

פתרון הבחינה

במתמטיקה

מועד מיוחד תשפ"א, 2021, שאלון: 35581

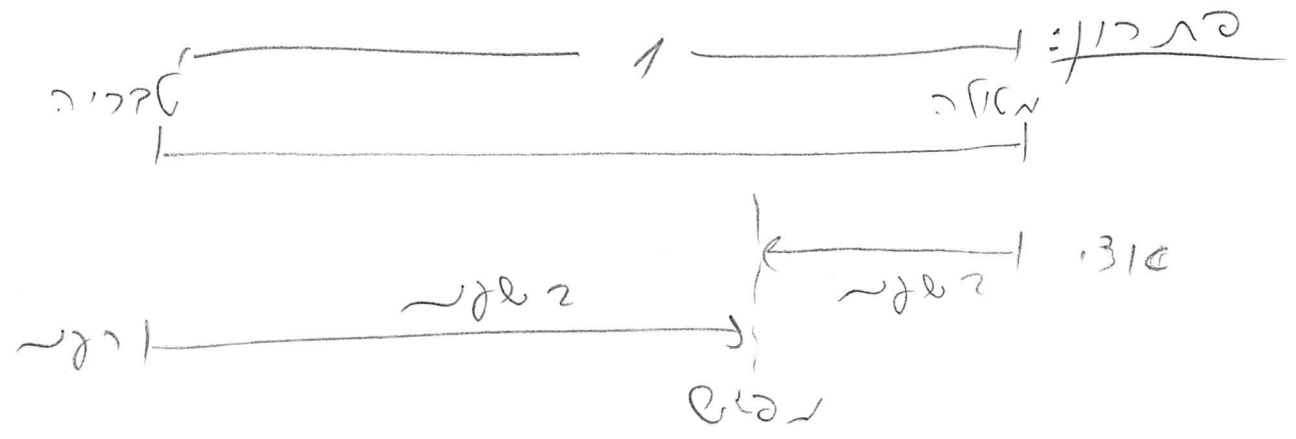
מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע":
יואל גבע, ארד טלמון, ריקי טל, אביחי כהן, קובי שרוני, אודי נעים, יאיר גולני, רועי גבע

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. ביום ראשון יצא אודי ברכיבה על אופניים ממטולה לכיוון טבריה. באותה שעה בדיוק יצאה רעות ברכיבה על אופניים מטבריה לכיוון מטולה, ורכבה באותה הדרך. כל אחד מן הרוכבים רכב במהירות קבועה. כעבור 2 שעות נפגשו שני רוכבי האופניים.
- הזמן שנדרש לאודי כדי לעבור את הדרך ממטולה לטבריה גדול ב- 54 דקות מן הזמן שנדרש לרעות לעבור דרך זו.
- מצא את היחס בין מהירות הרכיבה של רעות ובין מהירות הרכיבה של אודי.
 - מצא כמה זמן נדרש לכל אחד מן הרוכבים כדי לעבור את כל הדרך שבין מטולה ובין טבריה.
- ביום שני יצאו 2 רוכבי האופניים יחד מטבריה לכיוון מטולה באותו הזמן. הם רכבו באותה הדרך ובאותן המהירויות כמו ביום ראשון. רעות הגיעה למטולה ומייד הסתובבה וחזרה לכיוון טבריה. היא נפגשה עם אודי לאחר שעברה מרחק של 7 ק"מ ממטולה.
- מצא את אורך הדרך בין מטולה ובין טבריה.
 - מצא את המהירות שבה רכב כל אחד משני הרוכבים.

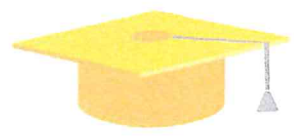


נסת / אודי כן הצגין ביגודי מתקן - 1
 ונסת / רעות הצגין על מהירות של 100 קמ"ש
 מהירות אודי היא x - א.
 הצגין על מהירות של 100 קמ"ש רעות היא x + 54/60
 כלומר x + 0.9.
 הם הגיעו למטולה יחד, מהירות אודי היא x + 0.9

⇓

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



נרשום משוואה דרכים:

$$2 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x+0.9} = 1$$

אפשר:

$$2(x+0.9) + 2x = x(x+0.9)$$

$$2x + 1.8 + 2x = x^2 + 0.9x$$

$$x^2 - 3.1x - 1.8 = 0$$

אפשר נקדקא: $x = 3.6$ ו $x = -0.5$

הפתרון הרשום הוא $x = 3.6$ $\Rightarrow x + 0.9 = 4.5$
הוא הפתרון היחיד:

$$\frac{4.5}{3.6} = \frac{5}{4}$$

אם ניקח את המשוואה $x + 0.9 = 4.5$ ונפתור אותה נקבל $x = 3.6$ וזהו הפתרון היחיד.

ב. נניח $x = 3.6$ ונבדוק אם זהו הפתרון היחיד.

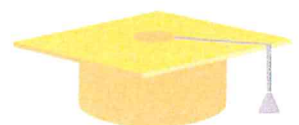
אם נניח $x = -0.5$ ונבדוק אם זהו הפתרון היחיד.

ג. נניח $x = 3.6$ ונבדוק אם זהו הפתרון היחיד.

כאשר $x = 3.6$ ו $x = -0.5$ הם הפתרונות היחידים.

אם נניח $x = 3.6$ ונבדוק אם זהו הפתרון היחיד.

אם נניח $x = -0.5$ ונבדוק אם זהו הפתרון היחיד.



$$\frac{S+7}{S-7} = \frac{5}{4} \Rightarrow 4S+28 = 5S-35$$

$$S = 63$$

3. נחשב את המהירות:

$$V = \frac{63}{3.6} = 17.5 \text{ ד"ש}$$

$$V = \frac{63}{4.5} = 14 \text{ ד"ש}$$



2. נתונה סדרה חשבונית ובה $2n + 1$ איברים (n הוא מספר טבעי).
 איברי הסדרה הם $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n+1}$ והפרש הסדרה הוא d .
- א. הוכח כי ההפרש בין סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ובין סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שווה לאיבר האמצעי בסדרה.
- נסמן ב- T את ההפרש בין סכום האיברים ב- n המקומות האחרונים ובין סכום האיברים ב- n המקומות הראשונים.
- ב. הבע את T באמצעות d ו- n .
- נתון:
- סכום כל איברי הסדרה שווה לסכום האיברים ב- $2n$ המקומות האחרונים.
 - סכום האיברים הראשון והאחרון הוא 204.
 - $T = 3,468$.
- ג. מצא כמה איברים יש בסדרה.

2(c) נתון האיברי הסדרה כאלו: $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots, a_{2n+1}$
 $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2n}$

ניתן לראות ש: $a_3 - a_2, a_5 - a_4, \dots$ שווים ל- d , ולכן ניתן לסכום את כל האיברים (למעט a_1) עם כלומר נוסף את a_1 (נקרא) $S_{2n} - S_n = a_1 + nd$ שזה האיבר האמצעי בסדרה

* ניתן לפתור בקצת אחרת באופן הבא:

$$S_{2n} - S_n =$$

$$\frac{(k+1)}{2} (a_1 + a_{2n+1}) - \frac{n}{2} (a_1 + d + a_{2n})$$



2(א)

$$\sum_{s.k} - \sum_3 = \frac{(n+1)}{2} (a_1 + a_{2n+1}) - \frac{n}{2} (a_1 + a_{2n+1})$$

$$\sum_{s.k} - \sum_3 = \left(\frac{n+1}{2} - \frac{n}{2} \right) (a_1 + a_{2n+1}) = \frac{1}{2} (a_1 + a_{2n+1})$$

הסדרה בעלת מספר אי זוגי של איברים היא סדרה חשבונית (הראשון והאחרון הן האיבר הראשון והאחרון).

2(ב)

נתון: $n = 2$ איברי הסדרה הראשונים והאחרונים
באינסוף הקטן:

$$a_{n+2}, a_{n+3}, \dots, a_{2n+1}$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

נ"ס $a_{n+2} - a_1 = (n+1)d$ (אנחנו יודעים את a_1)

לפי $a_{n+3} - a_2, a_{n+4} - a_3, \dots, a_{2n+1} - a_n$ וכן הלאה, ולכן סה"כ (קרא $n \cdot d$)

↑
התפתחות
↑
סדרה חשבונית

$$| T = n(n+1)d |$$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



2 (א)
מבין אסכום Σ איברי הסדרה שהיא סכום של $n+1$ האיברים *
שלה אסכום האיברים במזדמן המקומות האחרונים a_1 תמיד יהיו 0.

* עפי' ינתן שסכום האיברים הראשון והאחרון 204
(יקבל):
 $0 + a_{2n+1} = 204$

$$\Downarrow$$

$$2nd = 204 \quad | :2$$

$$I: nd = 102$$

$$II: 3,468 = n(n+1)d$$

$$\frac{II}{I}: n+1 = \frac{3468}{102} \rightarrow n = 33$$

אספר האיברים בסדרה היא $2 \cdot 33 + 1 = \boxed{67}$



3. בחממה גדולה של פרחים יש אך ורק פרחים לבנים וסגולים. ההסתברות לבחור באקראי שני פרחים לבנים גדולה פי 2.25 מן ההסתברות לבחור באקראי שני פרחים סגולים.
- א. חשב את אחוז הפרחים הסגולים בחממת הפרחים.
- ב. בחממה זו, לכמה מן הפרחים הלבנים, ורק להם, יש עלים גדולים. לשאר הפרחים יש עלים קטנים. ירדן בחרה באקראי שני פרחים. ההסתברות שירדן בחרה פרח אחד שיש לו עלים קטנים ופרח אחד שיש לו עלים גדולים היא 0.455.
- ג. (1) חשב את אחוז הפרחים בחממה שיש להם עלים גדולים.
(2) חשב את ההסתברות שירדן בחרה פרח סגול, אם ידוע שרק לאחד מן הפרחים שהיא בחרה יש עלים גדולים.
- ד. כינרת הכינה זר מ־7 פרחים לבנים בדיוק, שנבחרו באקראי בחממה. חשב את ההסתברות שיש בזר פרח אחד לפחות שיש לו עלים גדולים ופרח אחד לפחות שיש לו עלים קטנים.

פתרון:

א. נסמן את ההסתברות לבחור באקראי פרח לבן ב- x ואת ההסתברות לבחור באקראי פרח סגול ב- $1-x$. האנטי-קורלציה זכרון מניח שההסתברויות הכוללת כמות ההסתברות לבחור שני פרחים לבנים היא x^2 ושני פרחים סגולים היא $(1-x)^2$. מכאן:

$$x^2 = 2.25(1-x)^2$$

$$\downarrow$$

$$x = 1.5(1-x)$$

$$\downarrow$$

$$x = 1.5 - 1.5x$$

$$2.5x = 1.5$$

$$x = 0.6$$

$$\downarrow$$

$$1-x = 0.4$$

$$x^2 = 2.25(1-x)^2$$

$$\downarrow$$

$$x = -1.5(1-x)$$

$$\downarrow$$

$$x = -1.5 + 1.5x$$

$$0.5x = 1.5$$

$$x = 3$$

לא אפשרי

לסיכום, בהנחה אלו פרחים סגולים



ה. (א) אהמרה יש צ' סוגים של פרחים:
 פרחים פזלים עם עליהם זלנים
 פרחים זכניים עם עליהם זכניים
 פרחים זכניים עם עליהם זלנים.
 נכחו את ההסתברות זכאוי פרח זכן עם עליהם
 זכניים ק-פ. ההסתברות זכאוי פרח זכאוי זלן
 עליהם זכניים תהיה פ-ז.
 ההסתברות זכאוי בזיוק פרח זכן עם עליהם זכניים

תהיה: $P(1-P) + (1-P) \cdot P$

$2P - 2P^2 = 0.455$

$2P^2 - 2P + 0.455 = 0$

נכאין:

$P = \frac{13}{20}$

$P = \frac{7}{20}$

$\frac{13}{20}$ זכאוי ל-0.6 זכאוי לזכאוי.

לכיוון, אחוז הפרחים באהמה שיש להם

עליהם זכניים הוא $\frac{7}{20} \cdot 100 = \boxed{35\%}$

(ב) נשאלנו בנוסחה להסתברות מתאים:

$$P(\text{זכאוי פרחים זכניים} / \text{זכאוי פרחים זכניים}) = \frac{P(\text{פרחים זכניים} \cap \text{זכאוי פרחים זכניים})}{P(\text{פרחים זכניים זכניים})}$$



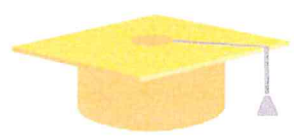
$$P(\text{פיה אחת / פיה שני} / \text{עם עיני גולד}) = \frac{0.4 \cdot \frac{7}{20} + \frac{7}{20} \cdot 0.4}{0.455} = \boxed{\frac{8}{13}}$$

ד. נחשב יחד ההסתברות של פיה אחת עם עיני גולד / פיה שני יחד עם עיני כסף:

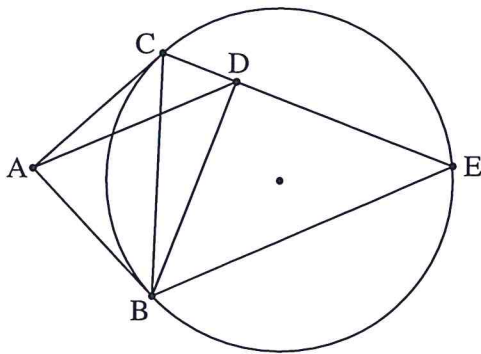
$$P(\text{פיה אחת / עיני גולד}) = \frac{P(\text{פיה אחת} \cap \text{עיני גולד})}{P(\text{עיני גולד})} = \frac{\frac{7}{20}}{0.6} = \frac{7}{12}$$

ההסתברות של הסבבה יהיו עם עיני כסף: $(\frac{7}{12})^7$
 ההסתברות של הסבבה יהיו עם עיני גולד: $(\frac{5}{12})^7$
 כעת, קצת שאלות, נוכל לבנות את השאלה:

$$P = 1 - \left(\left(\frac{7}{12}\right)^7 + \left(\frac{5}{12}\right)^7 \right) = \boxed{0.9748}$$



4. מנקודה A יוצאים שני ישרים, המשיקים למעגל בנקודות B ו-C (ראה סרטוט).



נתון כי $\angle CAB = 90^\circ$.

BE ו-CE הם מיתרים במעגל.

המעגל החוסם את המשולש ABC חותך את המיתר CE בנקודה D.

א. הוכח כי $BD = DE$.

ב. הוכח כי $\triangle ADB \sim \triangle CEB$.

ג. הוכח כי $S_{\triangle CEB} = 2 \cdot S_{\triangle ADB}$.

פתרון:

נימוך

נתון

נתון

נתון

שני משקים אנך ליתר היוצאים מאותו נקודה שלילי באותו צד. לפי 1

משולש מחזק זוג של מונחם שלילי שואל. היתר הוא 180° במשולש לפי 2, 4

באותו קוון משקל כמותו שווה לאלו ההיזקה הנסגרת על הייתר להקצו השני לפי 5

זווית נגזרת במחוק חסום במעגל משולש 180° . לפי 2, 3

טענות

משולש AB, AC

$\angle CAB = 90^\circ$

מחוק ABC כמותה הנגזרת

$AB = AC$

$\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$

$\angle BEC = \angle ADC = 45^\circ$

$\angle BDC = 90^\circ$

1

2

3

4

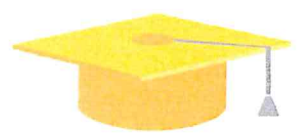
5

6

7



נימוק	טענות	מספר
זווית קטעונית של זווית 180° .	$\angle BDE = 90^\circ$	(8)
השאלה היא 180° בנקודה BDE. אפי 8,6	$\angle DBE = 45^\circ$	(9)
השאלה היא של זווית של 90° בנקודה של $9,6$.	$BD = DE$ מ.ש.ל. אף	(10)
זווית היקפית הנשענת על אולם קטע של 15 אפי 3	$\angle BCE = \angle BAD$	(11)
זווית היקפית הנשענת על אולם קטע של 15 אפי 3	$\angle ADB = \angle BCA = 45^\circ$	(12)
זווית היקפית אפי 6,12	$\angle ADB = \angle CEB = 45^\circ$	(13)
משפט פיתגורס S.S אפי 11,13	$\triangle ADB \sim \triangle CEB$ מ.ש.ל. אפי	(14)
יחס הפרקט הנשאלת בשאלה 14 זווית של 14 אפי 14	$\frac{BD}{BE} = \frac{AD}{CE} = \frac{AB}{BC}$	(15)



נילוי I

משפט פיתגורס במשולש BDE.
אפי 7
אפי 10, 16

חישוק.

הם השתמשו במשפט פיתגורס.
צוהים שאלו זהו קו יחס.
הצגת המשולשים.
אפי 18, 14

על

מספר

$$DE^2 + BD^2 = BE^2 \quad (16)$$

$$2BD^2 = BE^2 \quad (17)$$

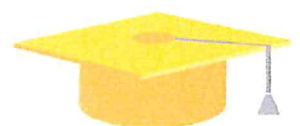
$$\frac{BD}{BE} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (18)$$

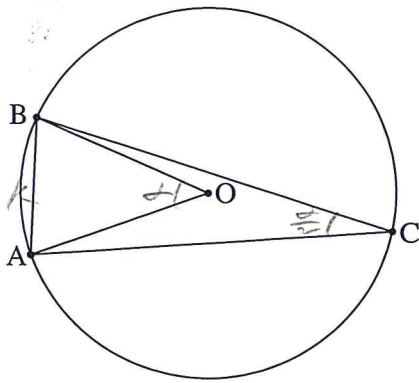
$$\frac{S_{ABD}}{S_{BCE}} = \left(\frac{BD}{BE}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad (19)$$



$$S_{BCE} = 2 S_{ABD} \quad (20)$$

נ.ש.ל





5. משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R. נתון כי $\angle BAC = 80^\circ$.

נסמן את הזווית AOB ב- α , ואת הצלע AB ב- k .

א. הוכח כי $\cos \alpha = 1 - \frac{k^2}{2R^2}$.

נתון כי $k = \frac{3}{4}R$.

ב. הבע באמצעות R (בלבד) את שטח המשולש ABC.

נסמן ב- r את רדיוס המעגל החסום במשולש AOB.

ג. חשב את היחס $\frac{R}{r}$.

בתשובתך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

הזווית הזווית של A היא α והזווית הזווית של B היא β והזווית הזווית של C היא γ

פתרון:
1. $\angle ACB = \frac{\alpha}{2} \angle BOA = \frac{\alpha}{2}$

לשם הטיווח: $\triangle ABC$

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R$$

$$\frac{k}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 2R$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{k}{2R}$$

נשתמש בזה: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

$$\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \left(\frac{k}{2R} \right)^2 = \boxed{1 - \frac{k^2}{2R^2}} \quad \text{וידוע}$$



$K = \frac{3}{4}R$ $\alpha = 44.05^\circ$

$\cos \alpha = 1 - \frac{(\frac{3}{4}R)^2}{2R^2} = 1 - \frac{9}{32} = \frac{23}{32} \quad \therefore \alpha$ (חשבונית)



$\alpha = 44.05^\circ \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 22.025^\circ \Rightarrow \begin{cases} \angle ACB = 22.025^\circ \\ \angle ABC = 67.975^\circ \end{cases}$

$\therefore ABC$ משולש

$\frac{K}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}R}{\sin 22.025^\circ} = \frac{BC}{\sin 80^\circ}$

$BC = \frac{3R \cdot \sin 80^\circ}{4 \cdot \sin 22.025^\circ} = 1.97R$

נחשב את היקף הטרפז ונקיף בו את R

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin \angle B}{2} = \frac{\frac{3}{4}R \cdot 1.97R \cdot \sin 67.975^\circ}{2}$

$S_{ABC} = 0.72R^2$

$\angle AOB = 44.05^\circ \quad AO = BO = R \quad \therefore$

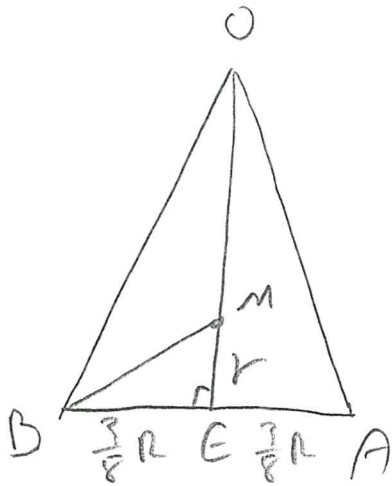


$\angle ABO = \angle BAO = 67.975^\circ$

AOB משולש שווה שוקים הכולל זווית

$\therefore M$





מכיוון שהנקודה החסומה בשוליים היא
במבט חוצי השוליים, לכן:

$$\angle ABM = \angle OBM = 33.9875^\circ$$

השוליים שלווה שווים, לכן

חוצה שוליים בסרט הוא גם

אזרח וזה תיכיון זקוף AB.

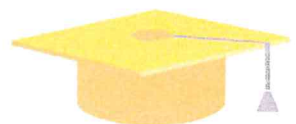
כלומר $\angle MEB = 90^\circ$, $BE = AE = \frac{3}{8}R$

נגד בשוליים BME :

$$\tan \angle MBE = \frac{ME}{BE} \Rightarrow \tan 33.9875^\circ = \frac{r}{\frac{3}{8}R}$$

(הערה ונדקא):

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{\frac{3}{8} \tan 33.9875^\circ} = \boxed{3.96}$$



6. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2-x}$

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 (3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
 (4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $t < k$, $f(k) = 1$, t הוא פרמטר.

ג. קבע איזה מן הביטויים שלפניך גדול יותר. נמק את קביעתך.

$\int_t^k f(x) dx$ או $\int_t^k (f(x))^2 dx$

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $(f(x))^2$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = -1$ ו- $x = -8$.

6/א. (1)

I: $x^2 - x \neq 0$
 $x(x-1) \neq 0$
 $x \neq 0$ $x \neq 1$

II: $1 - 2x \geq 0$
 $1 \geq 2x$
 $x \leq \frac{1}{2}$

$I \cap II: \left| x \leq \frac{1}{2}, x \neq 0 \right|$

(2)

$(x \neq 0)$ אין חיתוך אם ציר y
 חיתוך אם ציר x :

$0 = \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2-x}$

$\sqrt{1-2x} = 0 \quad |(\)^2$

$1-2x = 0 \quad x = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}, 0 \right)$

(3)

אם $x=0$ אז y אינסופי
 אם x אינסופי אז y אינסופי

$X=0$ אסימפטוטה אנכית

לחידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



6(3)

אסימטוטה אנכית:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2-x} = \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2} = \frac{\sqrt{\frac{1-2x}{x^4}}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^3}}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

* ניתן גם להאזין שהתפקוד מתנהג כמו פונקציה ליניארית ליד האסימטוטה אנכית $y=0$

1)

$$f'(x) = \frac{\frac{-2}{2\sqrt{1-2x}}(x^2-x) - \sqrt{1-2x} \cdot (2x-1)}{(x^2-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x-x^2-(1-2x)(2x-1)}{\sqrt{1-2x}}}{(x^2-x)^2} = \frac{x-x^2+(2x-1)^2}{\sqrt{1-2x}(x^2-x)^2}$$

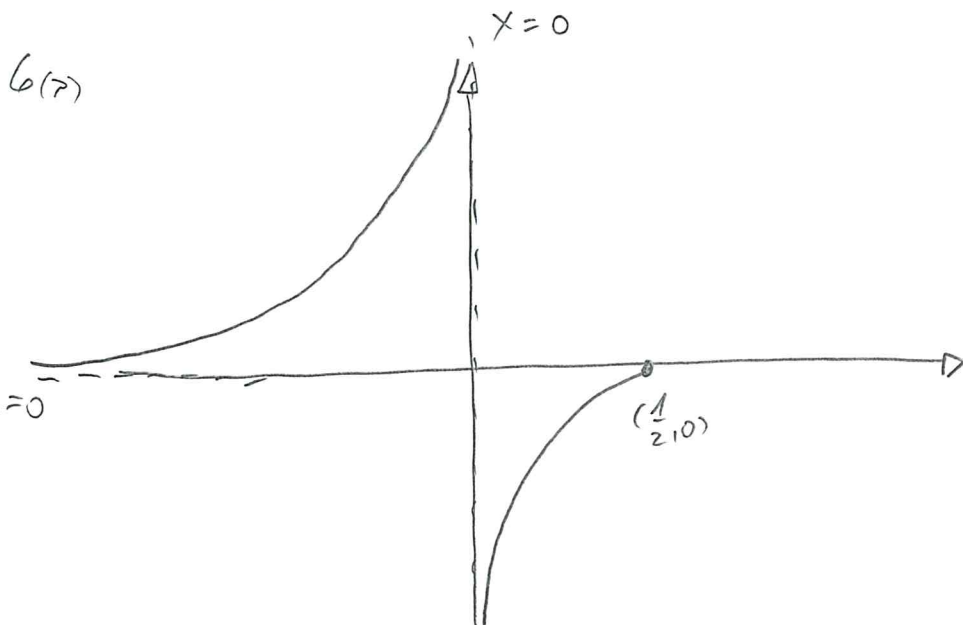
$$f'(x) = \frac{3x^2-3x+1}{\sqrt{1-2x}(x^2-x)^2}$$

אנך הפונקציה תמיד חיובי (הפונקציה אחרת לא הייתה עולה או יורדת)
אנך הפונקציה תמיד חיובי (אנפנה של ג'יאנו חיובי בקטע חיובי)

לכן הפונקציה עולה בקטע החיובי הגדול.

יחידה: אין | אלוה: $0 < x < \frac{1}{2}$ ו $x > 0$





6(2)
 בדקו $x=a$ איך הפונקציה היא 1. ולכן $a > 0$
 $x=a$ מתקבלת בקוצה בקצות הפסגה, ומכיוון ש $a < 1$
 ערכי הפונקציה הם $a - x$ (המציבים x בין $\pm \delta$):

א מקיימים: $f(x) < 1$ (הפונקציה עולה)
 ולכן: $f(x)^2 < f(x)$ ומכיוון ש $a < 1$

עבור x וייתר.

6(3)

$$\int_{-8}^{-1} (f(x))^2 = \int_{-8}^{-1} \frac{(1-2x)^2}{(x^2-x)^2} dx = - \int_{-8}^{-1} (2x-1)(x^2-x)^{-2} dx$$

לפי הנוסחה: $\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ (קג)

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
 אל תתפשר עליה.**





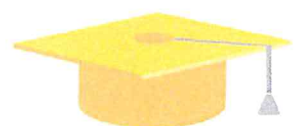
6(3)

$$- \left. \frac{(x^2 - x)^{-1}}{-1} \right]_{-8}^{-1} = \left. \frac{1}{x^2 - x} \right]_{-8}^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{1 - (-1)} \right) - \left(\frac{1}{64 - (-8)} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{72} = \left| \frac{35}{72} \right|$$

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



7. נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos(mx) + \cos(2x)$, המוגדרת לכל x . m הוא פרמטר השונה מאפס.

נתון כי בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$, שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ הוא -2 .

א. הוכח כי m הוא מספר שלם שמתחלק ב-4 ללא שארית.

הצב $m = 4$ וענה על סעיפים ב-ד שלפניך.

ענה על סעיף ב בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ענה על סעיפים ג-ד בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

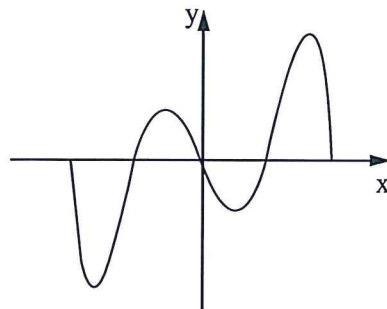
ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$. הסבר את שיקוליך.

נתונה פונקציה $k(x)$ המקיימת: $k'(x) = f(x)$, $k(0) = 0$.

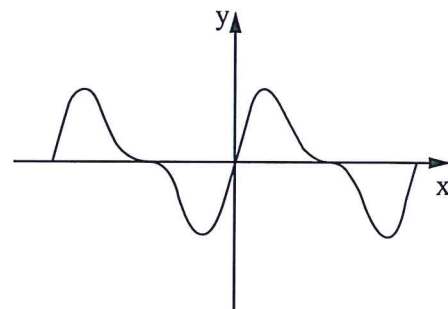
ד. אחד מן הגרפים א-ד שלפניך מתאר את הפונקציה $k(x)$.

היעזר בתשובתך על סעיף ג וקבע איזה מן הגרפים שלפניך מתאים לגרף הפונקציה $k(x)$. נמק את קביעתך.

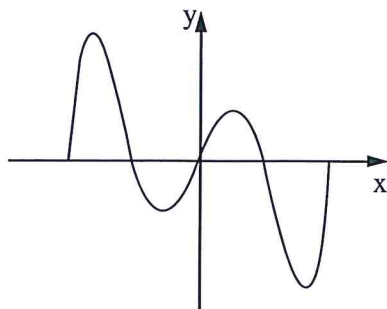
גרף ב



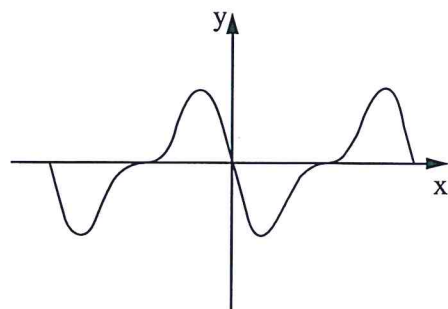
גרף א



גרף ד



גרף ג



$$f(x) = \cos(mx) + \cos(2x)$$

$m \neq 0$

ז

$$f'(\frac{\pi}{4}) = -2$$

: e נמיון

ט

$$f'(x) = -m \sin(mx) - 2 \sin(2x)$$

$$-2 = -m \sin(m \cdot \frac{\pi}{4}) - 2 \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4})$$

$$0 = -m \sin(m \cdot \frac{\pi}{4}) \quad | : (-m) \neq 0$$

$$0 = \sin(m \cdot \frac{\pi}{4})$$

$$\frac{m\pi}{4} = \pi k$$

$$\boxed{\frac{m}{4} = k}$$

נדרשנו להוכיח m מתחלק ב-4? אלא שאיננו.
אחרת! א שלם, נייגן להסיק m הוא מספר שלם
מתחלק ב-4.

$$0 = \cos(4x) + \cos(2x)$$

ב(1) חיגון עם x

$$0 = 2 \cos^2(2x) - 1 + \cos(2x)$$

$$\cos(2x) = t$$

$$0 = 2t^2 + t - 1$$

$$\cos(2x) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(2x) = -1$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$2x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$2x = -\pi + 2\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{6}}$$

$$\boxed{x = \frac{5\pi}{6}}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} (\frac{\pi}{6}, 0) \\ (\frac{\pi}{2}, 0) \\ (\frac{5\pi}{6}, 0) \end{matrix}}$$



$$f(0) = \cos(0) + \cos(0) = 2$$

$(0, 2)$

ב(1) הילסק
חיגיון $y = 8$

$$f'(x) = -4\sin(4x) - 2\sin(2x) = 0 \quad | :(-2) \quad \text{ב(2)}$$

$$2\sin(4x) + \sin(2x) = 0$$

$$4\sin(2x)\cos(2x) + \sin(2x) = 0$$

$$\sin(2x)(4\cos(2x) + 1) = 0$$

$$\sin(2x) = 0$$

$$2x = \pi k$$

$$x = \frac{1}{2}\pi k$$

$$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$$

$$\cos(2x) = -\frac{1}{4}$$

$$2x = 1.823 + 2\pi k \quad 2x = -1.823 + 2\pi k$$

$$2x = 0.58\pi + 2\pi k \quad 2x = -0.58\pi + 2\pi k$$

$$x = 0.29\pi + \pi k \quad x = -0.29\pi + \pi k$$

$$x = 0.29\pi$$

$$x = 0.71\pi$$

x	0	$0 < x < 0.29\pi$	$0.29\pi < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < 0.71\pi$	$0.71\pi < x < \pi$	π			
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	\max 37	\downarrow	\min	\uparrow	\max	\downarrow	\min	\uparrow	\max 37

$$f(0) = f(\pi) = 2$$

$$f(0.29\pi) = f(0.71\pi) = -1.12$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

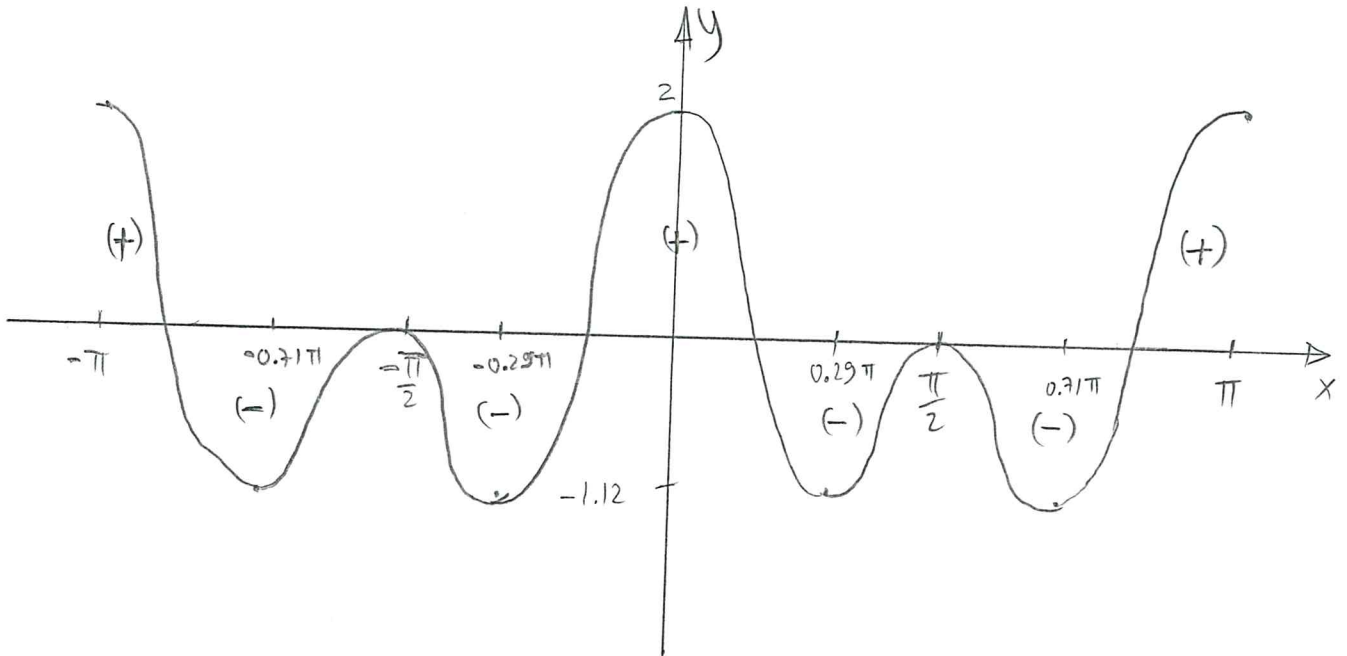
$(0, 2)$	\max 37
$(0.29\pi, -1.12)$	\min
$(\frac{\pi}{2}, 0)$	\max
$(0.71\pi, -1.12)$	\min
$(\pi, 2)$	\max 37



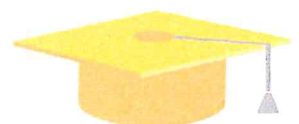
ע' נאמר (היבטן זאגן ניגן לשכר א' ה'א כ'איו' נ'רא' ס'ביב צ'יר y.

הוכחן זאיו' :

$$f(-x) = \cos(4 \cdot (-x)) + \cos(2 \cdot (-x)) = \cos(4x) + \cos(2x) = f(x)$$



3 נתבונן בחיוביו ושליליו של הכונן $f(x)$ ונסיק עליה ירידה של הכונן $f(x)$. נזכור של חיובן עם ציר x
 ? $f(x)$ יזכור ק'ציון כ'ני' ? $f(x)$ ושל הסק' לצ'יר x
 ? $f(x)$ ג'זכור כ'יעול ה'א שינו' א'ס ? $f(x)$.
 ע' א' ה'א ה'א ה'ני'ן



8. נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$, $g(x) = \frac{x-3}{x-1}$.

ענה על סעיף א בעבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

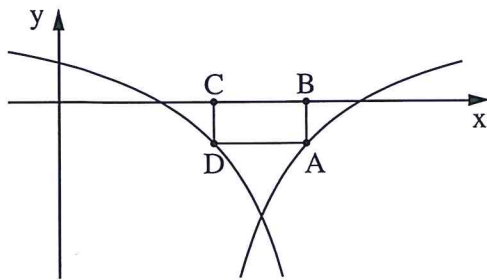
א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

בסרטוט שלפניך מתואר חלק מן הגרף של הפונקציה $f(x)$, חלק מן הגרף של הפונקציה $g(x)$, ומלבן החסום ביניהם ובין ציר ה- x .

צלע BC של המלבן מונחת על ציר ה- x , והצלע הנגדית, AD, מחברת

בין נקודה על הגרף של $f(x)$ ובין נקודה על הגרף של $g(x)$, כמתואר בסרטוט.



נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A.

ב. קבע מהו תחום הערכים האפשרי של t .

ג. (1) הבע באמצעות t את אורך הצלע AB.

(2) הוכח ששיעור ה- x של הנקודה D הוא $4-t$.

(3) הבע באמצעות t את שטח המלבן ABCD.

ד. מצא את t שבעבורו שטח המלבן ABCD הוא מקסימלי.

8 א (1) ג.ה. של $f(x)$ ← $x \neq 3$
ג.ה. של $g(x)$ ← $x \neq 1$

א (2) חיתוך עם ציר x של $f(x)$:

חיתוך עם ציר y של $f(x)$:

חיתוך עם ציר x של $g(x)$:

חיתוך עם ציר y של $g(x)$:

$$0 = \frac{x-1}{x-3}$$

$$0 = x-1$$

$$1 = x \quad (1, 0)$$

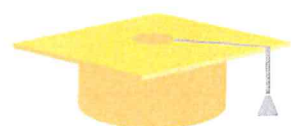
$$f(0) = \frac{0-1}{0-3} = \frac{1}{3} \quad (0, \frac{1}{3})$$

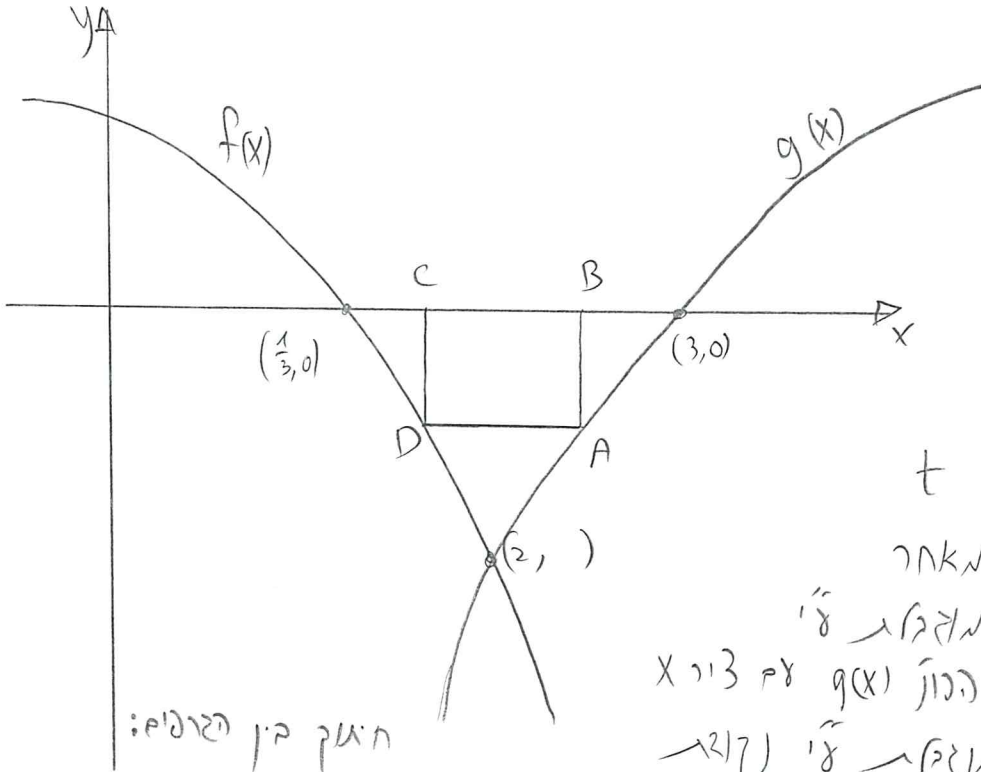
$$0 = \frac{x-3}{x-1}$$

$$0 = x-3$$

$$3 = x \quad (3, 0)$$

$$g(0) = \frac{0-3}{0-1} = 3 \quad (0, 3)$$





$x_A = t$ 2

חיגוק בין הפרטים:

$$\frac{x-3}{x-1} = \frac{x-1}{x-3}$$

$$(x-3)^2 = (x-1)^2$$

$$x-3 = x-1 \quad \leftarrow \text{נסו}$$

$$x-3 = -(x-1) \quad \leftarrow \underline{x=2}$$

אחרי הערכים של t הוא $2 < t < 3$ מאחר ויש לך נקודה A מוגדרת ע"י נקודת החיגוק של הכוון (א) עם ציר x ויש לך נקודה A מוגדרת ע"י נקודה החיגוק בין הפרטים של ענין ה- x שיהיה הוא 2

ע (1) איך הצע AB הוא הוא היפרט בין y_B ו- y_A !

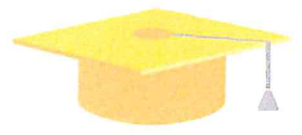
$A(t, \frac{t-3}{t-1})$

$d_{AB} = 0 - \frac{t-3}{t-1} = \frac{3-t}{t-1}$

ע (2) שצווי ה y של נקודת A ! D צהים חכין, ע מני עטא אג שיצור x של D, נציב אג שיעור ה- y של D בטור $f(x)$ ונקודת אג x .

$\frac{t-3}{t-1} = \frac{x-1}{x-3} \rightarrow (t-3)(x-3) = (t-1)(x-1) \rightarrow xt - 3t - 3x + 9 = xt - x - t + 1$

$\rightarrow 8 - 2t = 2x \rightarrow \underline{4 - t = x}$



$$d_{AD} = X_A - X_D = t - (4-t) = 2t-4 \quad \text{ע (3)}$$

$$S(t) = d_{AD} \cdot d_{AB} = (2t-4) \frac{(3-t)}{(t-1)} = \frac{(2t-4)(3-t)}{t-1}$$

$$S(t) = \frac{6t - 2t^2 - 12 + 4t}{t-1} = \frac{-2t^2 + 10t - 12}{t-1}$$

$$S'(t) = \frac{(-4t+10)(t-1) - 1 \cdot (-2t^2+10t-12)}{(t-1)^2} =$$

$$S'(t) = \frac{-4t^2 + 4t + 10t - 10 + 2t^2 - 10t + 12}{(t-1)^2}$$

$$S'(t) = \frac{-2t^2 + 4t + 2}{(t-1)^2} = 0$$

$$-2t^2 + 4t + 2 = 0$$

$$\boxed{t = 2.41} \quad t = -0.41$$

יואל גבע איז אן אקאדמיק און אן אקאדמיק

$$S''(t) = -4t + 4$$

$$S''(2.41) = -4 \cdot 2.41 + 4 = (-) \rightarrow \max$$

אקאדמיק: אן אקאדמיק און אן אקאדמיק

