פתרון הבחינה
במתמטיקה

מועד מיוחד תשפ"א, 2021, שאלון: 35582

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע" :
יואל גבע, ארד טלמון, ריקי טל, אביחי כהן, קובי שרוני, אודי נעים, יאיר גולני, רועי גבע

1. נתון פרמטר a שונה מאפס.

א. הראה כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן מן הנקודה $(a\,,-1)$ שווה למרחק שלהן מן הנקודה $(-a\,,1)$ הוא קו ישר. הבע את משוואת הישר באמצעות a .

נתון הישר $y=-ax$.

ב. מצא לאֵילו ערכים של a , הישר הנתון והישר שמצאת בסעיף א ניצבים זה לזה.

הישר שמצאת בסעיף א והישר הנתון ניצבים זה לזה ומשיקים לשני מעגלים, M ו־ N . מרכזי שני המעגלים מונחים על ציר ה־ x , המעגל M נמצא מימין לציר ה־ y , והמעגל N נמצא משמאל לציר ה־ y .

נתון כי המרחק בין מרכזי המעגלים הוא 6 , והרדיוס של המעגל M גדול פי 2 מן הרדיוס של המעגל N .

ג. מצא את המשוואות של המעגלים M ו־ N .

נתון הישר $-x+\sqrt{17}\,y-8=0$. הישר משיק לשני המעגלים M ו־ N .

ד. מצא משוואה של ישר המשיק לשני המעגלים, נוסף על הישרים המשיקים המתוארים בשאלה. נמק את תשובתך.

פתרון:

א. המקום הגיאומטרי הוא האנך האמצעי לקטע המחבר את הנקודות:

$$m_{\text{קטע}}=\frac{1+1}{-a-a}=-\frac{1}{a}$$

$$\Downarrow$$

$$m_{\text{אנך}}=a$$

$$\Downarrow$$

$$\text{אמצע הקטע } M=\begin{cases} x_M=\frac{a-a}{2}=0 \\ y_M=\frac{1-1}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow M(0,0)$$

משוואת האנך האמצעי היא: $\boxed{y=ax}$

נראה דרך נוספת לפי השוואת מרחקים:

נקודה כללית על המקום הגיאומטרי היא (x,y)

נקבל:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+a)^2+(y-1)^2}$$

$$x^2-2ax+a^2+y^2+2y+1=x^2+2ax+a^2+y^2-2y+1$$

$$-2ax+2y=2ax-2y$$

$$4y=4ax$$

$$\boxed{y=ax}$$

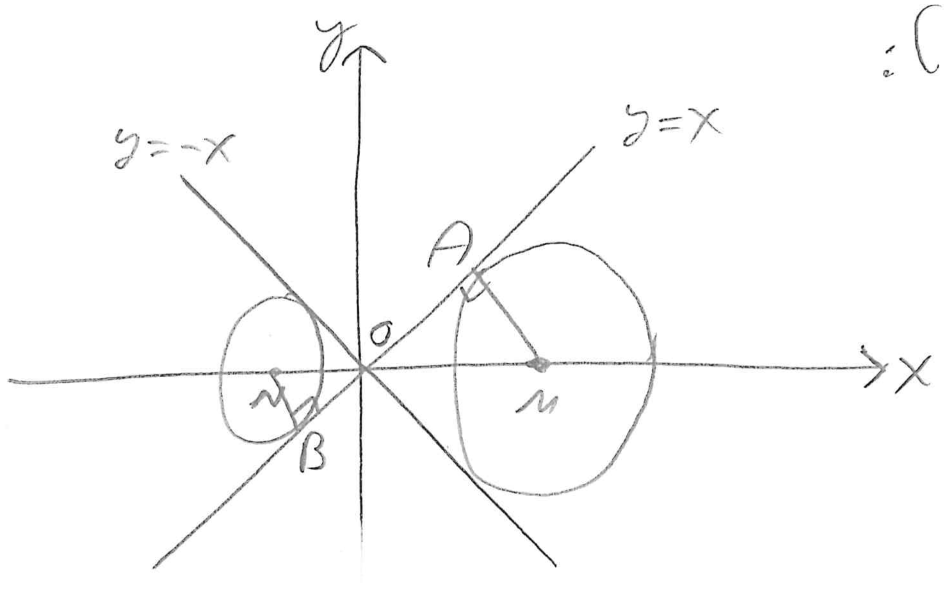
ב. תנאי ניצבות:

$$a\cdot(-a)=-1$$

$$a^2=1$$

$$\boxed{a=\pm 1}$$

ג. נשרטט:



נעביר רדיוסים MA ו- MB לנקודות ההשקה.

מש' קיימים: (1) $\angle MAO=\angle NBO=90^\circ$ (רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה)

(2) $\angle MOA=\angle NOB=45^\circ$ (קדקודיים)

$\Downarrow$

$\Delta MAO \sim \Delta NBO$ (משפט דמיון S.S)

$\Downarrow$

$\frac{AM}{BN}=\frac{MO}{NO}=\frac{AO}{BO}$ (יחס הצלעות המתאימות)

$\Downarrow$

$\frac{MO}{NO}=2 \Rightarrow MO=2NO$

נתון: $NO+MO=6$

$\Downarrow$

$3NO=6$

$NO=2$

מכאן שמרכז המעגל N הוא $(-2,0)$

ומרכז המעגל M הוא $(4,0)$

לפי משפט פיתגורס:

$AM^2+AO^2=OM^2$

המשולש שווה שוקיים, לכן:

$2AM^2=4^2$

$AM^2=8$

$\Downarrow$

$AM=\sqrt{8}$

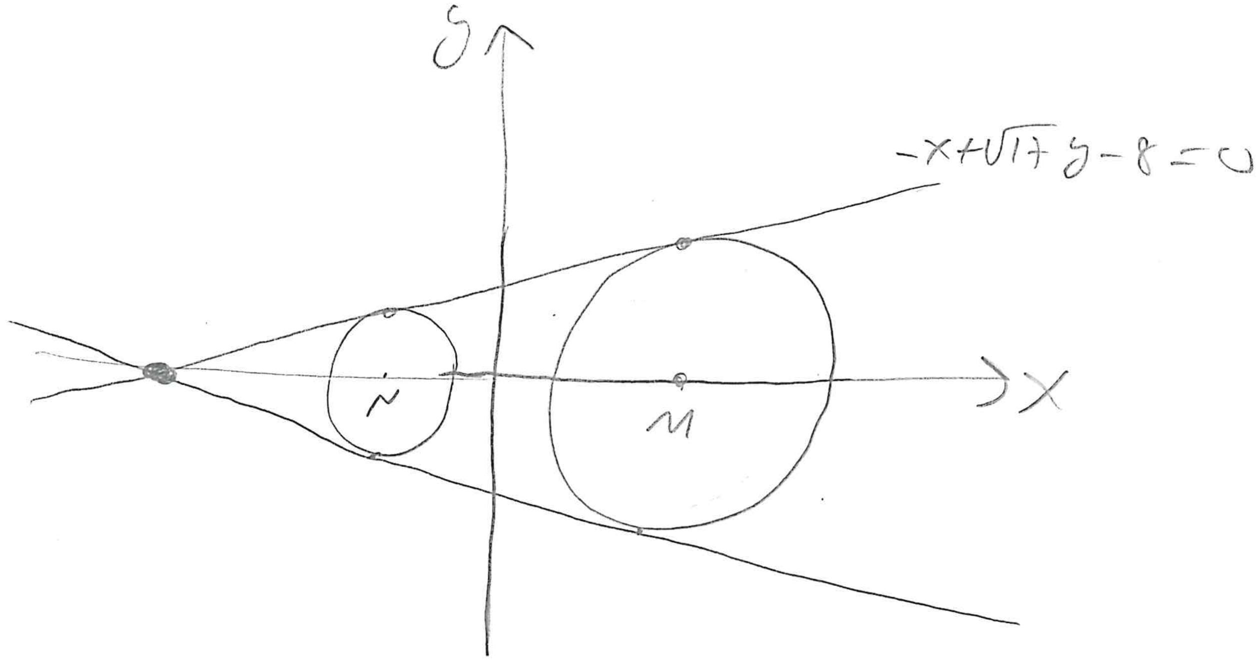
$BN=\frac{\sqrt{8}}{2}=\sqrt{2}$

משוואות המעגלים הן:

מעגל M: $(x-4)^2+y^2=8$

מעגל N: $(x+2)^2+y^2=2$

3. הישר $-x+\sqrt{17}y-8=0$ משיק לשני המעגלים. מכיוון שמרכזי המעגלים על ציר x הישר הנוסף סימטרי לישר הנתון ביחס לציר x. נראה כך בשרטוט:



השיפוע של הישר הנוסף הוא השיפוע הנגדי, ונקודת החיתוך עם ציר y נגדית לנקודת החיתוך עם ציר ה-y.

שיפוע הישר הנתון הוא $m = \frac{1}{\sqrt{17}}$

לכן שיפוע הישר המבוקש הוא $m = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

נקודת החיתוך עם ציר y היא $\left(0, \frac{8}{\sqrt{17}}\right)$

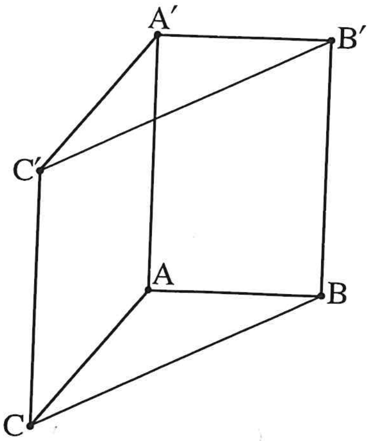
לכן נקודת החיתוך של הישר המבוקש היא $\left(0, -\frac{8}{\sqrt{17}}\right)$

משוואת הישר המבוקש היא:

$$y + \frac{8}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}(x - 0)$$

$$\sqrt{17}\,y + 8 = -x$$

$$\boxed{x + \sqrt{17}\,y + 8 = 0}$$



2. בסרטוט שלפניך מתוארת מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$, שהבסיס שלה הוא המשולש ABC .

נתון המספר k שבעבורו: $\overrightarrow{AA'} = (k-1, k-7, k+1)$, $\overrightarrow{AB} = (k-1, k, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (k+1, 0, k-3)$.

א. מצא את ערכו של k .

המקצועות AC ו־ BC מונחים על הישרים ℓ_{AC} ו־ ℓ_{BC} בהתאמה:

$$\ell_{AC} : \underline{x} = (8, -1, -1) + t(k+1, 0, k-3)$$
$$\ell_{BC} : \underline{x} = (4, 0, 2) + m(k, -k, -4)$$

ב. מצא את משוואת המישור $A'B'C'$.

ג. חשב את גודל הזווית $C'A'B'$.

ד. מצא את מרכז המעגל החוסם את המשולש $A'B'C'$. נמק.

פתרון:

א. המנסרה ישרה, לכן

$\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{AC}$

נשתמש בתנאי ניצבות:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k-1, k-7, k+1) \cdot (k-1, k, 3) = 0 \\ (k-1, k-7, k+1) \cdot (k+1, 0, k-3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k^2-2k+1+k^2-7k+3k+3=0 \\ k^2-1+k^2-2k-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2k^2-6k+4=0 \\ 2k^2-2k-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2-3k+2=0 \\ k^2-k-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=1 \text{ או } k=2 \\ k=-1 \text{ או } k=2 \end{cases}$$

רק עבור $k=2$ מתקיימים שני התנאים,

ולכן $\boxed{k=2}$

ב. נסדר את הנתונים עבור $k=2$:

$$l_{AC}: \underline{x} = (8,-1,-1)+t(3,0,-1)$$

$$l_{BC}: \underline{x} = (4,0,2)+m(2,-2,-4)$$

$$\vec{AA'} = (1,-5,3)$$

$$\vec{AB} = (1,2,3)$$

$$\vec{AC} = (3,0,-1)$$

המישור $A'B'C'$ מקביל למישור ABC

לכן יש להם אותו נורמל $\vec{AA'} = (1,-5,3)$

כדי למצוא נקודה על המישור $A'B'C'$ נמצא

את נקודה C ונעזרה את נקודה C':

$$(8,-1,-1)+t(3,0,-1) \underset{\Downarrow}{=} (4,0,2)+m(2,-2,-4)$$

$$\begin{cases} 8+3t = 4+2m \\ -1 = -2m \\ -1-t = 2-4m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t = 2m-4 \\ m = \frac{1}{2} \\ t = -3+4m \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 3t=-3 \\ t=-3+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=-1 \end{cases} \Rightarrow C(5,-1,0)$$

כעת, מתקיים במנסרה ישרה $\vec{AA'}=\vec{CC'}$

לכן: $\vec{CC'}=(1,-5,3) \Rightarrow C'(x,y,z)-(5,-1,0)=(1,-5,3)$

ונקבל: $C'(x,y,z)=(1,-5,3)+(5,-1,0)$

$$C'(6,-6,3)$$

נמצא את משוואת המישור $A'B'C'$:

$$x-5y+3z+d=0$$
$$\Downarrow$$
$$6-5\cdot(-6)+3\cdot 3+d=0$$
$$d=-45$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{x-5y+3z-45=0}$$

ב. במנסרה ישרה מתקיים: $\angle C'A'B'=\angle CAB$

נמצא את $\angle CAB$:

$$\cos\measuredangle CAB = \frac{\vec{AC}\cdot\vec{AB}}{|\vec{AC}|\cdot|\vec{AB}|}$$

$$\cos\measuredangle CAB = \frac{(3,0,-1)\cdot(1,2,3)}{|(3,0,-1)|\cdot|(1,2,3)|} = 0$$

מכיון:

$$\measuredangle CAB = 90^\circ$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\measuredangle C'A'B' = 90^\circ}$$

3. מרכז המעגל החוסם ל- המשולש $A'B'C'$ הוא אמצע היתר $B'C'$ (זוית היקפית ישרה נשענת על היתר).

צריך למצוא את קדקוד B'.

נתחיל בקדקוד A:

$$\vec{AC} = C - A \Rightarrow (3,0,-1) = (5,-1,0) - A(x,y,z)$$

$$A(x,y,z) = (5,-1,0) - (3,0,-1) = (2,-1,1)$$

$$A(2,-1,1)$$

נמשיך לקדקוד B:

$$\vec{AB} = B - A \Rightarrow (1,2,3) = B(x,y,z) - (2,-1,1)$$

$$B(x,y,z) = (1,2,3) + (2,-1,1) = (3,1,4)$$

נמצא את קדקוד B':

$$\vec{BB'} = \vec{AA'} \Rightarrow B'(x,y,z)-(3,1,4)=(1,-5,3)$$

$$B'(x,y,z) = (1,-5,3)+(3,1,4) = (4,-4,7)$$

לבסוף נמצא את אמצע הצלע $B'C'$:

$$x_M = \frac{x_{B'}+x_{C'}}{2} = \frac{6+4}{2}=5$$

$$y_M = \frac{y_{B'}+y_{C'}}{2} = \frac{-6-4}{2}=-5$$

$$z_M = \frac{z_{B'}+z_{C'}}{2} = \frac{3+7}{2}=5$$

לסיכום, מרכז המעגל החוסם את משולש $A'B'C'$ הוא בנקודה $\boxed{(5,-5,5)}$

3. נתונה משוואה I: $w^2-4iw-4+2i=0$. w הוא מספר מרוכב.

א. פתור את משוואה I .

נתונה משוואה: $z^3=a+bi$. z הוא מספר מרוכב, a ו־ b הם מספרים ממשיים.

ידוע כי אחד מפתרונות משוואה זו מתאים לנקודה הנמצאת במישור גאוס על הציר המדומה, בחלקו השלילי.

ב. אחת מן הטענות 1–3 שלפניך נכונה. קבע איזו ונמק את קביעתך.

1. $a=0\ ,\ b>0$
2. $a<0\ ,\ b=0$
3. $a\neq 0\ ,\ b\neq 0$

נתונה משוואה II: $z^3=2(w_1+w_2)$, w_2 ו־ w_1 הם הפתרונות של משוואה I .

ג. פתור את משוואה II .

פתרונות משוואה II מייצגים קודקודים של משולש במישור גאוס.

ד. סרטט את המשולש שהתקבל במישור גאוס.

נתון מספר מדומה $u=di$, d הוא פרמטר ממשי.

מוסיפים את u לכל אחד מן הפתרונות של משוואה II כך שהמספרים שמתקבלים מייצגים משולש חדש.

ה. מצא את הערך של d שבעבורו המעגל החוסם את המשולש החדש עובר דרך ראשית הצירים.

מצא את שתי האפשרויות.

פתרון:

א.

$w^2-4iw-4+2i=0$

$w_{1,2}=\frac{4i\mp\sqrt{(4i)^2-4(-4+2i)}}{2}=\frac{4i\mp\sqrt{-16+16-8i}}{2}$

$w_{1,2}=\frac{4i\mp\sqrt{-8i}}{2}$

נחשב את $\sqrt{-8i}$:

$\sqrt{-8i}=x+yi\ /()^2$

$-8i=x^2+2xyi-y^2$

$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2xy=-8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2=y^2 \\ y=-\frac{4}{x} \end{cases} \Rightarrow x^2=\frac{16}{x^2} \Rightarrow x^4=16$

$\Leftarrow$ $x=-2$ או $x=2$

עבור $x=2$ נקבל $y=-2$ ועבור $x=-2$ נקבל $y=2$

נחזור למשוואה:

$$w_{1,2}=\frac{4i\mp(2-2i)}{2}=2i\mp(1-i)$$

ונקבל $\boxed{w_2=-1+3i \quad , \quad w_1=1+i}$

ב. נקודה על הציר המדומה, בחלק העליון היא $(0,y)$ כאשר $y>0$. היא מייצגת את המספר המדומה $z=0+yi$.

נציב במשוואה:

$$(0+yi)^3=a+bi$$

$$\Downarrow$$

$$-y^3i=a+bi$$ נזכור כי $i^3=-i$ ונקבל:

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=-y^3 \Rightarrow b<0 \end{cases}$$

מכאן שהטענה הנכונה היא טענה 1.

ג. כעת נתונה המשוואה:

$$z^3=2(1+i-1+3i)$$

$$z^3=8i$$

$$\Downarrow$$

לפי סעיף ב', אחד הפתרונות של המשוואה

הוא $x+yi$ כאשר $x=0$, $y^3=-8$

כלומר $z=y$, והפתרון הוא $z=-2i$

מכיוון שזו משוואה ממעלה שלישית יש עוד

שני פתרונות שיש להם אותו ערך מוחלט (2)

והזווית גדולה או קטנה ב- $120°$ $\left(\frac{360°}{3}\right)$

מהזווית של $-2i$, שהיא $270°$

מכאן שנקבל את הפתרונות הבאים:

$$z=2\,cis150° \quad , \quad z=2\,cis30°$$

נרשום את הפתרונות בהצגה ישרה:

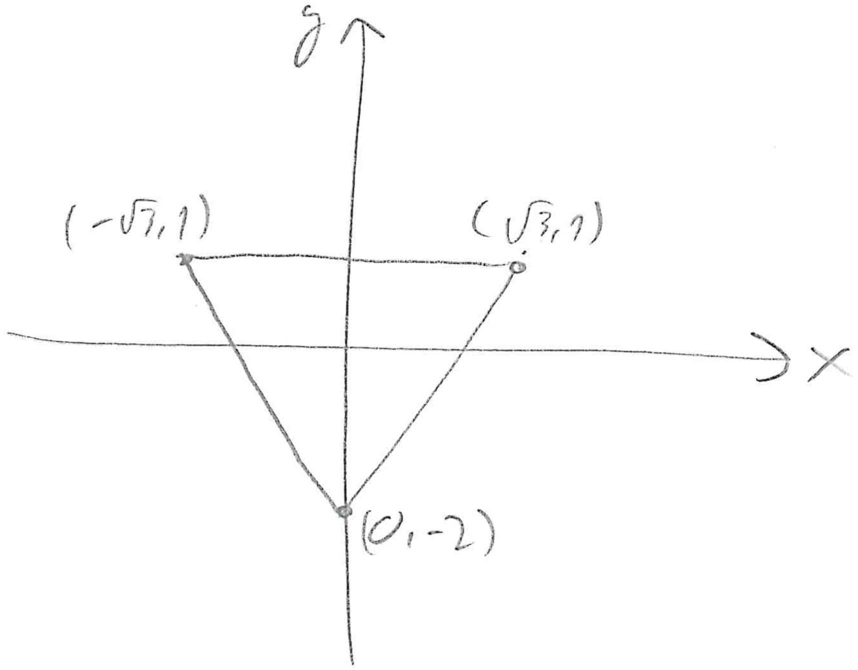
$$2\,cis150° = 2\cos150° + i\,2\sin150° = -\sqrt{3}+i$$

$$2\,cis30° = 2\cos30° + i\cdot 2\sin30° = \sqrt{3}+i$$

לסיכום, הפתרונות הם:

$$\boxed{z=-\sqrt{3}+i \ , \ z=\sqrt{3}+i \ , \ z=-2i}$$

3. נשרטט את המשולש:



ה. המעגל החוסם את המשולש הנתון היה עם רדיוס $R=2$ ומרכזו בראשית הצירים.

הוספה של מספר מדומה $u=di$ לכל אחד מהמספרים מעלה את המעגל או מורידה את המעגל במאונך. כדי שהוא יעבור בראשית ההזזה האנכית צריכה להיות שווה לרדיוס המעגל (2)

לכן $\boxed{d=2 \text{ או } d=-2}$

(אפשר לרשום את משוואת המעגל החוסם שהיא $x^2+y^2=4$ ולהסביר משם את ההזזה)

4. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא אי־זוגית.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון הישר: $g(x)=a\cdot x$, a הוא פרמטר.

ידוע כי $g(1)=f(1)$.

ג. (1) מצא את a .

(2) חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין הישר $g(x)$.

4א(1)

e^x ו- e^{-x} הם ביטויים חיוביים

עבור כל ערך של x ולכן סכומם חיובי

ולכן המכנה לא מתאפס לכל ערך של x

מסקנה: הפונ' מוגדרת לכל x.

2)

$$f(x)=\frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}}=\frac{\frac{e^{2x}-1}{e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}}=\frac{\cancel{e^x}(e^{2x}-1)}{\cancel{e^x}(e^{2x}+1)}$$

ניתן לראות את הפונ' גם כך:

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

(נשים לב כי תחום הגדרה לא השתנה)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}}{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}}=\frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

4 א(4)

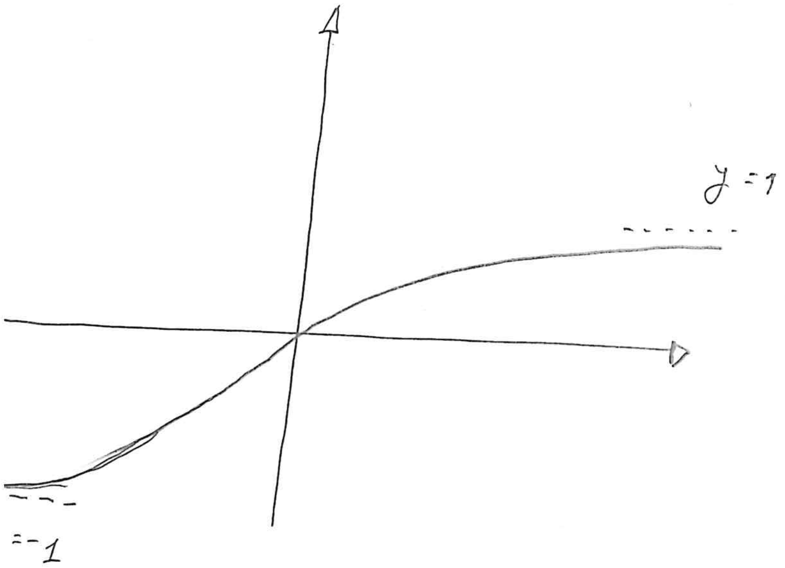
נוכיח כי: $f(-x) = -f(x)$

$$\frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}}$$

מ.ש.ל

ד)



* מ מיון והפוך
אי זוגית ומוגדרת
לכל x היא
עוברת בראשית הצירים.

ה)

$$g(1) = f(1)$$

$$a = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = 0.7616$$

4 א(2)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

אנכיות: אין אופקיות: $\boxed{y_{\to}=1}$ $\boxed{y_{\leftarrow}=-1}$

(3)

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-(e^{2x}-1)2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1-e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

המונה תמיד חיובי (e^{2x} חיובי תמיד לכל ערך של x)

המכנה תמיד חיובי.

הנגזרת חיובית תמיד לכל ערך של x ולכן הפונ'
עולה לכל x

$\boxed{\text{ירידה: אין} \quad \text{עליה: לכל } x}$

ג(2)

$$f''(x)=\frac{8e^{2x}(e^{2x}+1)^2-4e^{2x}\cdot 2(e^{2x}+1)\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{8e^{2x}(e^{2x}+1)(e^{2x}+1-2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{8e^{2x}(e^{2x}+1)(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^4}$$

$$8e^{2x}(e^{2x}+1)(1-e^{2x})=0$$
$$e^{2x}=1$$
$$x=0$$

x	$x<0$	$0<x$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

מכיוון והפונ' קעורה כלפי מטה עבור $0<x$, הישר נמצא מתחת לפונ' עבור $0<x$, מכיוון ששתי הפונ' אי זוגיות מתקיימת סימטריה בשני השטחים ולכן נחשב את השטח ברביע הראשון ונכפיל אותו ב-2.

$$2\cdot\int_0^1\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}-0.7616x\right)dx$$

לפי הנוסחה:

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+c$$

$$2\cdot\left(\ln(e^x+e^{-x})-\frac{0.7616x^2}{2}\right]_0^1$$

$$2\cdot\left[(0.7461)-(0.6931)\right]=2\cdot 0.053=\boxed{0.106}$$

.5 נתונה משפחת הפונקציות: $f(x) = x \cdot (\ell n(x))^n$, $n \geq 1$ הוא מספר טבעי.

א. ענה על הסעיפים שלפניך בעבור n זוגי ובעבור n אי־זוגי. אם יש צורך, בטא את תשובותיך באמצעות n .

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

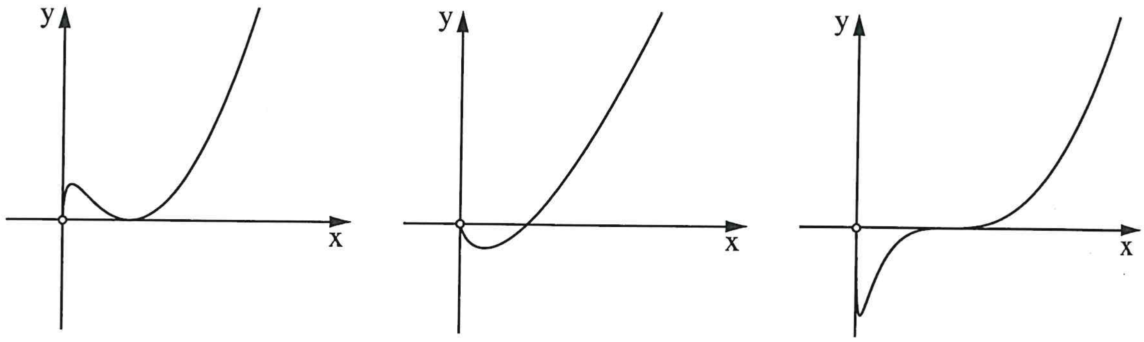
(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. כל אחד מן הגרפים א–ג שלפניך מתאר פונקציה במשפחה.

קבע איזה גרף יכול להתאים ל־ $n = 1$, איזה גרף יכול להתאים ל־ $n = 2$ ואיזה גרף יכול להתאים ל־ $n = 3$.

נמק את קביעותיך.



גרף ג   גרף ב   גרף א

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{x \cdot (\ell n(x))^2}$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{e}$ ו־ $x = \frac{1}{e^2}$.

א(1) $x>0$ (תוכן הלוג חיובי)

א(2)+א(3)

$u = x \quad u' = 1$

$v = (\ln(x))^n \quad v' = \frac{n \cdot (\ln(x))^{n-1}}{x}$

$f'(x) = (\ln(x))^n + n(\ln(x))^{n-1}$

$f'(x) = (\ln(x))^{n-1}(\ln(x) + n)$

נשווה את הנגזרת לאפס על מנת למצוא חשודים כקיצון

$f'(x)=(\ln(x))^{n-1}(\ln(x)+n)$

הערה: יש לשים ♡ שעבור $n=1$ המעריך של הביטוי $(\ln(x))^{n-1}$ מתאפס ולכן נפריד ל 3 מצבים:

I $n=1$

II n זוגי

III n אי-זוגי $(n\neq 1)$

מצב I $(n=1)$

$f'(x)=\ln(x)+1=0$

$\ln(x)=-1$

$x=\frac{1}{e}$

x	0	$<x<$ (e^{-2})	e^{-1}	$<x$ (1)
$f'(x)$	///	$-$	0	$+$
$f(x)$	///	↘	מינ'	↗

עליה: $\frac{1}{e}<x$
ירידה: $0<x<\frac{1}{e}$

$f''(x)=\frac{1}{x}$ $f''(\frac{1}{e})=(+)\rightarrow$ מינ'

$f(e^{-1})=-\frac{1}{e}$

$\boxed{(e^{-1},-e^{-1})\ min}$

מצב II (n זוגי)

$f'(x)=(\ln(x))^{n-1}(\ln(x)+n)=0$

$\ln(x)=0$ $\boxed{x=1}$

$\ln(x)+n=0$ $x=e^{-n}$

x	0	$<x<$ (e^{-2n})	e^{-n}	$<x<$ ($e^{-0.5n}$)	1	$<x$ (2)
$f'(x)$	///	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	///	↗	max	↘	מינ'	↗

$f'(e^{-2n})=(-2n)^{n-1}(-2n+n)=(-)(-)=(+)$

$f'(e^{-0.5n})=(-0.5n)^{n-1}(-0.5n+n)=(-)(+)=(-)$

$f'(2)=(\ln(2))^{n-1}(\ln(2)+n)=(+)(+)=(+)$

$f(e^{-n})=e^{-n}\cdot(-n)^{n}$

$f(1)=0$

max $(e^{-n}, e^{-n}\cdot(-n)^{n})$
min $(1,0)$

עליה: $1<x$ או $0<x<e^{-n}$ ירידה: $e^{-n}<x<1$

מצב III - ((n+1) אי"ז n)

x	0	$< x <$	e^{-n}	$< x <$	1	$< x$
		תחב e^{-2n}		$e^{-0.5n}$		2
$f'(x)$	///	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	///	↘	min	↗	פיתול שמשנה אבס	↗

$$(\ln(x))^{n-1}(\ln(x)+n)=0$$

$\ln(x)=0$ $\quad\quad$ $\ln(x)+n=0$

$x=1$ $\quad\quad$ $x=e^{-n}$

$$\boxed{\left(e^{-n},\ e^{-n}\cdot(-n)^n\right)_{min}}$$

נא לשים ♡
שיש פיתול בלי שינוי אפס
בנקודה $(1,0)$

$$f'(e^{-2n})=(-2n)^{n-1}(-2n+n)=(+)\cdot(-)=(-)$$

$$f'(e^{-0.5n})=(-0.5n)^{n-1}(-0.5n+n)=(+)(+)=(+)$$

$$f'(2)=(\ln(2))^{n-1}(\ln(2)+n)=(+)(+)=(+)$$

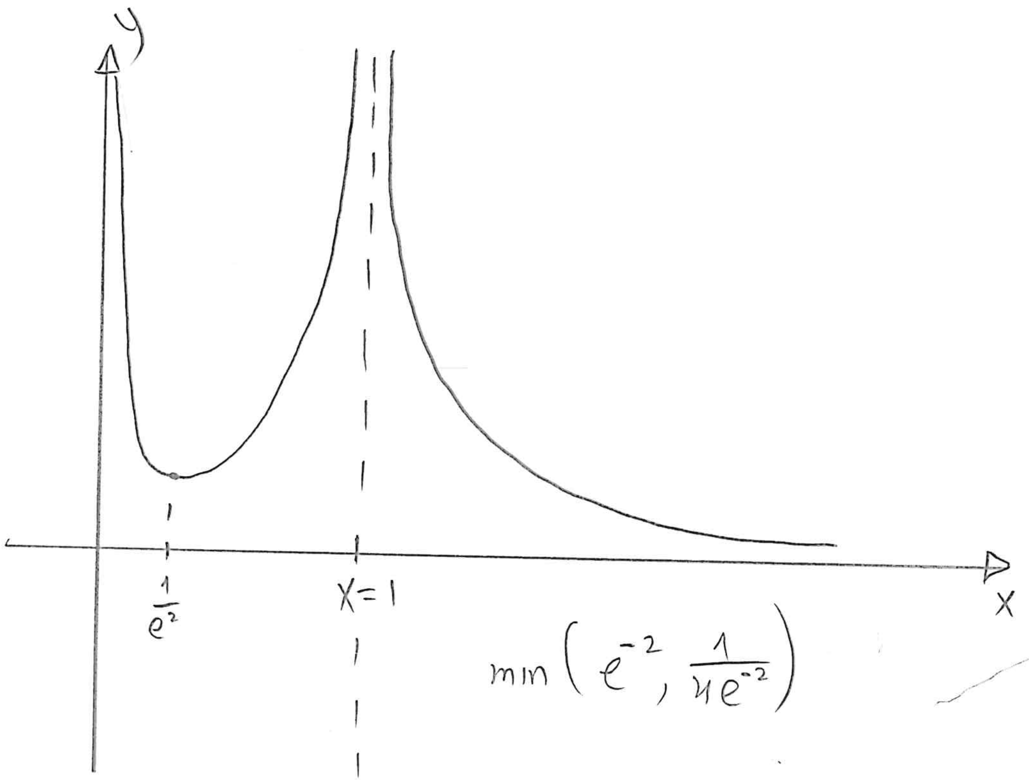
עליה:	$e^{-n}<x$
ירידה:	$0<x<e^{-n}$

ב
$n=1$ ⟵ גרף ב' (מצב I מסעיף קודם)
$n=2$ ⟵ גרף ג' (מצב II מסעיף קודם)
$n=3$ ⟵ גרף א' (מצב III מסעיף קודם)

ג
נתון: $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ עבור $n=2$. כידוע טרנס' IS
הפוכה לה תחום עליה לירידה להיפך. (הסיבה היא שמקיים $g'(x)=-\dfrac{f'(x)}{(f(x))^2}$)

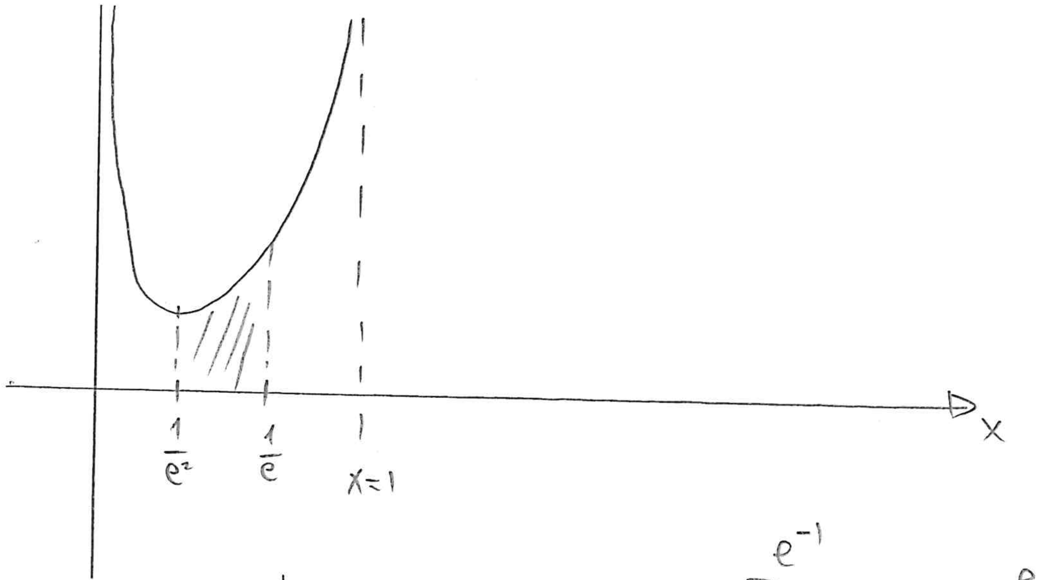
נצייר את $g(x)$ מתוך התבוננות בגרף ג' $(n=2)$
יש לשים ♡ ש: $f(0^+)=f(1^+)=f(1^-)=0^+$ לכן בכל $g(x)$
נקבל בשיעורי x אלו $\frac{1}{0^+}$, משמע ∞.

יש לשים ♡ ש: $f(\infty)=\infty$ לכן $g(\infty)=\frac{1}{\infty}=0^+$



$\min\left(e^{-2}, \frac{1}{4e^{-2}}\right)$

ב



$$\int_{e^{-2}}^{e^{-1}} (g(x)-0)\,dx = \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} (\ln(x))^{-2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln(x))^{-1}}{-1}\right]_{e^{-2}}^{e^{-1}} = \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_{e^{-2}}^{e^{-1}} =$$

$$= \left(-\frac{1}{\ln(e^{-1})}\right) - \left(-\frac{1}{\ln(e^{-2})}\right) = 1 + -\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

השטח הנדרש שווה $\frac{1}{2}$