יואל גבע
לא מתפשרים.

# שאלון 35571 מועד
# קיץ ב׳ תשפ״א

**מורים יקרים,**
**החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי התוכנית החדשה במתמטיקה.**
**להלן השינויים:**
**שאלון 182 (801) שונה ל- 172**
**שאלון 381 (802) שונה ל- 371**
**שאלון 382 (803) שונה ל- 372**
**שאלון 481 (804) שונה ל- 471**
**שאלון 482 (805) שונה ל- 472**
**שאלון 581 (806) שונה ל- 571**
**שאלון 582 (807) שונה ל- 572**

**בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35571 מועד קיץ ב׳ תשפ״א.**

**תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.**

**הקדמה**

**נשים לב, שמכיוון ש-** $f(x)$ **היא פונקציה אי-זוגית, הרי שהיא סימטרית לראשית הצירים,**

**ולכן שני השטחים שבין הפונקציה לציר ה-**$x$ **שווים בגודלם,**

**אולם כיוון שאחד מעל הציר, והשני מתחתיו, הרי שאחד "חיובי" ואחד "שלילי" וסכומם** $0$ **.**

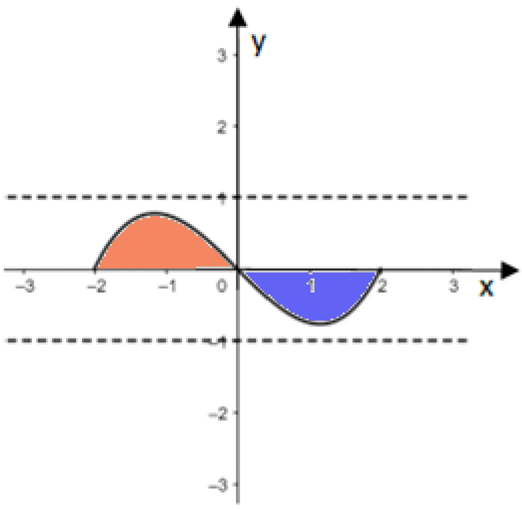
**ובצורה דומה, כל אינטגרל מסוים, בגבולות מנוגדים, יהייה שווה ל-** $0$ **.**

**(1) נבדוק את הטענה** $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 0.5\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ **.**

**אגף שמאל -** $\int_{0}^{2} f(x)\,dx < 0$ **, כי השטח המתאים מתחת לציר ה-** $x$ **והוא "שלילי".**

**אגף ימין -** $0.5\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0$ **, עקב אי-זוגיות הפונקציה, והערכים המנוגדים על הצירים.**

**תשובה: הטענה אינה נכונה, למעשה** $\int_{0}^{2} f(x)\,dx < 0.5\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ **.**



**(2) נבדוק את הטענה** $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx > \int_{0}^{2} [f(x)]^2\,dx$ .

**אגף שמאל -** $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx > 0$ **, כי השטח המתאים מעל לציר ה-** $x$ **והוא "חיובי".**

**אגף ימין -** $\int_{0}^{2} [f(x)]^2\,dx > 0$ **, כי לאחר ההעלה בחזקה זוגית, השטח מעל ציר ה- והוא "חיובי".**

**הפונקציה** $g(x) = (f(x))^2$ **, בתחום** $0 < x < 2$ **חיובית אף היא,**

**כאשר, בתחום זה מתקיים,** $g(x) < f(-x)$ **עקב העלאה בריבוע של מספרים שבין** $0$ **ל-** $1$**,**

**לפי הכלל שבו ככל שמעלים מספר שכזה בחזקה טבעית גבוהה יותר, אז התוצאה קטנה יותר .**

**לכן:** $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx > \int_{0}^{2} [f(x)]^2\,dx$ **, והטענה נכונה.**

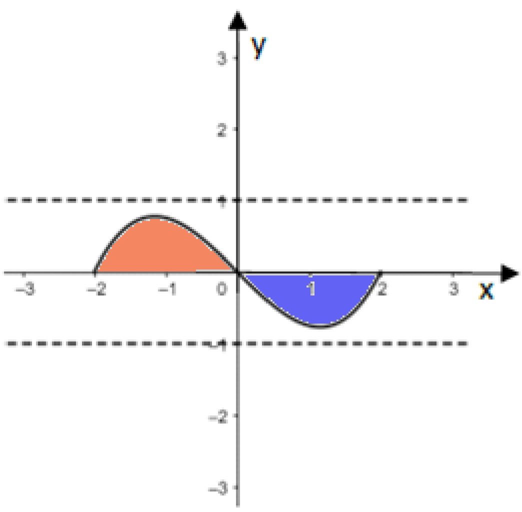
<u>**הסבר משלים – מעבר לנדרש בבגרות**</u>

**מובן שעקב אי-הזוגיות של הפונקציה, מתקיים** $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} (-f(x))\,dx$ ,

**וניתן לראות את הטרנספורמציה של** $(f(x))^2$ **כשני שלבים:**

**סיבוב סביב ציר ה-** $x$ **, ולאחר מכן העלאה בחזקה** $2$ .

**תשובה: הטענה נכונה,** $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx > \int_{0}^{2} [f(x)]^2\,dx$



# 1ב

**(1) תזכורת: יש שלוש אפשרויות להוכחת אי-תלות בין שני מאורעות.**

$$P(A/B)=P(A/\bar{B})$$

$$P(A/B)=P(A)$$

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

**ניתן לראות, בעזרת המשוואה השלישית, שיש כאן תלות,**

**כי** $P(A\cap B)=2a^2\neq P(A)\cdot P(B)=2a^2-\frac{1}{8}$

**תשובה: המאורעות** $A$ **ו-** $B$ **תלויים זה בזה.**

**(2) נתון:** $P(A\cap B)=5P(\bar{A}\cap\bar{B})$ **.**

$$P(\bar{A})=1-a$$

$$P(\bar{A}\cap B)=2a-(2a^2-\frac{1}{8})=2a-2a^2+0.125$$

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-a-(2a-2a^2+0.125)=2a^2-3a+0.875$$

| | $A$ | $\bar{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | $2a^2-\frac{1}{8}$ | $2a-2a^2+0.125$ | $2a$ |
| $\bar{B}$ | | $2a^2-3a+0.875$ | |
| | $a$ | $1-a$ | $1$ |

**נציב במשוואה:** $P(A\cap B)=5P(\bar{A}\cap\bar{B})$

$$2a^2-\frac{1}{8}=5\cdot(2a^2-3a+0.875)$$

$$2a^2-0.125=10a^2-15a+4.375$$

$$0=8a^2-15a+4.5$$

$$-8a=-10$$

$$a=\cancel{1.5}\quad\leftarrow 0<a<1$$

$$\boxed{a=0.375}$$

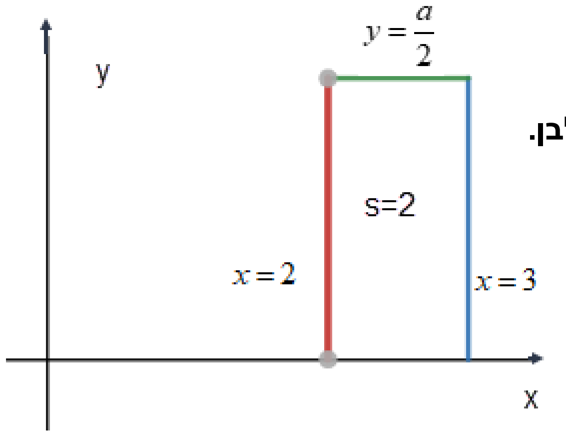
**תשובה:** $a=0.375$ **.**

**א. נתונה הפונקציה** $f(x)=\frac{ax^2+10x-12}{2x^2-10x+12}$ **(** $a>0$ **הוא פרמטר) .**

**נמצא את תחום ההגדרה:**

$2x^2-10x+12\neq 0$

$\boxed{x\neq 2\,,\,x\neq 3}$




**נתון שהאסימפטוטות המאונכות לצירים, וציר ה-** $x$ **יוצרות מלבן.**

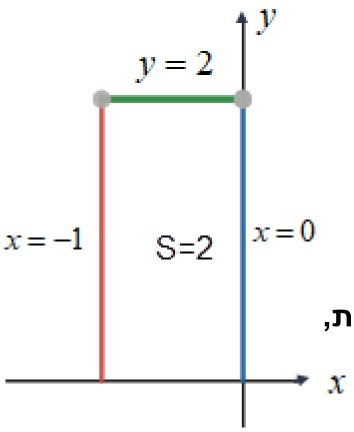
**כיוון שיש רק אסימפטוטה אופקית אחת,** $y=\frac{a}{2}$ ,

**הרי שיש שתי אסימפטוטות אנכיות, והן** $x=2$ **ו-** $x=3$ .

**שטח המלבן, הנוצר, הוא** $(\frac{a}{2}-0)\cdot(3-2)=\frac{a}{2}$ .

**נתון ששטח המלבן הוא** $2$ **, ולכן** $\frac{a}{2}=2 \quad \rightarrow \boxed{a=4}$ .

**תשובה:** $a=4$ .




**ב. נתון ש-** $g(x)=f(x+3)$ **שהיא הזזה** $3$ **יחידות שמאלה של** $f(x)$ .

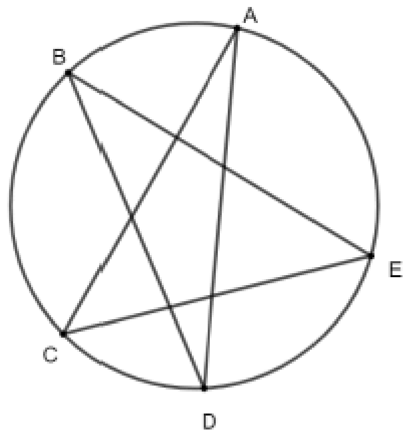
**האסימפטוטות האנכיות משתנות, והן** $x=-1$ **ו-** $x=0$ **(ציר ה-** $y$ **),**

**כאשר האסימפטוטה האופקית נותרת ללא שינוי, והיא** $y=2$ .

**בכל מקרה, גם השטח הנוצר על ידי האסימפטוטות וציר ה-** $x$ **זז שמאלה** $3$ **יחידות,**

**כאשר גודלו אינו משתנה.**

**תשובה: שטח המלבן הוא** $2$ **יח"ר.**




**זווית היקפית במעגל שווה למחצית הקשת הנשענת עליה.**

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D + \sphericalangle E = \frac{CD}{2} + \frac{DE}{2} + \frac{EA}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2}$$

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D + \sphericalangle E = \frac{CD + DE + EA + AB + BC}{2}$$

**זווית עגולה שווה** $360°$ .

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D + \sphericalangle E = \frac{360°}{2} = 180°$$

**תשובה: הוכחנו ש-** $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D + \sphericalangle E = 180°$ .

בגרות פא יולי 21 מועד קיץ ב שאלון 35571

**א. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית (לא נאמר שמתכנסת !!!), שאיבריה ... $a_1, a_2, a_3, ...$ והמנה שלה היא $q$ .**

**נביע באמצעות $a_1$ ו- $q$ את ערכי הסכומים המבוקשים, שהפרטים עליהם בטבלה שלפנינו.**

| | כל הסדרה | $a_2, a_4, a_6, ...a_{40}$ | $a_4, a_8, a_{12}, ...a_{40}$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | $a_1$ | $a_2 = a_1 q$ | $a_4 = a_1 q^3$ |
| Q | $q$ | $\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_n q^2}{a_n} = q^2$ | $\frac{a_{n+4}}{a_n} = \frac{a_n q^4}{a_n} = q^4$ |
| N | $\infty$ | 20 | 10 |
| $S_n$ | | $A = \frac{a_1 q\left[(q^2)^{20} - 1\right]}{q^2 - 1} = \frac{a_1 q(q^{40} - 1)}{q^2 - 1}$ | $B = \frac{a_1 q^3\left[(q^4)^{10} - 1\right]}{q^4 - 1} = \frac{a_1 q^3(q^{40} - 1)}{q^4 - 1}$ |

**תשובה:** $A = \frac{a_1 q(q^{40} - 1)}{q^2 - 1}$ **,** $B = \frac{a_1 q^3(q^{40} - 1)}{q^4 - 1}$ **.**

**ב. נתון כי $a_n$ היא סדרה עולה, וכי $\frac{A}{B} = \frac{10}{9}$ .**

**נחשב את המנה, על ידי כפל בהופכי.**

$$\frac{A}{B} = \frac{10}{9}$$

$$\frac{\cancel{a_1} q \cancel{(q^{40} - 1)}}{q^2 - 1} \cdot \frac{q^4 - 1}{\cancel{a_1} q^3 \cancel{(q^{40} - 1)}} = \frac{10}{9}$$

$$\frac{(q^2 + 1)\cancel{(q^2 - 1)}}{q^2 \cancel{(q^2 - 1)}} = \frac{10}{9}$$

$$9q^2 + 9 = 10q^2$$

$$9 = q^2$$

$$\boxed{q = 3} \quad o.k.$$

$$\cancel{q = -3}$$

**מכאן שהמנה היא $q = 3$ , ומכיוון שהסדרה $a_n$ עולה – ולכן כל איבריה חיוביים !!!.**

**הפתרון השני נפסל, כי אם המנה שלילית –**

**מקבלים איבר חיובי ואיבר שלילי לסירוגין, והסדרה לא עולה ולא יורדת.**

**תשובה:** $q = 3$ .

**ג. נתון כי $b_n$ סדרה הנדסית אין-סופית (לא נתון שהיא מתכנסת !!!), כאשר $b_n = 3 \cdot a_{n+1}$ לכל $n$ טבעי.**

**כיוון שנתון ש- $b_n$ סדרה הנדסית, ניתן לחשב את מנתה על-ידי $\frac{b_2}{b_1}$ ,**

**אבל נחשב בדרך הרגילה לצורכי הלימוד.**

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3 \cdot a_{n+2}}{3 \cdot a_{n+1}}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q_a$$

$$\boxed{\frac{b_{n+1}}{b_n} = 3}$$

**תשובה: מנת הסדרה $b_n$ היא $3$ .**

**ד. בונים סדרה הנדסית אין-סופית חדשה, נסמנה $c_n$ (לא נתון שהיא מתכנסת !!!), $-\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, -\frac{1}{b_3}, \frac{1}{b_4}, \ldots$ .**

**כיוון שנתון ש- $c_n$ סדרה הנדסית, ניתן לחשב את מנתה על-ידי $\frac{c_2}{c_1}$ ,**

**אבל נחשב בדרך הרגילה לצורכי הלימוד.**

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = -\frac{\frac{1}{b_n}}{\frac{1}{b_n}}$$ **(סימן המינוס נקבע כי שני איברים עוקבים, בסדרה זו, שונים בסימנם)**

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = -\frac{\frac{1}{b_{n+1}}}{\frac{1}{b_n}}$$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = -\frac{b_n}{b_{n+1}} = -\frac{1}{q_b}$$

$$\boxed{\frac{c_{n+1}}{c_n} = -\frac{1}{3}}$$

**מכאן שזו סדרה הנדסית מתכנסת, כי $1 < q_c < 0$ , כאשר איבריה חיובים ושלילים לסירוגין.**

| | כל הסדרה |
|---|---|
| $A_1$ | $c_1 = -\frac{1}{b_1} = -\frac{1}{3\cdot a_2} = -\frac{1}{3\cdot a_1\cdot 3} = -\frac{1}{9a_1}$ |
| Q | $-\frac{1}{3}$ |
| N | $\infty$ |
| S | $S = \frac{c_1}{1-q_c} = \frac{-\frac{1}{9a_1}}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{-\frac{1}{9a_1}}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4\cdot 9a_1} = -\frac{1}{12a_1}$ |

**תשובה: הסכום של כל איברי הסדרה החדשה הוא** $(-\frac{1}{12a_1})$ .



**ה. נתונה הסדרה, נסמנה** $e_n$ , $\frac{1}{a_1}, a_1, b_1$ .

**(1) אם הסדרה חשבונית, אז** $2e_2 = e_1 + e_3$

$$2e_2 = e_1 + e_3$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 = \frac{1}{a_1} + b_1$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 = \frac{1}{a_1} + 3a_2$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 = \frac{1}{a_1} + 9a_1$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{a_1} + 7a_1$$

**אבל כל איברי הסדרה** $a_n$ **חיוביים,**

**ולכן אגף ימין חיובי ואין פתרון.**

**תשובה: לא, סדרה זו אינה חשבונית.**

**(2) אם הסדרה הנדסית, אז** $e_2{}^2 = e_1\cdot e_3$

$$e_2{}^2 = e_1\cdot e_3$$

$$\Leftrightarrow a_1{}^2 = \frac{1}{a_1}\cdot b_1$$

$$\Leftrightarrow a_1{}^2 = \frac{1}{a_1}\cdot 3a_2$$

$$\Leftrightarrow a_1{}^2 = \frac{1}{a_1}\cdot 9a_1$$

$$\Leftrightarrow a_1{}^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = 3} \quad \leftarrow a_n > 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} e_1 = \frac{1}{3}, e_2 = 3, e_3 = 27 \\ q_e = 9 \end{array}}$$

**תשובה: כן, סדרה זו הנדסית.**

**א.** $28\%$ **מן המשתתפים בתחרות הצליחו לעבור את שני המכשולים הראשונים.**

**ההסתברות שמשתתף שעבר את שני המכשולים הראשונים יודח מן התחרות,**

**גדולה פי** $3$ **מן ההסתברות שהוא יעלה לשלב חצי הגמר, כלומר ביחס של** $3:1$ ,

**ולכן ההסתברות שלא יעבור את המכשול השלישי בהצלחה (ויודח)היא** $0.75 = \frac{3}{4}$ ,

**וההסתברות שיעבור את המכשול השלישי בהצלחה (ויעלה) היא** $0.25 = \frac{1}{4}$.

**בהתאם, הסתברות שיעבור את שלושת המכשולים, בדרך לחצי הגמר, היא** $0.28 \cdot 0.25 = 0.07$ .

**תשובה: ההסתברות שמשתתף בתחרות יעלה לשלב חצי הגמר, היא** $0.07$ .

**ב. נתון: ההסתברות שמשתתף יצליח לעבור את המכשול הראשון <u>ולא</u> יעבור את המכשול השני היא** $0.42$ .

**על פי א: ההסתברות שמשתתף יצליח לעבור את המכשול הראשון <u>וגם</u> את המכשול השני היא** $0.28$ .

**לכן, ההסתברות שמשתתף <u>יעבור</u> את המכשול הראשון בהצלחה היא** $0.42 + 0.28 = 0.7$ ,

**וההסתברות ש<u>לא</u> <u>יעבור</u> את המכשול הראשון היא** $0.3$ .

**הסבר משלים: אם משתתף עובר את המכשול הראשון,**

**אז או שעובר את המכשול השני או שלא עובר את המכשול השני,**

**לכן סכום ההסתברויות לשתי האפשרויות שווה להסתברות שיעבור את המכשול הראשון.**

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$ **, כמו בטור בטבלה דו-ממדית.**

**תשובה: ההסתברות שמשתתף בתחרות <u>לא</u> יצליח לעבור את המכשול הראשון היא** $0.3$ .

**ג. בחרו באקראי שלושה משתתפים: עומר, גל וליאור.**

**<u>ידוע</u> ששלושתם הצליחו לעבור את המכשול הראשון.**

**(1) נחשב את ההסתברות שבדיוק שניים מהם יעלו לשלב חצי הגמר.**

**ההסתברות שמשתתף כלשהו יעלה לחצי הגמר, אם עבר את השלב הראשון, היא** $0.1 = \frac{0.07}{0.7}$ .

**זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי** $n = 3$ , $p = 0.1$ **,** $k = 2$**.**

**נחשב באמצעות נוסחת ברנולי:**

$$P_3(2) = \binom{3}{2} \cdot 0.1^2 \cdot (1-0.1)^{3-2} = 3 \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^1 = 0.027$$

**תשובה: ההסתברות, שבדיוק שניים מהם יעלו לשלב חצי הגמר, היא** $0.027$ **.**

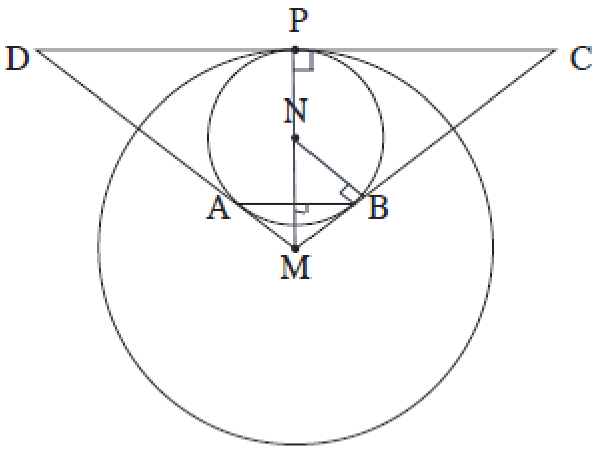
**(2) נחשב את ההסתברות שבין השלושה, רק עומר וגל יעלו לשלב חצי הגמר.**

**בתת סעיף ג(1) מצאנו כי בדיוק** $\binom{3}{2} = 3$ **אפשרויות שבדיוק שניים יעלו לחצי הגמר.**

**בדיוק אחת מהאפשרויות, שוות ההסתברות, היא שיהיו אלו עומר וגל,**

**ולכן ההסתברות היא** $0.027 : 3 = 0.009$ **.**

**תשובה: ההסתברות, שמבין השלושה רק עומר וגל יעלו לשלב חצי הגמר, היא** $0.009$ **.**




**נתונים**

**1.** **שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה** $P$ .

**2.** $M$ **מרכז מעגל גדול . 3.** $N$ **מרכז מעגל קטן.**

**4.** $R_1$ **רדיוס מעגל** $M$ **.5** $R_2$ **רדיוס מעגל** $N$ **.6** $R_2 < R_1$

**7.** $CPD$ **משיק למעגל** $M$ **בנקודה** $P$.

**8.** $CPD$ **משיק למעגל** $N$ **בנקודה** $P$.

**9.** $MBC$ **משיק למעגל** $N$ **בנקודה** $B$.

**10.** $MAD$ **משיק למעגל** $N$ **בנקודה** $A$.

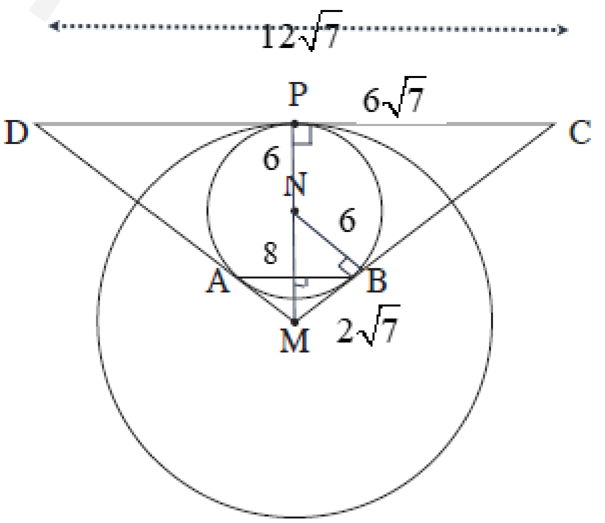
**עבור ד. 11.** $\frac{R_1}{R_2}=\frac{7}{3}$ **.12** $MN = 8$ .

**צ"ל: א.** $AB \perp MN$ **ב.** $AB \parallel DC$ **ג.** $MB \cdot MC = MN \cdot \frac{DC}{2}$

**ד. (1)** $R_2 , R_1$ **(2)** $DC$ .

| הסבר | מס' | טענה | נימוק |
|---|---|---|---|
| 9, 10 | 13 | $MA = MB$ | אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל אז הם שווים זה לזה |
| 9, 10 | 14 | $\sphericalangle AMN = \sphericalangle BMN$ | אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל אז הישר ממנה למרכז המעגל חוצה הזווית שבין המשיקים |
| 13, 14 | 15 | $AB \perp MN$ | חוצה זווית הראש במש"ש $\Delta AMB$ מתלכד עם הגובה לבסיס |
| **מ.ש.ל. א** | | | |
| 1-4, 7-8 | 16 | $MNP$ קו ישר | נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה, נמצאת על קטע המרכזים או על המשכו |
| 7, 16 | 17 | $MNP \perp DC, \sphericalangle CPM = 90°$ | הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה |
| 15, 17 | 18 | $AB \parallel DC$ | 2 ישרים שמאונכים לישר שלישי, מקבילים זה לזה |
| **מ.ש.ל. ב** | | | |
| 3, 9 | 19 | $\sphericalangle MBN = 90°$ | הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה |
| 17, 19 | 20 | $\sphericalangle CPM = \sphericalangle MBN$ (ז) | |
| | 21 | $\sphericalangle CMP = \sphericalangle BMN$ (ז) | זווית משותפת לשני המשולשים |
| 20, 21 | 22 | $\Delta PMC \sim \Delta BMN$ | משפט דמיון זווית זווית |

| הסבר | מס' | טענה | נימוק |
|---|---|---|---|
| 22 | 23 | $\frac{PM}{BM}=\frac{PC}{BN}=\frac{MC}{MN}$ | יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים |
| 23 | 24 | $BN\cdot MC=MN\cdot PC$ | |
| 14, 17 | 25 | $MC=MD$ | אם חוצה זווית מתלכד עם הגובה אז המשולש ש"ש |
| 17, 25 | 26 | $PC=PD=\frac{DC}{2}$ | במש"ש הגובה לבסיס מתלכד עם התיכון לבסיס |
| 24, 26 | 27 | $MB\cdot MC=MN\cdot\frac{DC}{2}$ | |
| **מ.ש.ל. ג** | | | |
| 4-6, 8, 16 | 28 | $R_1-R_2=8$ | |
| 11, 28 | 29 | $3(8+R_2)=7R_2$ | |
| 28, 29 | 30 | $R_2=6 \quad ,R_1=14$ | |
| **מ.ש.ל. ד(1)** | | | |
| 3, 5, 9, 30 | 31 | $NB=6$ | |
| 12, 18, 19 | 32 | $MB=2\sqrt{7}$ | משפט פיתגורס ב- $\Delta MBN$ |
| 23, 31, 32 | 33 | $\frac{PM}{BM}=\frac{PC}{BN} \quad \rightarrow \frac{14}{2\sqrt{7}}=\frac{PC}{6}$ <br> $PC=6\sqrt{7}$ | |
| 26, 33 | 34 | $DC=12\sqrt{7}$ | |
| **מ.ש.ל. ד(2)** | | | |



**א.** $ABCD$ **הוא מלבן, ולכן** $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90^\circ$.

$AE = AK$ **(אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל אז הם שווים זה לזה)**

$\sphericalangle AEK = \sphericalangle AEK = 45^\circ$ (**סכום זוויות ב-** $\Delta AEK$ **שווה ל-** $180^\circ$)

$\sphericalangle KCE = 45^\circ$ **(זווית בין משיק למיתר)**

**תשובה: הוכחנו כי** $\sphericalangle KCE = 45^\circ$ .

**ב. (1)** $\sphericalangle KCD = \alpha$ $(0^\circ < \alpha < 45^\circ)$ , $R$ **רדיוס המעגל.**

$\sphericalangle CKD = 90^\circ - \alpha$ **(סכום זוויות ב-** $\Delta CKD$ **שווה ל-** $180^\circ$)

$\sphericalangle EKC = 45^\circ + \alpha$ (**זווית שטוחה שווה ל-** $180^\circ$)

$\sphericalangle KEC = \sphericalangle CKD = 90^\circ - \alpha$ **(זווית בין משיק למיתר)**

**תשובה:** $\sphericalangle KCE = 45^\circ$ , $\sphericalangle EKC = 45^\circ + \alpha$, $\sphericalangle KEC = 90^\circ - \alpha$.

**(2)** $\underline{\Delta KEC}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{KE}{\sin 45^\circ} = 2R \qquad \frac{EC}{\sin(45^\circ+\alpha)} = 2R \qquad \frac{KC}{\sin(90^\circ-\alpha)} = 2R$$

$$\boxed{KE = R\sqrt{2}} \qquad \boxed{EC = 2R\sin(45^\circ+\alpha)} \qquad \boxed{KC = 2R\cos\alpha}$$

**תשובה:** $KE = R\sqrt{2}$ , $EC = 2R\sin(45^\circ+\alpha)$ , $KC = 2R\cos\alpha$.

**ג. נביע באמצעות** $\alpha$ **את היחס** $\frac{EB}{AE}$.

$AE = AK = R$ **(לפי משפט פיתגורס ב-** $\Delta AKE$**)**

$\sphericalangle BEC = \sphericalangle EKC = 45^\circ + \alpha$ **(זווית בין משיק למיתר)**

$\underline{\Delta BEC}$

$$\cos(45^\circ+\alpha) = \frac{EB}{EC}$$

$$2R\sin(45^\circ+\alpha)\cos(45^\circ+\alpha) = EB$$

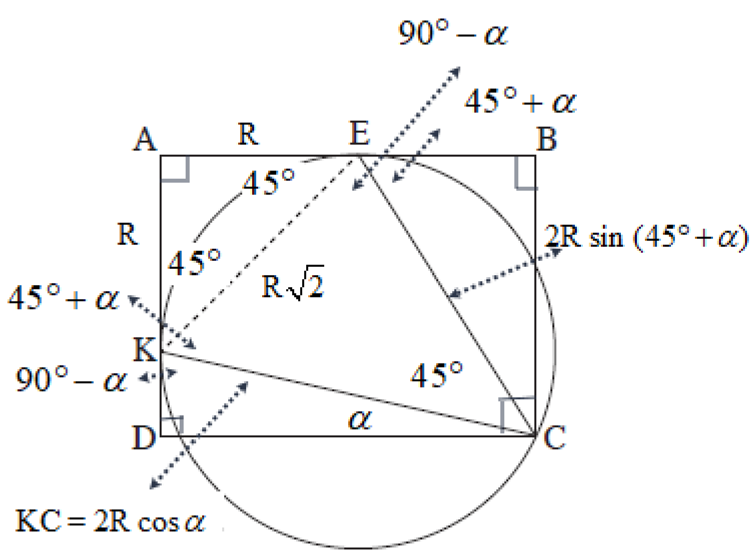
$$EB = R\sin(90^\circ+2\alpha) \quad \leftarrow \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\boxed{EB = R\cos 2\alpha} \quad \leftarrow \sin(90^\circ+x) = \cos x$$

$$\frac{EB}{AE} = \frac{R\cos 2\alpha}{R}$$

$$\boxed{\frac{EB}{AE} = \cos 2\alpha}$$

**תשובה:** $\frac{EB}{AE} = \cos 2\alpha$.



**ד.** $\frac{EB}{AE}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$2\alpha=\pm 45°+360°k$

$\alpha=\pm 22.5°+180°k$

$\boxed{\alpha=22.5°} \quad \leftarrow 0°<\alpha<45°$

**תשובה:** $\alpha=22.5°$.

**א. נתונה הפונקציה** $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$ **(** $a>0$ **פרמטר).**

**נמצא את תחום ההגדרה, כאשר הביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי והמכנה שונה מ-** $0$.

$x^2-a^2>0$ **, נקבל פרבולה בעלת מינימום שמתאפסת עבור** $x=\pm a$.

**תשובה: תחום ההגדרה:** $x>a$ **או** $x<-a$.

**ב. נוכיח שהפונקציה היא זוגית.**

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{\sqrt{(-x)^2-a^2}}$$

$$f(-x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\boxed{f(-x)=f(x)}$$

**לכן הפונקציה** $f(x)$ **היא זוגית, והגרף שלה סימטרי לציר ה-** $y$.

**תשובה: הוכחנו כי הפונקציה** $f(x)$ **היא זוגית.**

**ג. (1) אין נקודות חיתוך עם ציר** $y$ **, כי** $x=0$ **לא בתחום ההגדרה,**

**ולא עם ציר** $x$ **כי המונה מתאפס רק עבור** $x=0$ **שמחוץ לתחום ההגדרה.**

**תשובה: לגרף הפונקציה** $f(x)$ **אין נקודות חיתוך עם הצירים.**

**(2) לא קיימות אסימפטוטות המאונכות לציר ה-** $y$ **.**

**אין חובה לנמק בבגרות, ולכן לא מפורטים כאן נימוקים.**

**תשובה: האסימפטוטות המאונכות לציר ה-** $x$ **הן:** $x=a$ , $x=-a$ .

**(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה** $f(x)$ **ונקבע את סוגן.**

$$f'(x)=\frac{2x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{\cancel{2}x\cdot x^2}{\cancel{2}\sqrt{x^2-a^2}}}{(\sqrt{x^2-a^2})^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{2x(x^2-a^2)-x^3}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x^2-a^2}$$

$$\frac{x(2x^2-2a^2-x^2)}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x(x^2-2a^2)}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}}}$$

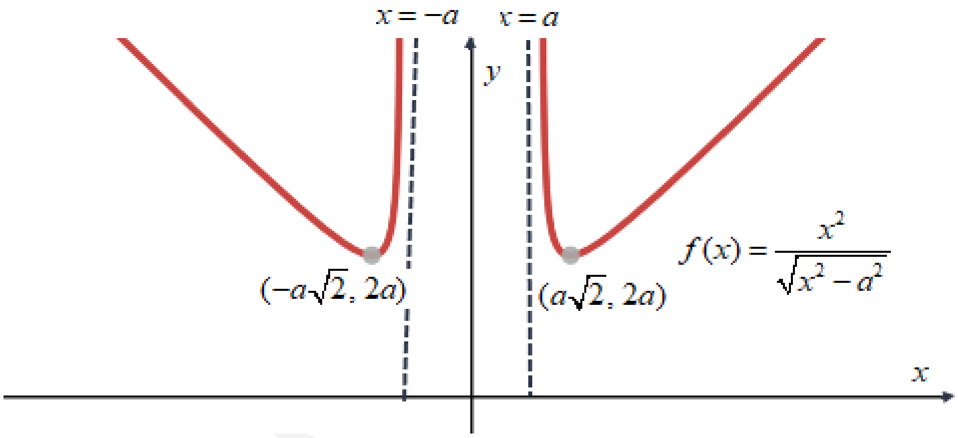
$$x(x^2-2a^2)=0$$
$$\cancel{x=0}$$
$$x^2-2a^2=0$$
$$x^2=2a^2$$
$$x=\pm a\sqrt{2}$$
$$f(\pm a\sqrt{2})=\frac{2a^2}{\sqrt{2a^2-a^2}}=\frac{2a^2}{a}\quad\leftarrow a>0$$
$$(a\sqrt{2},2a)\quad(-a\sqrt{2},2a)$$

**סוג הקיצון נקבע לפי האסימפטוטות האנכיות, והיעדרן של האסימפטוטות האופקיות.**

**כלומר, כאשר** $x\to\pm a$ **וגם כאשר** $x\to\pm\infty$ **אז** $f(x)\to+\infty$ **, ומכאן תחומי עלייה וירידה וסוג הקיצון.**

**תשובה:** $(a\sqrt{2},2a)$ **מינימום,** $(-a\sqrt{2},2a)$ **מינימום.**

**(4) הסקיצה המתאימה עבור** $a>0$ **:**




**ד. נתונה הפונקציה** $h(x)=[f(x)]^2$ **, המוגדרת בתחום של** $f(x)$ **, כלומר עבור** $x>a$ **או** $x<-a$ **.**

- **כיוון ש-** $f(x)>0$ **אז שתי הפונקציות חיוביות בתחום ההגדרה.**
- $h'(x)=2f(x)\cdot f'(x)$ **. כיוון ש-** $f(x)$ **חיובית, הרי שסימני הנגזרת זהים,**

  **ו-** $h'(x)=0$ **גם עבור** $x=\pm a\sqrt{2}$ **, ונקבל שתי נקודות מינימום.**
- **שיעורי ה-** $y$ **כמובן עולים בריבוע, ונקבל** $(a\sqrt{2},4a^2)$ **מינימום,** $(-a\sqrt{2},4a^2)$ **מינימום.**

**תשובה: שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה** $[f(x)]^2$ **הם** $(a\sqrt{2},4a^2)$ **מינימום,** $(-a\sqrt{2},4a^2)$ **מינימום.**

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{[f(x)]^2}=\frac{1}{h(x)}$ , המוגדרת גם בתחום של $f(x)$ , כלומר עבור $x>a$ או $x<-a$ .

**(ההסבר כאן מפורט מעבר לנדרש בבגרות, וניתן למטרת הקניית ידע)**

- כיוון ש- $h(x)>0$ אז שתי הפונקציות חיוביות בתחום ההגדרה.
- עבור $x\to\pm\infty$ נקבל ש- $f(x)\to+\infty$ ,

ולכן גם $[f(x)]^2\to+\infty$ , ו- $g(x)\to 0$ ו- $y=0$ אסימפטוטה אופקית.

- עבור $x\to\pm a$ נקבל ש- $f(x)\to+\infty$ ,

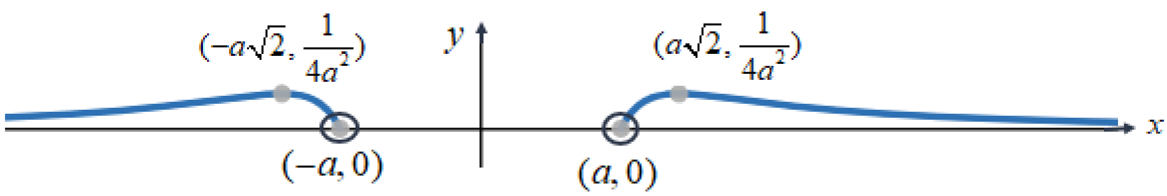
ולכן גם $[f(x)]^2\to+\infty$ , ו- $g(x)\to 0$ ונקבל שתי נקודות חור $(a,0)$ ו- $(-a,0)$.

- $g'(x)=\frac{-h'(x)}{[h(x)]^2}$ , וסימני הנגזרת מתחלפים ועמם תחומי עלייה וירידה וסוג הקיצון משתנה.

ו- $g'(x)=0$ גם עבור $x=\pm a\sqrt{2}$ , ונקבל שתי נקודות מקסימום.

- שיעורי ה- $y$ כמובן הופכיים, ונקבל $(a\sqrt{2},\frac{1}{4a^2})$ מקסימום, $(-a\sqrt{2},\frac{1}{4a^2})$ מקסימום.

$g(x)=\frac{1}{[f(x)]^2}$




תשובה: הסקיצה מעל.

ו. נציב $a=2$ , ובהתאם $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$ , $h(x)=\frac{x^4}{x^2-4}$ .

$g(x)=\frac{x^2-4}{x^4}$ , מוגדרת בתחום $x>2$ או $x<-2$ , וחיובית בתחום זה (ניתן לראות גם בסקיצה בסעיף ה).

$$S=\int_3^4\left(\frac{x^2-4}{x^4}-0\right)dx=\int_3^4(x^{-2}-4x^{-4})\,dx=$$

$$S=\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{4x^{-3}}{-3}\Big]_3^4=-\frac{1}{x}+\frac{4}{3x^3}\Big]_3^4$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=4: & -\frac{11}{48} \\ x=3: & -\frac{23}{81}\end{array}\right\} S=-\frac{11}{48}-(-\frac{23}{81}) \to \boxed{S=\frac{71}{1296}}$$

תשובה: גודל השטח המוגבל הוא $\frac{71}{1296}$ יח"ר.

**א. נתונה הפונקציה:** $\boxed{f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}+3}$ **. נחקור אותה בתחום** $0\le x\le 2\pi$ .

**(1) בתחום ההגדרה המכנה צ"ל שונה מאפס.**

$$\sin x\ne 0 \quad x\ne \pi k \quad x\ne 0,\pi,2\pi$$

**תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה** $f(x)$ **הוא** $x\ne\pi$ , $0<x<2\pi$ .

**(2)** $x=0,\pi,2\pi$ **מאפס מכנה ולא מונה.**

**תשובה: האסימפטוטות המאונכות לציר ה-** $x$ **הן -** $x=2\pi$ , $x=\pi$ **ו-** $x=0$ .

**(3) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה** $f(x)$ .

$$f'(x)=\frac{-2\cos x\sin x\cdot\sin x-\cos^2 x\cdot\cos x}{\sin^2 x}$$

$$f'(x)=\frac{-\cos x(2\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-\cos x(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x}} \leftarrow \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$0=\cos x$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$\boxed{(\frac{\pi}{2},3)},\boxed{(\frac{3\pi}{2},3)}$$

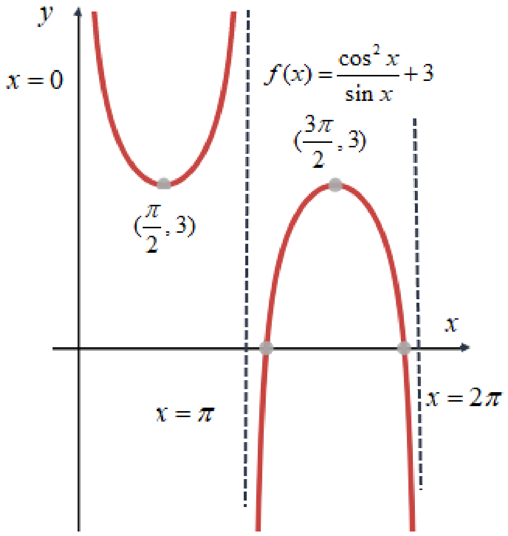
| $x$ | $2\pi$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | | $\pi$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | 3 | | | | 3 | | |
| $f'(x)$ | | - | | + | | + | | - | |
| **מסקנה** | | ↘ | **Max** | ↗ | | ↗ | **Min** | ↘ | |

**תשובה: עלייה –** $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ **או** $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ **, ירידה –** $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ **או** $0<x<\frac{\pi}{2}$ .

**(4) נרשום, על פי תת סעיף (3) את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה** $f(x)$ .

**תשובה:** $(\frac{3\pi}{2},3)$ **מקסימום,** $(\frac{\pi}{2},3)$ **מינימום** .

ב. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ .

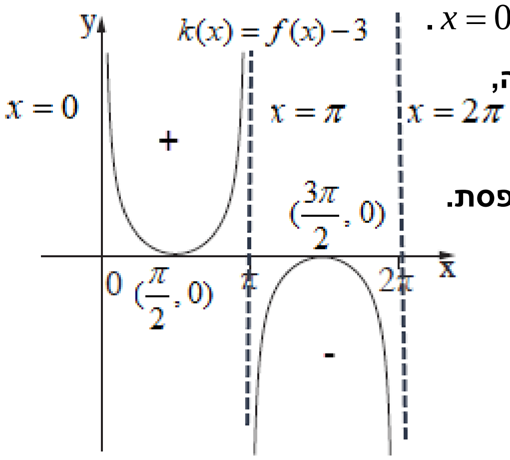



**תשובה: הגרף מעל.**

**ד. נתונות שתי פונקציות** $k(x)=f(x)-3$ , $g(x)=\sqrt{f(x)-3}$ .

**עבור** $k(x)=f(x)-3$ :

- **תחום ההגדרה של** $k(x)$ **זהה לתחום ההגדרה של** $f(x)$ .
- **בהתאם, האסימפטוטות האנכיות ללא שינוי:** $x=\pi, x=2\pi$ **ו-** $x=0$ .
- **זו הזזה** 3 **יחידות כלפי מטה, ללא שינוי בתחומי העלייה והירידה,**
  **כפי שניתן לראות גם מהנגזרת** $k'(x)=f'(x)$,
  **כאשר סימני הנגזרת זהים, וגם ערכי ה-** $x$ **עבורם הנגזרת מתאפסת.**
- **נקודות קיצון:** $(\frac{3\pi}{2},0)$ **מקסימום,** $(\frac{\pi}{2},0)$ **מינימום** .
- **הגרף המתאים הוא גרף ג, ראה משמאל.**

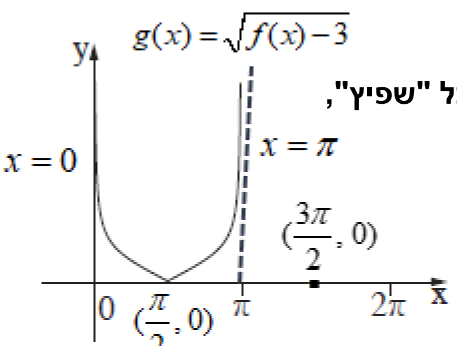



**גרף ג**

**עבור** $g(x)=\sqrt{f(x)-3}=\sqrt{k(x)}$ :

- **תחום ההגדרה של** $g(x)$ **הוא תחום אי-השליליות של** $k(x)$:

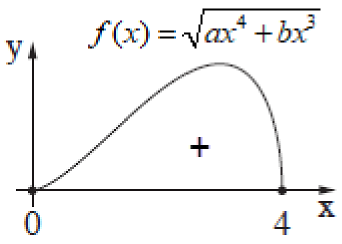
  $x=\frac{3\pi}{2}$ , $0<x<\pi$ **, כאשר** $(\frac{3\pi}{2},0)$ **נקודה יחידה בתחום** $\pi<x<2\pi$ .
- **נשארות שתי אסימפטוטות אנכיות:** $x=\pi$ **ו-** $x=0$ .
- $g'(x)=\frac{k'(x)}{2\sqrt{k(x)}}$ **, ולכן עבור** $x=\frac{\pi}{2}$ **הנגזרת אינה מוגדרת ונקבל "שפיץ",**
  **ומעבר לכך תחומי עלייה וירידה זהים, בתחום** $0<x<\pi$.
- **נקודת קיצון:** $(\frac{\pi}{2},0)$ **מינימום** .
- **הגרף המתאים הוא גרף א, ראה משמאל.**




**גרף א**

**תשובה: גרף ג מתאר את הפונקציה** $k(x)$ **, גרף א מתאר את הפונקציה** $g(x)$ .

**א. נתון סרטוט הפונקציה** $f(x)=\sqrt{ax^4+bx^3}$ **, המוגדרת בתחום** $0\le x\le 4$.




**(1)** $x=0$ **ו-** $x=4$ **מאפסים את הביטוי שבתוך השורש.**

$$0=a\cdot 4^4+b\cdot 4^3 \quad /:4^3$$
$$0=4a+b$$
$$\boxed{b=-4a}$$

**תשובה: הוכחנו כי** $b=-4a$ .

**(2) נציב** $b=-4a$ **ונקבל שהפונקציה היא** $f(x)=\sqrt{ax^4-4ax^3}$ .

**נבדוק איזו מהטענות נכונה.**

**עבור** $0<x<4$ **מתקיים** $ax^4-4ax^3>0$

$$ax^4-4ax^3>0 \quad /:x^3>0$$
$$ax-4a>0$$
$$a(x-4)>0/:(x-4)<0$$
$$\boxed{a<0} \quad \to \boxed{b=-4a>0}$$

**תשובה: טענה** II **נכונה,** $a<0\,,b>0$ .

**ב. הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא *שטח משולש*** PMO .

**הנקודה** P **נמצאת על גרף הפונקציה** $\left[f(x)\right]^2=ax^4-4ax^3$ **, המוגדרת גם היא בתחום** $0\le x\le 4$,

**וגם היא פונקציה אי-שלילית עם נקודות קצה** $(4,0)$ **ו-** $(0,0)$ .

**נסמן את שיעורי הנקודה** $P(t,at^4-4at^3)$ .

$$S_{\Delta PMO}=\frac{OM\cdot PM}{2}$$
$$S_{\Delta PMO}=\frac{t\cdot(at^4-4at^3)}{2}$$
$$\boxed{S(t)=\frac{a}{2}\cdot(t^5-4t^4)}$$
$$\boxed{S'(t)=\frac{a}{2}\cdot(5t^4-16t^3)}$$
$$0=5t^4-16t^3 \quad /:0<t^3<64$$
$$0=5t-16$$
$$t=3.2 \quad / \quad \leftarrow o.k. \quad \leftarrow 0<t<4$$
$$\boxed{S''(t)=\frac{a}{2}\cdot(20t^3-48t^2)}$$
$$S''(3.2)=\frac{a}{2}\cdot 163.84<0 \quad \leftarrow a<0$$
$$\boxed{t=3.2,\max}$$

**תשובה:** $x_P=3.2$ **, עבורו שטח המשולש** PMO **הוא מקסימלי.**

**ג. נביע, באמצעות $a$ את השטח המקסימלי של המשולש PMO.**

$$S(3.2)=\frac{a}{2}\cdot(3.2^5-4\cdot 3.2^4)$$

$$\boxed{S(3.2)=(-41.94a)}$$

**נשים לב שהשטח חיובי, כי $a<0$ .**

**תשובה: השטח המקסימלי של המשולש PMO הוא $(-41.94a)$.**

**ד. ידוע כי שיעור ה- $x$ של הנקודה P נמצא בתחום שבו הפונקציה $\left[f(x)\right]^2=ax^4-4ax^3$ <u>אינה</u> יורדת.**

**עבור $0<x<3.2$ פונקציית שטח המשולש PMO בעלייה, כי $x=3.2$ מקסימום.**

**נמצא את התחום שבו $\left[f(x)\right]^2=ax^4-4ax^3$ <u>אינה</u> יורדת.**

$$\boxed{(ax^4-4ax^3)'=4ax^3-12ax^2}$$

$$4ax^3-12ax^2\geq 0 \quad /:4ax^2<0$$

$$x-3\leq 0$$

$$\boxed{x\leq 3}$$

**מכאן שבתחום $0\leq x\leq 3$ מתקיים ש- $\left[f(x)\right]^2$ אינה יורדת,**

**ולכן פונקציית שטח המשולש PMO שנמצאת בעלייה בתחום זה,**

**מקבלת מקסימום עבור $x=3$ - בנקודת הקצה בתחום זה.**

**תשובה: $x_{\text{P}}=3$ , עבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי בתחום שבו $\left[f(x)\right]^2$ אינה יורדת.**