פתרון הבחינה

במתמטיקה

מועד קיץ תשפ"א, 2021, שאלון: 35482

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע" :

.1 a_n היא סדרה חשבונית.

נתונים שלושה איברים עוקבים בסדרה a_n (הסדר משמאל לימין):

$$5t+6\,,\quad 2t+t^2\,,\quad 4t+t^2$$

t הוא פרמטר.

א. מצא את שלושת האיברים ואת הפרש הסדרה (שתי האפשרויות).

נתון: a_n היא סדרה **יורדת**, $a_1 = 189$.

ב. מצא בסדרה זו את המיקום של שלושת האיברים שמצאת בסעיף א.

נתון: האיבר האמצעי שבתחילת השאלה הוא האיבר האמצעי גם בסדרה כולה.

ג. **(1)** כמה איברים יש בסדרה כולה?

(2) מצא את סכום האיברים שבמקומות האי־זוגיים בסדרה כולה.

א. ההפרש קבוע בין איברי הסדרה החשבונית

$4t+t^2-(2t+t^2)=2t+t^2-(5t+6)$

$4t+t^2-2t-t^2=2t+t^2-5t-6$

$2t=t^2-3t-6$

$t^2-5t-6=0$

$(t-6)(t+1)=0$

$t=6$ $\quad$ $t=-1$

עבור $t=-1$

$5t+6=1$

$2t+t^2=-1$

$4t+t^2=-3$

עבור $t=6$

$5t+6=36$

$2t+t^2=48$

$4t+t^2=60$

האיברים הם

$1,-1,-3$

סדרה חשבונית שהפרשה -2

או

האיברים הם

$36,48,60$

סדרה חשבונית שהפרשה 12

נתון: a_n סדרה יורדת $\Leftarrow$ d שלילי ולכן $d=-2$ מתוך פתרונות סעיף א'.

נתון: $a_1=189$

ב. האיברים $1,-1,-3$ שמקיימים הם a_n, a_{n+1}, a_{n+1} ולכן $a_n=1$

$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$

$1=189+(n-1)\cdot(-2)$

$1=189-2n+2$

$1=191-2n$

$2n=190$

$n=95 \Rightarrow$ {האיברים הם a_{95}, a_{96}, a_{97} כלומר - מקומותיהם הינם $n=95,96,97$}

נתון: האיבר האמצעי $=$ $a_{96}=-1$ הוא האיבר האמצעי בסדרה כולה.

ג. (1) ישנם 95 איברים לפני a_{96} ומאחר שהוא האמצעי ישנם 95 איברים גם אחריו.
ולכן מספר האיברים בסדרה הוא $96+95=191$ איברים
{בסדרה ישנם 191 איברים}

(2) סכום האיברים במקומות האי-זוגיים

מספר האיברים במקומות האי-זוגיים $=\frac{191+1}{2}=96$ איברים

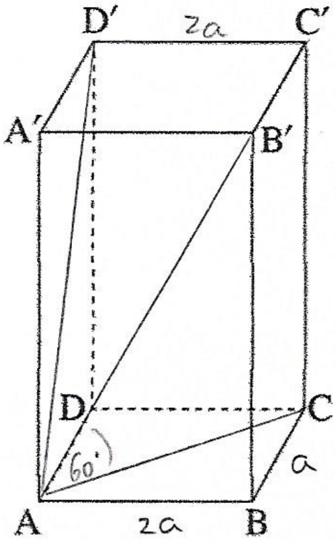
ההפרש בסכום $=2d=-4$

האיבר הראשון $=a_1=189$

$S=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$

$S=\frac{96}{2}\cdot[2\cdot189+(96-1)\cdot(-4)]$

{$S=-96$ סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא}



2. נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה מלבן.

נתון: $AB = 2a$, $BC = a$.

הזווית שבין AC' ובין הבסיס $ABCD$ היא 60^o .

א. הבע באמצעות a את גובה התיבה.

נתון כי שטח המעטפת של התיבה (סכום שטחי הפאות הצדדיות) הוא $30 \cdot \sqrt{15}$.

ב. מצא את a .

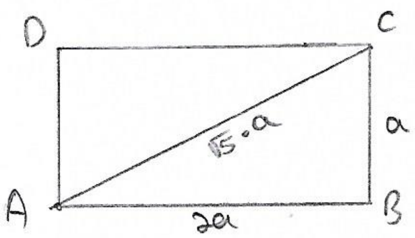
ג. מצא את גודל הזווית שבין AD' ובין אחד מאלכסוני התיבה.

ד. מצא את שטח המרובע $AD'C'B$.

א.

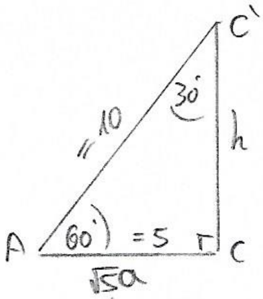
$\underline{\Delta ABC}:\quad AC^2 = a^2 + (2a)^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$

$AC = \sqrt{5} \cdot a$



$\underline{\Delta ACC'}:\quad \frac{CC'}{AC} = \tan 60^\circ$

$\frac{h}{\sqrt{5} \cdot a} = \sqrt{3} \Rightarrow \left\{ h = \sqrt{15} \cdot a \approx 3.873a \right\}$



ב. נתון: S_M מעטפת $= 30 \cdot \sqrt{15}$

S_M מעטפת $= 2 \times 2a \cdot h + 2 \times a h = 6a \cdot h \qquad h = \sqrt{15} \cdot a$

$S_M = 6a \cdot \sqrt{15}\, a = 6 \cancel{\sqrt{15}} \cdot a^2 = 30 \cdot \cancel{\sqrt{15}}$ נתון

$a^2 = 5 \Rightarrow \left\{ a = \sqrt{5} \approx 2.236 \right\}$

ג.

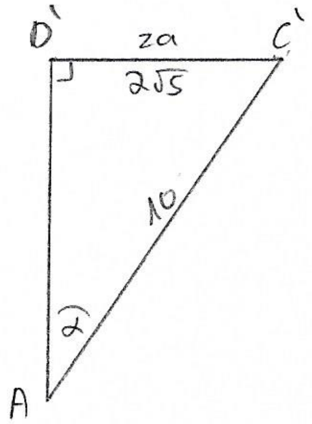
$AC = \sqrt{5} \cdot a \ , \ a = \sqrt{5}$

$AC = 5$

$\underline{\Delta ACC'}:\quad \cos 60^\circ = \frac{AC}{AC'} \Rightarrow AC' = \frac{5}{\cos 60^\circ} = 10$

$AC' = 10$

המשך ב.



$D'C' = 2a = 2\sqrt{5}$

$\underline{\triangle AC'D'}$: $\sin \sphericalangle D'AC' = \frac{2\sqrt{5}}{10}$

$\left\{ \sphericalangle D'AC' = 26.565^\circ \right.$ זווית בין AD' לבין AC' $\}$

ג. $S_{AD'C'B} = ?$

$S_{AD'C'B} = AD' \cdot D'C'$

$\underline{\triangle AD'C'}$: $\frac{AD'}{10} = \cos 26.565^\circ \Rightarrow AD' = 8.944$

$D'C' = 2\sqrt{5} = 4.472$

$\left\{ S_{AD'C'B} = 40 \right\}$

3. נתונה הפונקציה $f(x)=4x+4\cos(2x)-2$ המוגדרת בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

א. מצא את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. רשום את תחום השליליות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ה. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה־ x (השטח ברביע הרביעי).

א.

$f'(x)=4-8\sin 2x=0$ $\quad \sin 2x=\frac{1}{2}$ $\quad 0\le x\le\frac{\pi}{2}$

$\text{I.}\ 2x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$ $\quad x=\frac{\pi}{12}+\pi k$

$x=\frac{\pi}{12}$ בתחום $\quad f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2.511$

$\text{II.}\ 2x=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi k$ $\quad x=\frac{5\pi}{12}+\pi k$

$2x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$ $\quad x=\frac{5\pi}{12}$ בתחום $\quad f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=-0.228$

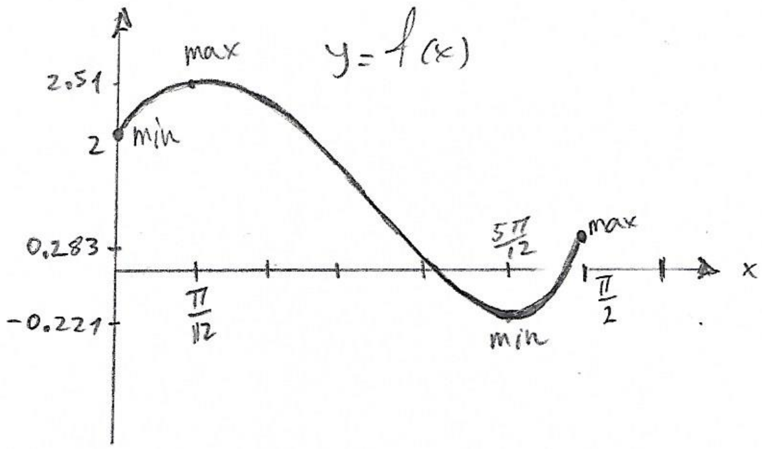
x	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\frac{1}{2}\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
f'	קצה +	+	0	−	0	+	קצה
f	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max

$f(0)=2$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.283$

$$\left\{\min(0,2),\ \max\left(\frac{\pi}{12},2.511\right),\ \min\left(\frac{5\pi}{12},-0.228\right),\ \max\left(\frac{\pi}{2},0.283\right)\right\}$$

ב.



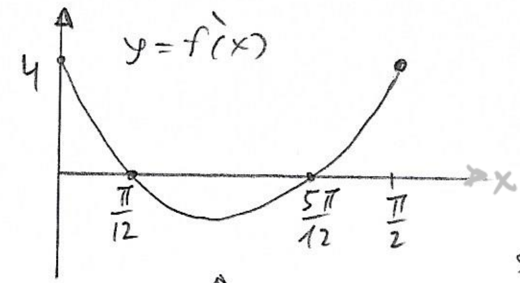
תחום שליליות של $f'(x)$

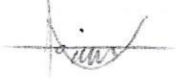
ג. מתוך הטבלה של $f'(x)$:
או מתוך הגרף

$$\left\{ \frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \right\}$$

ד. סקיצה לפי תחומי חיוביות ושליליות של $f'(x)$

$f'(0) = 4$, $f'(\frac{\pi}{2}) = 4$
ערכי קצה





זה השטח

ה. $S = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} (0 - f'(x))dx$

$$S = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} (-f'(x))dx = -f(x) \Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}$$

$$= -\left[f\left(\tfrac{5\pi}{12}\right) - f\left(\tfrac{\pi}{12}\right)\right] = -(-0.228 - 2.511) = 2.739$$

$$\left\{ S = 2.739 \right\}$$
יח"ר

4. נתונה הפונקציה $f(x) = e^{3x} + 3e^{4-x} + a$ המוגדרת לכל x. $a > 0$ הוא פרמטר.

א. מצא את שיעור ה־ x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

נתון כי המרחק של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ מציר ה־ x הוא $4e^3 + 2$.

ב. מצא את a.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = -f(x)$.

ד. **(1)** מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, ומהו הסוג של נקודת הקיצון? נמק את תשובותיך.

(2) הוסף סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ לסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ שסרטטת.

דרך נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ העבירו ישר המקביל לציר ה־ y.

ה. מצא את השטח המוגבל על ידי הישר, על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה־ y.

א.

$f'(x) = 3e^{3x} - 3e^{4-x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3e^{3x} - 3e^{4-x} = 0 \quad |:3$

$e^{3x} = e^{4-x}$

$3x = 4 - x$

$4x = 4$

$x = 1$

$\boxed{x_{min} = 1}$

$f''(x) = 9e^{3x} + 3e^{4-x}$

$f''(1) = + \Rightarrow min$

$f(1) = e^3 + 3e^3 + a = 4e^3 + a$

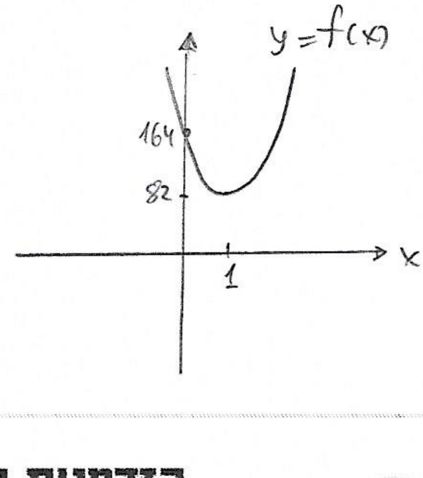
$\{min(1, 4e^3+a)\}$

ב. נתון: המרחק מציר ה-x של נקודת המינימום $= 4e^3+2 \Rightarrow |y_{min}| = 4e^3+2$

$4e^3 + a = 4e^3 + 2$

$\boxed{a = 2}$

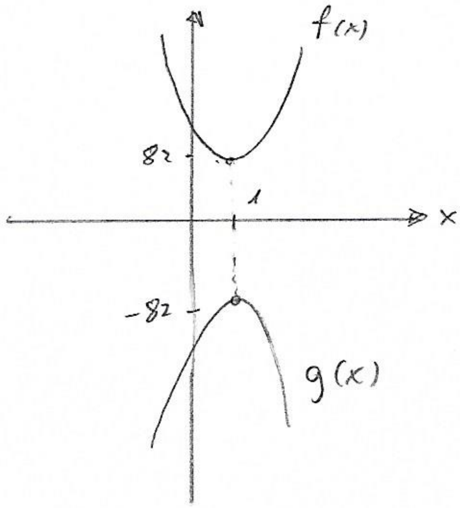
ג.



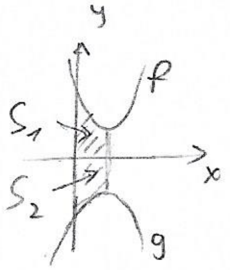
ג. $g(x) = -f(x)$

(1) $\left\{\max(1, -4e^3-2)\right\}$ כי $g(x)$ היא שיקוף אנכי של $f(x)$

(2)



ה.



בגלל הסימטריה $S_1 = S_2$ ולכן $S = 2 \cdot S_1$

$$S_1 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (e^{3x} + 3e^{4-x} + 2)dx$$

$$= \left[\frac{e^{3x}}{3} + \frac{3e^{4-x}}{-1} + 2x\right]\Big|_0^1 = \left[\frac{1}{3}e^{3x} - 3e^{4-x} + 2x\right]\Big|_0^1$$

$S_1 = 111.9$

$$= (-51.56) - (-163.46) = 111.9$$

$$S = 2S_1 \Rightarrow \left\{ \underset{\text{יח"ר}}{S = 223.8} \right\}$$

5. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{bx}{1+\ln(x)}$. $b>0$ הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את שיעורי נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$ (אם צריך, הבע באמצעות b).

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון: הישר $y=3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

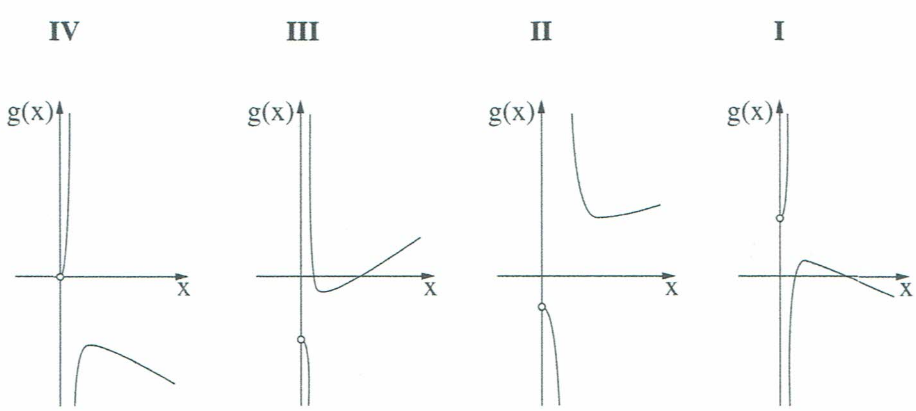
ד. **(1)** מצא את b .

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)-4$.

(1) מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, ומהו הסוג של נקודת הקיצון? נמק את תשובותיך.

(2) אחד מן הגרפים I , II , III , IV שלפניך מתאר את גרף הפונקציה $g(x)$. קבע איזה, ונמק את קביעתך.



פתרון:

א. נדרוש: שנכן לוגריתם חיובי: $x>0$

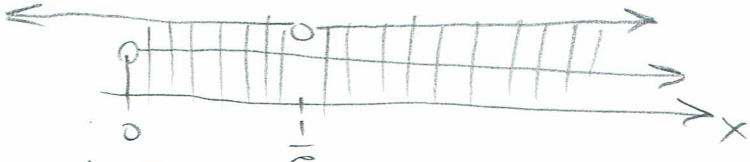
וגם

מכנה שונה מאפס: $1+\ln x\neq 0$

$\ln x\neq -1$

$x\neq e^{-1}=\frac{1}{e}$

פתרון המערכת:



$\boxed{0<x<\frac{1}{e} \text{ או } \frac{1}{e}<x}$

ב. נגזיר:

$$f(x)=\frac{bx}{1+\ln(x)}\ ,\quad 0<b$$

$$f'(x)=\frac{b(1+\ln(x))-bx\cdot\frac{1}{x}}{(1+\ln(x))^2}=\frac{b+b\ln(x)-b}{(1+\ln(x))^2}=\frac{b\ln(x)}{(1+\ln(x))^2}$$

נשווה את הנגזרת לאפס על מנת למצוא נקודות "חשודות" כקיצון:

$$f'(x)=0$$

$$\frac{b\ln(x)}{(1+\ln(x))^2}=0 \Rightarrow b\cdot\ln(x)=0$$

אין פתרון $0<b$; $\ln(x)=0$

$$x=1$$

$$f(1)=\frac{b\cdot 1}{1+\ln(1)}=b$$

נערוך טבלה:

x	$0<x<\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}<x<1$	1	$1<x$
$f(x)$				b	
$sign(f'(x))$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$ עליה/ירידה	↘		↘	min	↗

חישובים עבור הטבלה:

$$f'\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{b\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)}{\left(1+\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)\right)^2}=\frac{-2b}{(1-2)^2}=-2b\overset{0<b}{<}0$$

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{b\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)}{\left(1+\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\right)^2}=\frac{-\frac{1}{2}b}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\overset{0<b}{<}0$$

$$f'(e)=\frac{b\ln e}{(1+\ln e)^2}=\frac{b}{(1+1)^2}\overset{0<b}{>}0$$

לסיכום: שיעורי נק' המינימום של הפונק' f: $\boxed{\min(1,b)}$

ג. מהחקירה עד כה (ראו טבלה בסעיף קודם):

תחומי העלייה של הפונקציה f: $1<x$

תחומי הירידה של הפונקציה f: $1>x>\frac{1}{e}$ או $\frac{1}{e}>x>0$

ד.1.

נתון: הישר $y=3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

בנקודת ההשקה, לישר המשיק ולפונקציה יש שיפוע זהה.

שיפוע המשיק הנתון: $m=0$.

ערך הנגזרת f' שווה לשיפוע המשיק בנקודה.

הנקודה היחידה בה f' מתאפסת (מחקירה קודמת)

היא נקודת הקיצון $\boxed{(1,b)}$.

משמע הישר $y=3$ משיק לגרף הפונקציה f בנקודת הקיצון שלה.

ומכאן ששיעורי נקודת ההשקה הם: $\boxed{(1,3)}$.

נסיק כי $\boxed{b=3}$.

ד.2. מעט חקירה נוספת. מתחום ההגדרה: $x=\frac{1}{e}$ מאפס את המכנה של f אך לא את המונה.

מכאן נסיק כי $x=\frac{1}{e}$ מהווה אסימפטוטה אנכית של הפונקציה f.

נקודות חיתוך עם ציר x (אין חיתוך עם ציר y שכן $x=0$ לא בתחום ההגדרה):

$f(x)=0$

$\frac{3x}{1+\ln(x)}=0 \Rightarrow \cancel{x=0}$ לא בתחום ההגדרה.

אין ל-f נק' חיתוך עם ציר x.

ג.2. המשך

$$f(x)=\frac{3x}{1+\ln(x)}$$

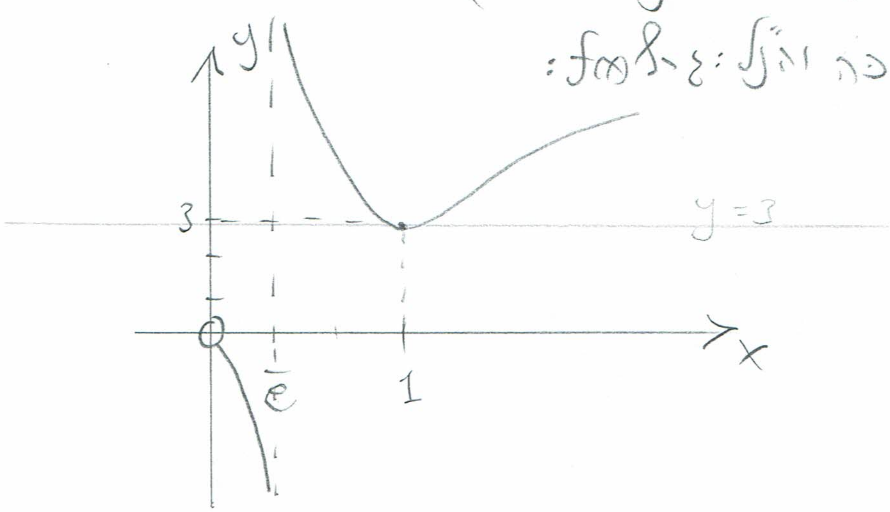
כאשר x שואף לאפס דרך ערכים חיוביים.
המונה $3x$ שואף לאפס דרך ערכים חיוביים.
והמכנה $(1+\ln(x))$ שואף למינוס אינסוף (מתכונות הפונקציה הלוגריתמית $\ln x$).
לכן המנה כולה שואפת לאפס דרך ערכים שליליים.
נסיק כי $(0,0)$ הינה "חור" בגרף הפונקציה f.

ניתן "לאשש" את הנ"ל ע"י טבלת ערכים:

x	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.00051	-0.008	-0.230

כאשר x שואף לאפס דרך ערכים חיוביים $f(x)$ שואפת לאפס דרך ערכים שליליים (ערכי ה-y של f).

על פי כל סעיפי החקירה עד כה ונ"ל: גרף $f(x)$:



ה. $g(x)=f(x)-4$

ו. 1. נקודת קיצון של $g(x)$ וסוגה.

גרף הפונקציה $g(x)$ מהווה הזזה של גרף הפונקציה $f(x)$ ב-4 יחידות "כלפי מטה" בכיוון ציר ה-y.

לכן שיעור ה-x של נקודת הקיצון וסוג הקיצון נשאר בעינו.

min $(1, g(1))$.

מוגדרת $g(x)$ שיעור ה-y של נקודת הקיצון:

$g(1) = f(1) - 4 = 3 - 4 = -1$

לכן $\boxed{\text{min } (1,-1)}$

2. $\boxed{\text{גרף III}}$ מתאר את גרף הפונקציה $g(x)$.

סוג הקיצון ושיעורי נק' הקיצון מתאימים.

וכן החור (ב-$(5,-4)$).

האסימפטוטה האנכית ותחומי העליה והירידה.

גרף I נפסל כיוון שסוג הקיצון לא מתאים (וכן תחומי העליה והירידה ושיעורי החור).

גרף II נפסל כיוון ששיעור ה-y של נק' הקיצון לא מתאים.

גרף IV נפסל כיוון שסוג הקיצון לא מתאים (וכן תחומי העליה והירידה ושיעורי החור).