

פתרון הבחינה

במתמטיקה

מועד קיץ תשפ"א, 2021, שאלון: 35582

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע":

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. נתון פרמטר $a > 0$,

א. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן מן הנקודה $(a, 0)$ שווה

למרחק שלהן מן הישר $x = a - 1$.

ב. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן מן הנקודה $(0, a)$ שווה

למרחק שלהן מן הישר $y = a - 1$.

נתון כי שני המקומות הגאומטריים שמצאת בסעיפים א-ב נחתכים בשתי נקודות. אחת הנקודות היא $(2, 2)$.

ג. (1) מצא את a .

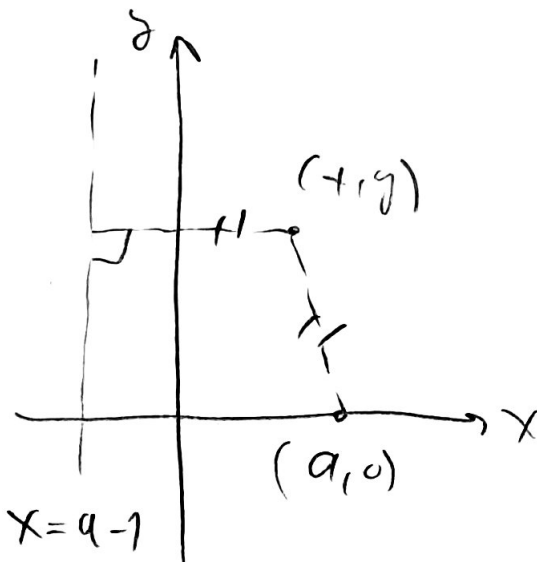
(2) מצא את שיעורי נקודת החיתוך האחרת.

ד. מחברים את שתי נקודות החיתוך של שני המקומות הגאומטריים עם הנקודות $(3a, 0)$ ו- $(0, 3a)$ כך שמתקבל מרובע.

(1) מהו סוג המרובע שהתקבל? נמק.

(2) חשב את שטח המרובע.

פתרון:



1. $\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = x - (a-1)$

$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = x - (a-1)$

↓

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 - 2x(a-1) + (a-1)^2$

↓

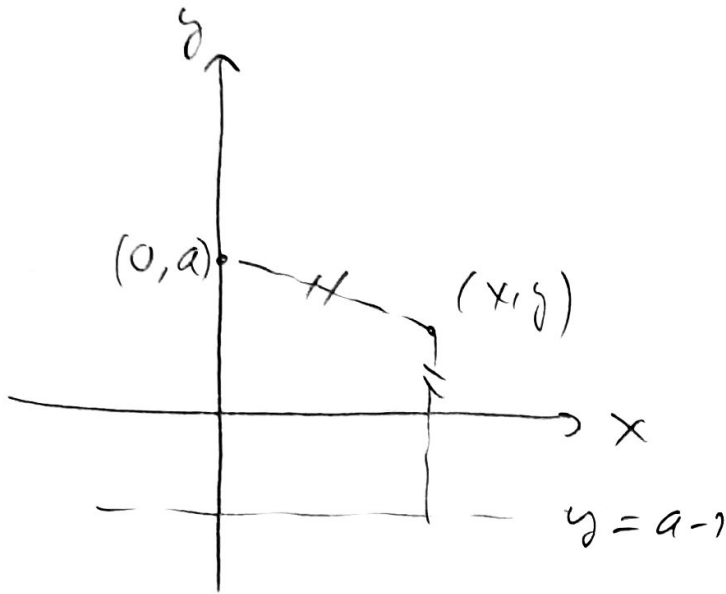
$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 - 2ax + 2x + a^2 - 2a + 1$

$y^2 = 2x - 2a + 1$

נמידע ענ פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה





ג. גזירה של $\sqrt{x^2 + (y-a)^2}$ יחסית ל- y ,
משוואת המרחק:

$$\sqrt{x^2 + (y-a)^2} = y - (a-1)$$

$$\downarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2 - 2y(a-1) + (a-1)^2$$

$$\downarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2 - 2ay + 2y + a^2 - 2a + 1$$

$$x^2 = 2y - 2a + 1$$

ד. (1) הנקודה היא $(2, 2)$ כאשר המשוואות:

$$2^2 = 2 \cdot 2 - 2a + 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x = 2y \end{cases}$$

(2) המשוואות הן:

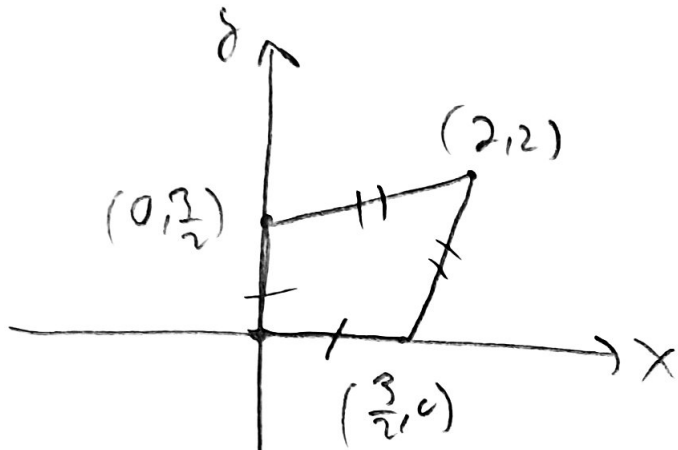
$$(0, 0) \text{ היא הנקודה הנדרשת}$$





3. (1) (שיטת א) - המרוגן בלעדי

ציריבי



המרוגן של הדיא

הוא צלעון

כי יש לו שתי צוות

של קצוות סמוכות שלו.

(חישוב האורך של הדיא - הוא 5)

(2) נחשב לפי מכפלה וזוכי הוא פסימניק זמק

ק-2:

$$S = \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2}}{2}$$

$$S = 3$$

נמידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים

אל תתפשר עליה



2. נתונה פירמידה מרובעת $SABCD$ שבסיסה $ABCD$ הוא מעוין. נתון: \vec{SA} מאונך לבסיס הפירמידה, $\angle BAD = 60^\circ$, $SA = BA$, $\vec{SE} = t \cdot \vec{SC}$, הוא פרמטר. $0 < t < 1$

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AS} = \underline{w}$

א. הבע את הווקטורים \vec{EB} ו- \vec{ED} באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} .

ב. נתון: $t = \frac{1}{2}$.

(1) הוכח כי \vec{EB} מאונך ל- \vec{ED} .

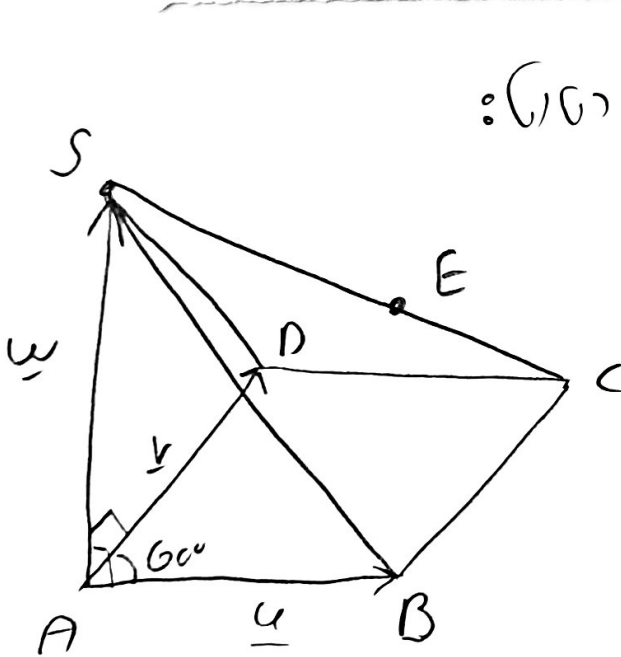
(2) הוכח כי האנך מן הנקודה E לבסיס עובר דרך נקודת מפגש האלכסונים של המעוין.

נתון: $A(0, 0, 0)$, $B(6\sqrt{3}, 6, 0)$, קודקוד D נמצא על ציר ה- y בכיוון החיובי,

שיעור ה- z של הנקודה S גדול מאפס.

ג. חשב את שיעורי הקודקודים S ו- D .

ד. מצא את משוואת המישור SAB .



פתרון:
(נתון יא) - הנתונים הם כאלו:
נתונים:

$$\underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

$$\underline{u} \cdot \underline{u} = \underline{v} \cdot \underline{v} = \underline{w} \cdot \underline{w} = |\underline{u}|^2$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos 60^\circ = \frac{|\underline{u}|^2}{2}$$

כעת נוכל לגנוח את סגפ
המשוואה:



נחידע עכ פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה





$$\vec{EB} = \vec{ES} + \vec{SA} + \vec{AB} = -t\vec{SC} - \underline{u} + \underline{u} \quad .1c$$

$$\vec{EB} = -t(-\underline{u} + \underline{u} + \underline{v}) - \underline{u} + \underline{u} = \boxed{(1-t)\underline{u} - t\underline{v} + (t-1)\underline{u}}$$

$$\vec{ED} = \vec{ES} + \vec{SA} + \vec{AD} = -t(-\underline{u} + \underline{u} + \underline{v}) - \underline{u} + \underline{v}$$

$$\boxed{\vec{ED} = -t\underline{u} + (1-t)\underline{v} + (t-1)\underline{u}}$$

$$t = \frac{1}{2} \quad : (1) \rightarrow$$

(1) (חשב) הן כפוף הסדוריה של \vec{EB} ו \vec{ED} יוצאה שיהיו אלוה לאפס:

$$\vec{EB} \cdot \vec{ED} = \left(\frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{u}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{u}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\underline{u} \cdot \underline{u} - \underline{v} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{u} + 2\underline{u} \cdot \underline{v}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(-|\underline{u}|^2 - |\underline{v}|^2 + |\underline{u}|^2 + 2|\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cos 90^\circ\right) = 0$$

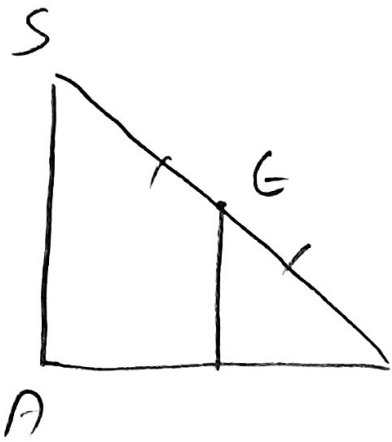
הן כפוף אפס ואכן $\vec{EB} \perp \vec{ED}$

(2) נחזרה ϵ היא אמתג היה זקוק SC

האנג נחזרה ϵ אפסיה היה זקוק AS



ז'בן הווא דעל אנטרעק געשולט SAC.



ז'בן האנטער, וואו האט א צוהער האנטע שאו.

האל כסוניק געוויזן חוליק צה

אז צה ז'בן אנטרעק הווא כסון

AC הווא צוהער געט הווא כסוניק טא העוויזן.

ד. נתון: $A(9, 0, 0)$, $B(6\sqrt{3}, 6, 0)$, $D(0, 12, 0)$

אז צה וואו ז'בן אנטרעק AB טא העוויזן:

$$d_{AB} = |AB| = \sqrt{(6\sqrt{3}-9)^2 + (6-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{44} = 12$$

מכילן נדב $D(0, 12, 0)$

\vec{AS} מאונטן ז'בן טא. מכילן טא דעזו ציג A, B, C

וואו ז'בן אנטרעק הווא כסון S חייבת

ז'בן אנטרעק ז'בן ז'בן, מכילן הוואו טא, ז'בן

$S(0, 0, 12)$



3. שני וקטורים הם השישור של ABS היכן:

$$\vec{AB} = (6\sqrt{3}, 6, 0), \quad \vec{AS} = (0, 0, 12)$$

(נדרש להם הנורמה של השישור):

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 0, 12) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (6\sqrt{3}, 6, 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12c = 0 \\ 6\sqrt{3}a + 6b = 0 \end{cases}$$

$$b = -\sqrt{3}a, \quad c = 0 \quad (\text{הדגן})$$

$$b = -\sqrt{3} \quad a = 1 \quad (\text{בחר } a = 1 \text{ ונדרש } b = -\sqrt{3})$$

השישור עובר בקואסטה ולכן $d = 0$.

לפיכך, משוואת השישור היא:

$$\boxed{x - \sqrt{3}y = 0}$$



3. נתונה המשוואה $z^4 = -16$ (z הוא מספר מרוכב).

א. פתור את המשוואה.

נתון: פתרונות המשוואה מייצגים קודקודים של מצולע במישור גאוס.

ב. סרטט במערכת הצירים את המצולע שהתקבל.

ג. כופלים ב- $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ כל אחד מן המספרים המייצגים את קודקודי המצולע.

ד. מצא את שיעורי הנקודות המיוצגות על ידי המספרים שהתקבלו בהכפלה.

ה. הוא מספר טבעי, $11 < n < 17$ ו- c הוא מספר ממשי.

כל אחד מן המספרים המרוכבים שמצאת בסעיפים הקודמים מקיים את המשוואה $z^n = c$.

ו. מצא את n ואת c.

הנקודות במישור גאוס, המיוצגות על ידי כל הפתרונות של המשוואה $z^n = c$ שמצאת בסעיף ד, יוצרות

מצולע בעל n צלעות.

ז. מצא את שטח המצולע.

פתרון:

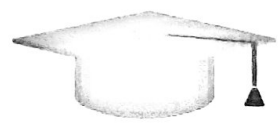
א. $z^4 = -16 \Rightarrow z^4 = 16 \text{cis} 180^\circ$

נוזרים סורט רביעי: $z_k = 2 \text{cis}(45^\circ + 90^\circ k)$

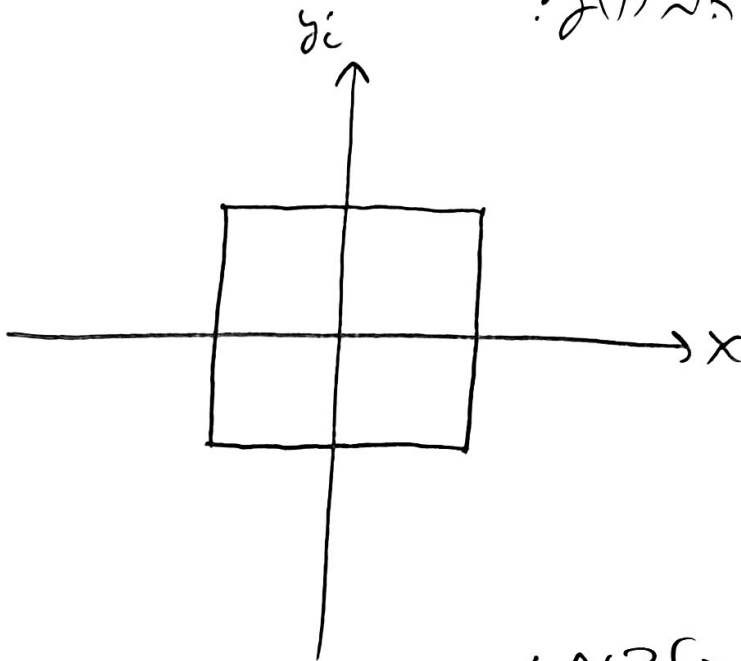
$z_1 = 2 \text{cis} 45^\circ = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$
 $z_2 = 2 \text{cis} 135^\circ = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
 $z_3 = 2 \text{cis} 225^\circ = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$
 $z_4 = 2 \text{cis} 315^\circ = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

נחידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה



ק. נשאלת את מה הוא:



ג. נקודות זהותה קטנות:

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = (\cos 45^\circ)$$

לכיון:

$$z_1 \cdot (\cos 45^\circ) = 2 (\cos 90^\circ) = 2i \Rightarrow (0, 2)$$

$$z_2 \cdot (\cos 45^\circ) = 2 (\cos 180^\circ) = -2 \Rightarrow (-2, 0)$$

$$z_3 \cdot (\cos 45^\circ) = 2 (\cos 270^\circ) = -2i \Rightarrow (0, -2)$$

$$z_4 \cdot (\cos 45^\circ) = 2 (\cos 360^\circ) = 2 \Rightarrow (2, 0)$$



3. נתון: $17 < n < 101$, c גשלי, n חסדי

המשוואה היא $c = 2^n$

בסעיפים הקודמים למדנו שיש שמונה מספרים זכורים בצד. משוואה שבה המספרים הדויליים יהיה גשלי 8 או גשלי שהיא כפולה

שלמה של 8, כאלו 16, 24, ...

אם בתחום נתון נדבר $n=16$.

כדי לוודא $n=2$ חייב להתאים $c = 2^{16} =$

כאשר: $n=16$
 $c = 2^{16} = 65,536$

ההתפלגות היא קולט משוכלל בגודל 16

דגל. והשדה של שולט אחר

ונכנסו ק-16:

$\sum_{שולט} = 16 \cdot \sum_{שולט} = 16 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot \sin 22.5^\circ}{2} = 32 \sin 22.5^\circ = 12.25$

נמידע עכ פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה



4. נתונה הפונקציה $f(x) = 1 + ae^{-2x}$ המוגדרת לכל x . a הוא פרמטר, $a > 1$.
בטא את תשובותיך באמצעות a , לפי הצורך.

- א. (1) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
- ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$? נמק את תשובתך.
(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
(3) ידוע כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת פיתול אחת, המתקבלת כאשר $x = \frac{\ln(a)}{2}$.
מצא את שיעור ה- y של נקודת הפיתול, וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- ג. (1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g'(x)$.
(2) סרטט את גרף הפונקציה $g'(x)$. פרט את שיקוליך.
- ד. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g'(x)$ ועל ידי הישרים $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$.

פתרון:

$$1 < a, \quad f(x) = 1 + ae^{-2x}$$

א. (1) תחום ההגדרה הוא כל x , לכן אין אסימפטוטה

אנכית.

(2) נגדו אסימפטוטה אופקית:

$x \rightarrow -\infty$: אין

$x \rightarrow \infty$: $f(x) \rightarrow 1 + a \cdot 0 = 1 \rightarrow \boxed{y=1}$

נמידע על פסיכומטרי
במאכל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה



$$f'(x) = -2a e^{-2x}$$

(2) נמצא:

הנמצא שאלה זכר, עיני של x זכר:

תחום ירידה: כל x
תחום עלייה: אין

(3) הפונקציה חיובית זכר, עיני של x זכר, אין
חיובי עק ליה x.

$$f(0) = 1 + a \cdot e^{-2 \cdot 0} = 1 + a \quad \text{צייני:$$

(0, 1+a)

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

ה.

(1) מצא מודג זכר x זכר (א) g

מוצא זכר x ← כל x

(2) אין אסימפטוטה אנכית.



אסימפטוטה אנכית:

$$\underline{x \rightarrow \infty} : \rightarrow f(x) \rightarrow 1 \rightarrow g(x) \rightarrow 1 \rightarrow \boxed{g=1}$$

$$\underline{x \rightarrow -\infty} : \rightarrow f(x) \rightarrow \infty \rightarrow g(x) \rightarrow 0 \rightarrow \boxed{g=0}$$

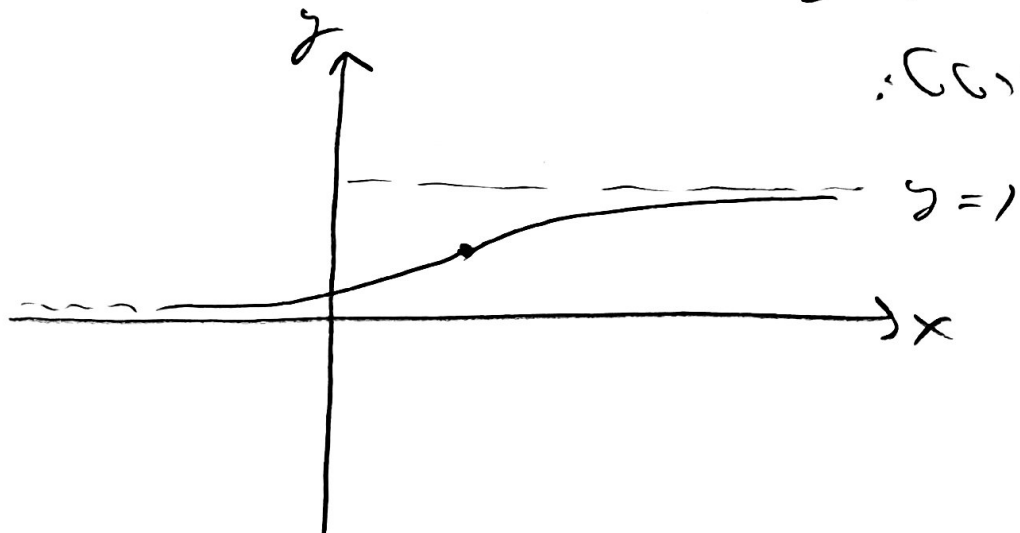
(3) $\gamma >$ גבולותיה יורדת לשיעור $1-\gamma$:

$$g\left(\frac{\ln a}{2}\right) = \frac{1}{1+a \cdot e^{-2 \cdot \frac{\ln a}{2}}} = \frac{1}{1+a e^{-\ln a}} =$$

$$= \frac{1}{1+a \cdot \frac{1}{a}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(נזכר הכיתה) $\left(\frac{\ln a}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$1 < a \leftarrow \ln a < 0$, כלומר הנדנדה קרוינת הואשון.



אסימטוטה:

$g=1$



ד. שיעור ה- x של נקודת פיתול של פונקציה הוא
 שיעור ה- x של נקודת זיכרון של הנגזרת שלה

וזכרו $x = \frac{\ln a}{2}$

נמנה. לשיעור ה- g :

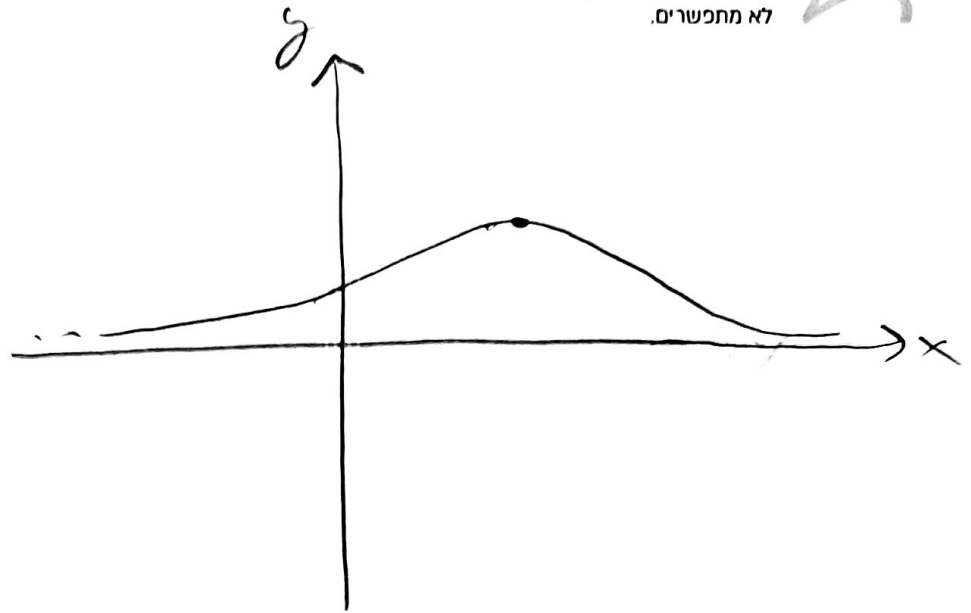
$$g'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{2ae^{-2x}}{(1+ae^{-2x})^2}$$

$$g'\left(\frac{\ln a}{2}\right) = \frac{2a \cdot e^{-2 \cdot \frac{\ln a}{2}}}{(1 + a \cdot e^{-2 \cdot \frac{\ln a}{2}})^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

הנקודה היא $\left(\frac{\ln a}{2}, \frac{1}{2}\right)$

מבין שנקודת הפיתול, (אם יש) היא
 נקודה שלפיה הפונקציה אינה
 זו (נקודת זיכרון, נקודת פיתול)





3. היטוי $g = \frac{1}{2}$ של g אנך קודם

$$\frac{\ln a}{2}$$

הזכרנו שיהיה:

$$S = \int_0^{\frac{\ln a}{2}} \left(\frac{1}{2} - g'(x) \right) dx = \left[\frac{1}{2}x - g(x) \right]_0^{\frac{\ln a}{2}}$$

$$S = \left[\frac{\ln a}{4} - \frac{1}{2} \right] - \left[0 - \frac{1}{1+a} \right] = \boxed{\frac{\ln a}{4} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{2}}$$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים

אנ' תתפשר עליה.



5. א. נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{(x+2)(x-1)}\right)$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה: $g(x) = \ln(f(x))$.

היעזר בתשובותיך על השאלות בסעיף א וענה על התת-סעיפים (1)-(3) שלפניך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. פרט את שיקוליך.

ג. בעבור כל x המקיים $0 < f(x) < 1$, קבע אם המכפלה $f(x) \cdot g(x)$ חיובית. נמק את קביעתך.

פתרון:

א. (1) הציגנו את אגרוף הליצרה:

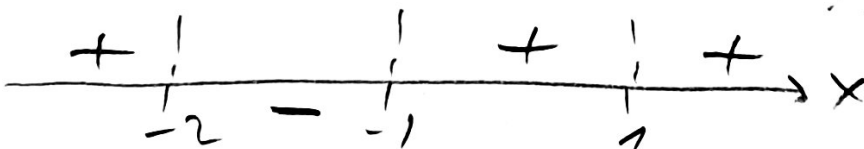
$$1) \frac{x^2-1}{(x+2)(x-1)} > 0$$

$$2) (x+2)(x-1) \neq 0 \rightarrow x \neq -2, 1$$

(פתור את אי השוויון):

$$x^2-1=0 \rightarrow x = \pm 1$$

האיזה אגרוף:



נמחזק על פסיכומטרי
ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה.



לסיכום:

$$\boxed{x < -2 \quad \text{או} \quad -1 < x < 2 \quad \text{או} \quad x > 2}$$

לפני שנגיש את תוצאתנו נזכיר את הפונקציה:

$$f(x) = \ln \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x-2)} = \ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right)$$

(2)

$$x \rightarrow -1 \rightarrow \ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right) \rightarrow -\infty \rightarrow \boxed{x = -1}$$

$$x \rightarrow -2 \rightarrow \ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right) \rightarrow \infty \rightarrow \boxed{x = -2}$$

נקיב בפונקציה הנגזרת ונאמר $x=1$ (נקודה) $\ln \frac{2}{3}$

כאשר יש נקודה אחת המצביה על נקודה ("חילו")
(1, $\ln \frac{2}{3}$)

אם הפונקציה אפסית? \Rightarrow $y=0$

$$\begin{aligned} x \rightarrow \infty \rightarrow f(x) \rightarrow \ln 1 = 0 \\ x \rightarrow -\infty \rightarrow f(x) \rightarrow \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln(x+2) \quad (3)$$

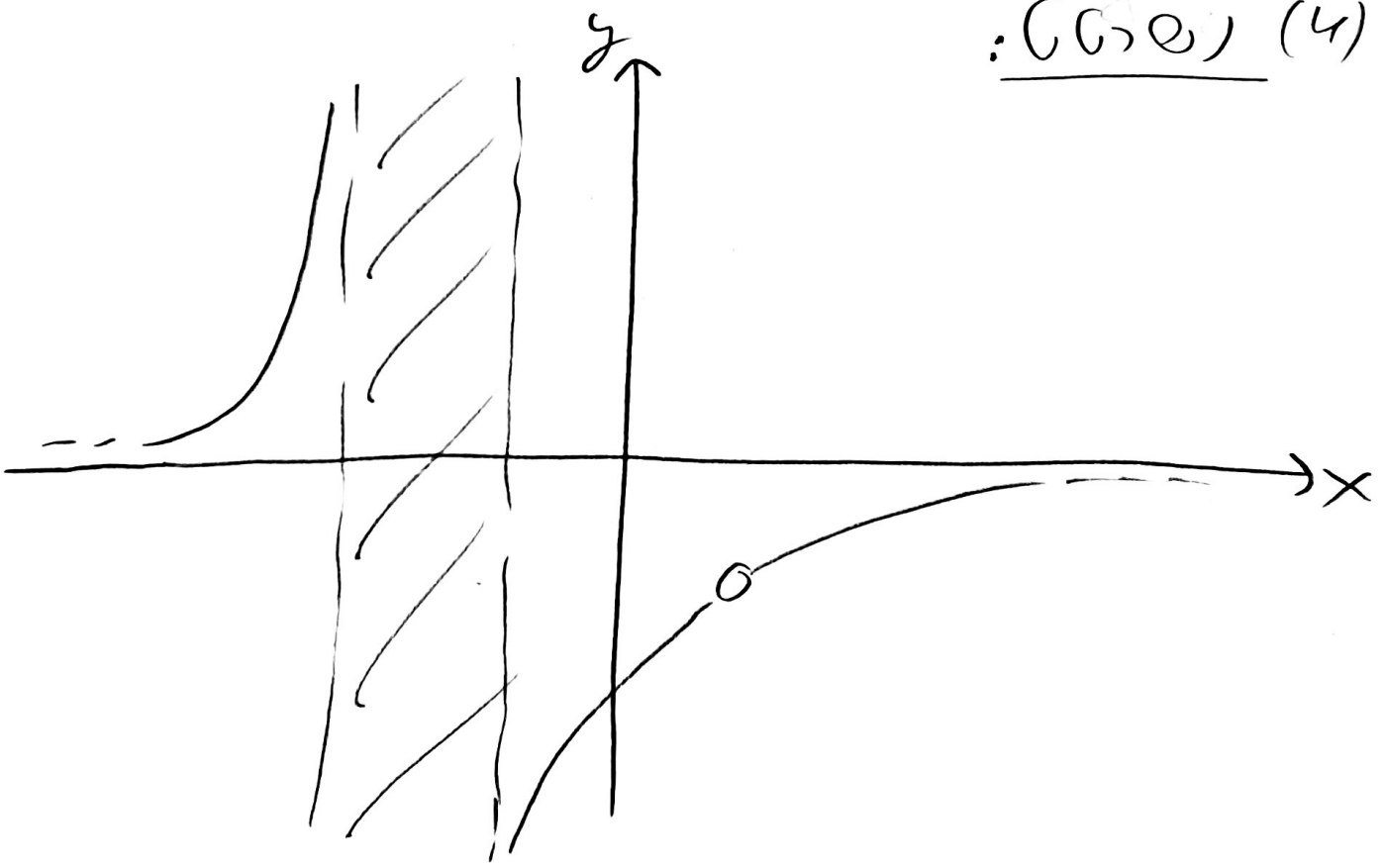
$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} \rightarrow \text{אין דילקום}$$



x	-3	-2	/	-1	0	1	2
$f'(x)$	+	?	/	/	+	/	+
$f(x)$	↗	/	/	/	↗	/	↗

תחומי עלייה: $x < -2$ או $-1 < x < 1$ או $x > 2$
 תחומי ירידה: אין

(4) נשאל:



נחידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
 אל תתפשר עליה.



$$g(x) = 1/h(f(x))$$

ג.

(1) הפונקציה $g(x)$ מוגדרת כאשר $f(x)$

$$\boxed{x < -2}$$

$$(2) \quad g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה של $f(x)$ ככל הנראה נחזקו
ככל הנראה $g(x)$ זכנו $f(x)$ ככל הנראה

וכאן:

$$\boxed{\begin{matrix} \text{תחום עליה: } x < -2 \\ \text{תחום ירידה: } x > -2 \end{matrix}}$$

(3) הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה של $f(x)$ כאשר $f(x)$ זכנו

$x \rightarrow x$ זכנו הפונקציה $g(x)$ פונקציה

למינוס אינסוף.

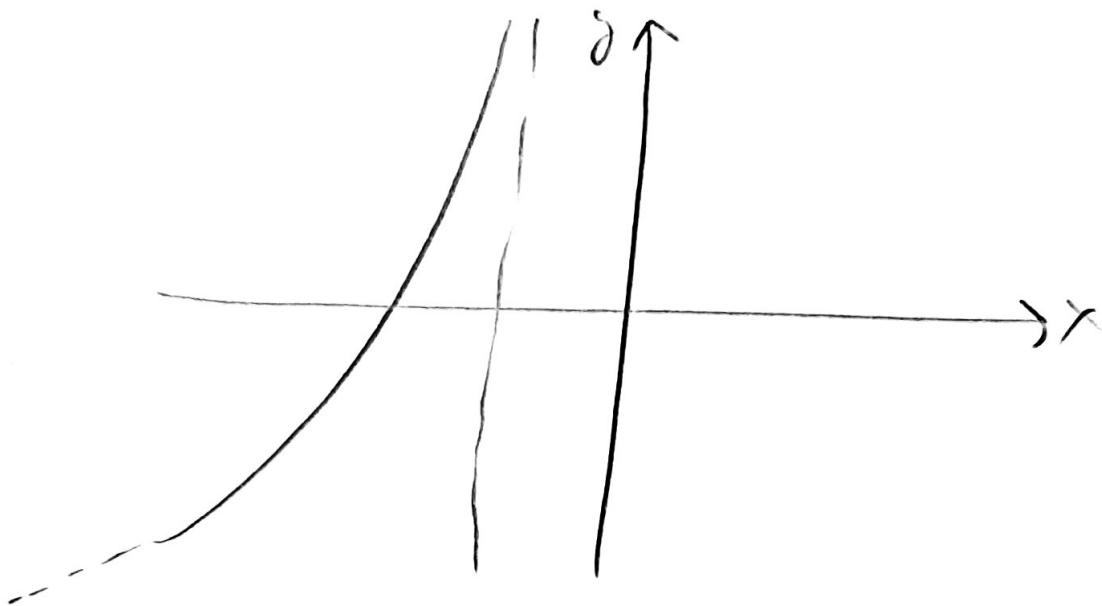
הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה של $f(x)$ כאשר $f(x)$ זכנו

$x \rightarrow x$ זכנו הפונקציה $g(x)$ פונקציה

למינוס אינסוף. כנראה יש לה נקודת מינוס



זכור ש $f(x) = x^2$ היא פונקציה זוגית:



ד. $f(x) = x^2$ היא פונקציה זוגית, ולכן
 הפונקציה $f(x) = x^2$ היא זוגית
 שמהיימא התנהגה הזו.
 כלומר המענה הוא לא

נחידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
 אל תתפשר עליה

