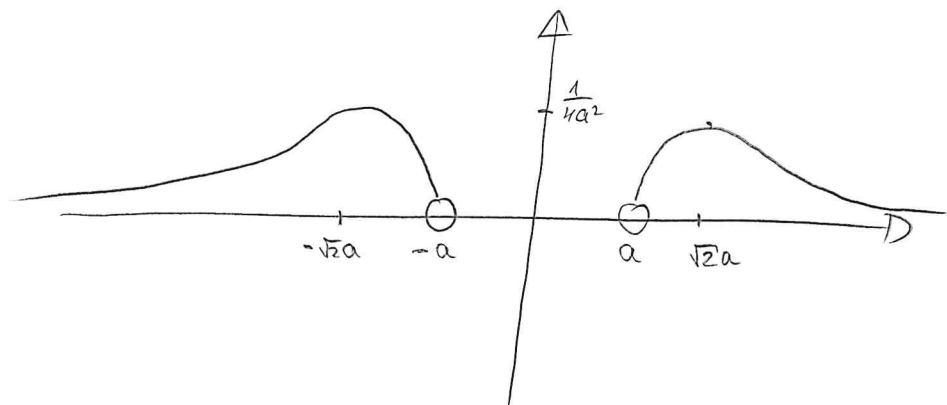
$$g(x) = \frac{1}{(f(x))^2} = \frac{1}{h(x)}$$

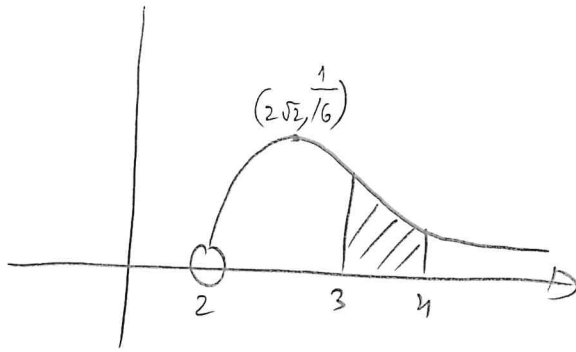
כיצוד, כאשר מקצעים טרנספורמציה מהסוג  $h(x)$ , כל גרף של  $g(x)$  הוא הפוך של  $h(x)$  (הפוך של  $h(x)$  הוא  $1/h(x)$ ).  
הסיבה היא שאם נגזור את  $g(x)$  נקבל:

$$g'(x) = -\frac{h'(x)}{(h(x))^2}$$

הסיבות של הכוון  $h(x)$  צומה עשויים של הכוון  $f(x)$ .  
(הן לא מתכווים, אך הסקינג צומה).

יש ציורים  $h(x)$  ו- $g(x)$  שגור ה- $y$  יתכנס לאנס  $(\frac{1}{\infty} = 0^+)$   
 $h(a^+) = h(a^-) = h(\infty) = h(-\infty) = \infty$



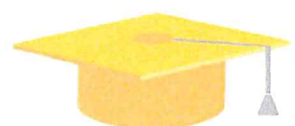


נתון;  
 $a=2$  |

$$\int_3^4 g(x) dx = \int_3^4 \frac{x^2 - x}{x^4} dx = \int_3^4 \left( \frac{x^2}{x^4} - \frac{x}{x^4} \right) dx = \int_3^4 (x^{-2} - x^{-4}) dx$$

$$= \left[ \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{4x^{-3}}{-3} \right]_3^4 = \left[ \frac{4}{3x^3} - \frac{1}{x} \right]_3^4 = \left( \frac{4}{3 \cdot 4^3} - \frac{1}{4} \right) - \left( \frac{4}{3 \cdot 3^3} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{71}{1,296}$$



7. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} + 3$ .

ענה על הסעיפים שלפניך בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

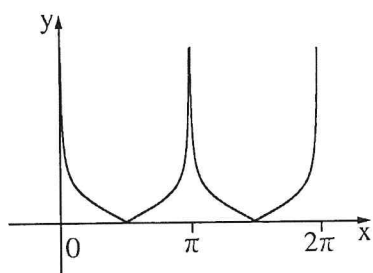
(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

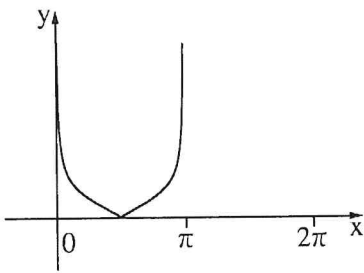
נתונות שתי פונקציות:  $k(x) = f(x) - 3$ ,  $g(x) = \sqrt{f(x) - 3}$ .

ג. אחד מן הגרפים א-ד שלפניך מתאר את הפונקציה  $k(x)$ , ואחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה  $g(x)$ .

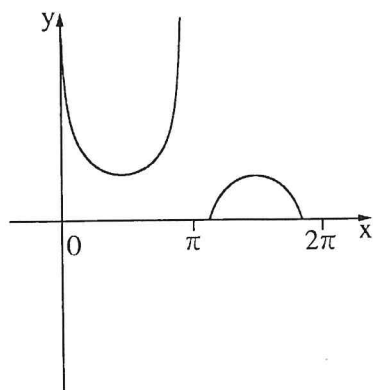
קבע איזה מן הגרפים מתאר כל אחת מן הפונקציות, ונמק את קביעותיך.



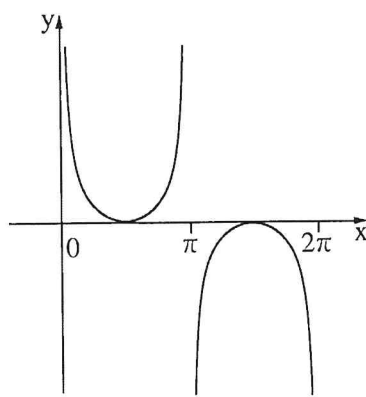
גרף ב



גרף א



גרף ד



גרף ג





7  
(1)  $\sin x = 0$  פתור את המשוואה  
בתחום המאפשר את המציאה:

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi k$$

$$k=0: x=0$$

$$k=1: x=\pi$$

$$k=2: x=2\pi$$

תחום הפתור:  $0 < x < 2\pi, x \neq \pi$

(2)  $x=0$   
 $x=\pi$   
 $x=2\pi$   
גאומטריה של המעגל (ראו) וכן:

אלו הנקודות:  $|x=0| |x=\pi| |x=2\pi|$   
או אופקיות:  $\sin x = 0$  (הכיוון של התחום סגור)

(3)

$$f'(x) = \frac{-2 \cos x \sin^2 x - \cos^3 x}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{-\cos x (2 \sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$



$$-\cos x (2\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$2\sin^2 x + 1 - \sin^2 x = 0$$

$$\sin^2 x + 1 = 0$$

תנקה בלתי קיימת  
אין פתרון, אלא נוסף פתרון  
זו אהרן פתורם לא נקרא 0.

$$k=0: |x = \frac{\pi}{2}|$$

$$k=1: |x = 1.5\pi|$$

x	0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$\pi$	$\pi < x < 1.5\pi$	$1.5\pi$	$1.5\pi < x < 2\pi$	$2\pi$
$f'(x)$		-		+		+		-	
$f(x)$		↘		↗		↗		↘	

$$f'(\frac{\pi}{4}) = - \quad f'(\frac{3\pi}{4}) = + \quad f'(1.25\pi) = + \quad f'(1.75\pi) = -$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ נק}$$

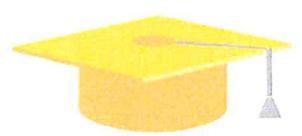
$$1.5\pi < x < 2\pi \text{ : נק}$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ נק}$$

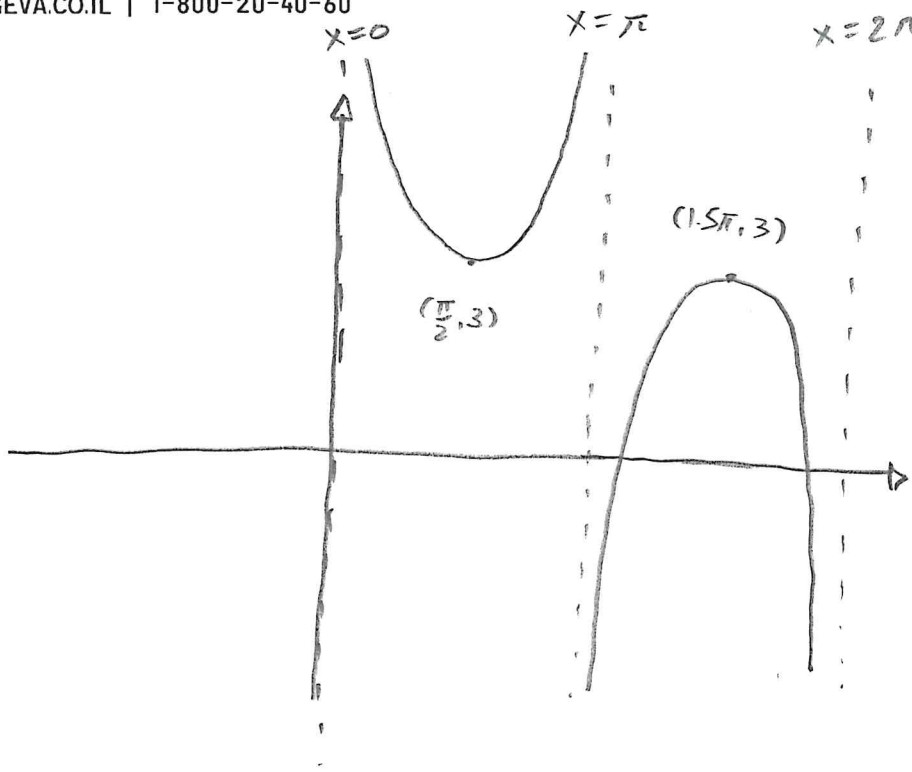
$$\pi < x < 1.5\pi \text{ : נק}$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2})} + 3 = 3 \quad (\frac{\pi}{2}, 3) \text{ min}$$

$$f(1.5\pi) = \frac{\cos^2(1.5\pi)}{\sin(1.5\pi)} + 3 = 3 \quad (1.5\pi, 3) \text{ max}$$



ב.



ג.

$\alpha(x)$  היא הנסגה אנלית של  $f(x)$   
ב-3 יחידות לפני מסה, ולכן רק  $\epsilon$  אסמני

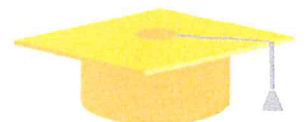
$$\left| \alpha(x) - \frac{\delta}{\epsilon} \right|$$

תגום ההכרזה של  $g(x)$  הוא  $\alpha(x) \geq 0$   
לפי זה  $\epsilon$  אסמני  $\alpha(x) \geq 0$  עבור:  $|0 < x < \pi, x = 1.5\pi|$   
ולכן רק  $\epsilon$  אסמני  $\epsilon$   $g(x)$ .

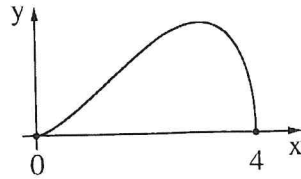
$$\left| g(x) - \frac{\delta}{\epsilon} \right|$$

\* הערה: ופנה אמת בשאלה צריכה לומר אבוליות

(קוצה (ס,  $1.5\pi$ )  $\epsilon$  האול של  $g(x)$ .



8. בסרטוט שלפניך מוצגת הפונקציה  $f(x) = \sqrt{a \cdot x^4 + b \cdot x^3}$ . נתון שתחום ההגדרה של הפונקציה הוא  $0 \leq x \leq 4$ .



א. (1) הוכח כי  $b = -4 \cdot a$ .

(2) לפניך שתי טענות I-II. רק אחת מהן נכונה. קבע מהי הטענה הנכונה, ונמק את קביעתך.

I.  $a > 0, b < 0$

II.  $a < 0, b > 0$

הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה  $(f(x))^2$  המוגדרת גם היא בתחום  $0 \leq x \leq 4$ . מנקודה P מעבירים ישר המאונך לציר ה-x. M היא נקודת החיתוך של האנך עם ציר ה-x, ו-O היא ראשית הצירים.

ג. מהו שיעור ה-x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמק את תשובתך.

ג. בעבור שיעור ה-x שמצאת בסעיף ב, בטא באמצעות a את השטח המקסימלי של המשולש PMO.

ד. אם ידוע כי שיעור ה-x של הנקודה P נמצא בתחום שבו הפונקציה  $(f(x))^2$  אינה יורדת, מהו שיעור ה-x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמק את תשובתך.

א. (1) ניגן שראוי בסיסם סימקוני (4,0) לקיים את הכוון.

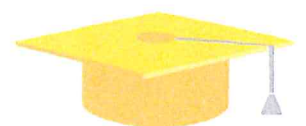
$$0 = \sqrt{a \cdot 4^4 + b \cdot 4^3} \rightarrow 0 = a \cdot 4^4 + b \cdot 4^3 \quad | :4^3 \rightarrow a \cdot 4 + b = 0$$

$$\boxed{b = -4a}$$

א. (2) ניגן זרואו ע"ג גיה שגור ערכי x בין 0 ו-4 עינן השוש חילוי. נציג  $x=1$  ונזרוא אנזאג חיוג:

$$a \cdot 1^4 + b \cdot 1^3 > 0 \rightarrow a + b > 0 \rightarrow a - 4a > 0 \rightarrow -3a > 0 \rightarrow a < 0$$

הצעני הנכונה היא טענה II

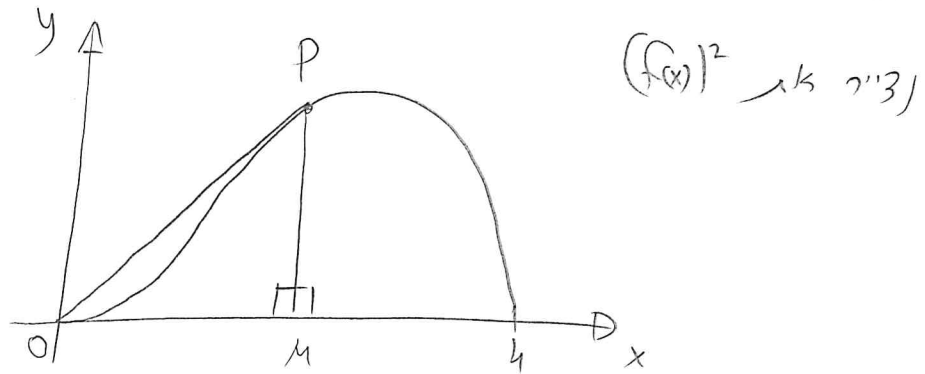


2 הסקיצה של  $(f(x))^2$  והסקיצה של  $f(x)$  הן סקיצות נורמליות.  
הסבר עשיתי הנה:

$$g(x) = (f(x))^2$$

$$g'(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$$

מאחר!  $f(x)$  אי שווה בגובה, סימני  $f'(x)$ ! ואם  $f(x) > 0$ ,  
למעשה גומות עזיה ויחידה של  $f(x)$ ! ואם  $f(x) < 0$ .



נראה כי נקודת קיצון  $P$  כן:  $(t, at^4 - 4at^3)$   
כעת נקני כונן סגור את  $\Delta p_{max}$ , ונחפש את המקס המוחלט

$$S(t) = \frac{t(at^4 - 4at^3)}{2} = \frac{at^5 - 4at^4}{2} = \frac{at^4(t-4)}{2}$$

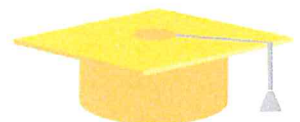
$$S'(t) = \frac{5at^4 - 16at^3}{2} = 0 \rightarrow \frac{at^3(5t-16)}{2} = 0 \rightarrow \begin{matrix} t=0 \\ \text{נקט} \end{matrix} \quad t = \frac{16}{5} = 3.2$$

$$S''(t) = \frac{20at^3 - 48at^2}{2} = 10at^3 - 24at^2 = 2at^2(5t-12)$$

$$S''(3.2) = 81.92a = (-) \rightarrow \max$$

עברך  $x=3.2$  שטע  $\Delta p_{max}$  נקט מ'.

t	0	0 < t < 3.2	3.2 < t < 4	4
S'(t)		+	0	-
S(t)		↗	$\frac{1}{9}a$	↘



$$S(3.2) = -41.94a$$

השטח המקס' הוא  $-41.94a$  c

$$g(x) = (f(x))^2 = ax^4 - 4ax^3$$

$$g'(x) = 4ax^3 - 12ax^2$$

$$g'(x) = 4ax^2(x-3)$$

$$x=0 \quad x=3$$

x	0	0 < x < 3	3 < x < 4	4
g'(x)		+	0	-
g(x)		↗	↘	

הגתויים שבו הכונן  $(f(x))^2$  אינו יורדג (וא)  $0 \leq x \leq 3$   
 כונן השטח  $S(t)$  שזכנו בסוף ג' עולה בגתויים  $0 < t \leq 3.2$ ,  
 חכן המקס הגתויים יגקבו ?  $x=3$

למידע ענ פסיכומטרי  
 ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**

