

פתרון הבחינה

במתמטיקה

מועד קיץ תשפ"א, 2021, שאלון: 35581

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע":

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





1. בבית מלון יש שתי מעליות, מעלית א ומעלית ב. שתי המעליות התחילו לעלות מקומת הקרקע (גובה 0) באותו זמן. מעלית א עצרה בדרכה עצירת ביניים שנמשכה 14 שניות, ולאחר מכן המשיכה לעלות עד שהגיעה לקומה שגובהה 33 מטרים. מעלית ב עצרה בדרכה עצירת ביניים שנמשכה 7 שניות, ולאחר מכן המשיכה לעלות עד שהגיעה לקומה שגובהה 81 מטרים. מעלית א הגיעה לקומה שגובהה 33 מטרים בדיוק באותו זמן שבו הגיעה מעלית ב לקומה שגובהה 81 מטרים. לאחר מכן, התחילו שתי המעליות לרדת בדיוק באותו זמן. מעלית א ירדה 15 מטרים, ובדרכה עצרה עצירת ביניים, שנמשכה 9 שניות. בזמן שירדה מעלית א, ירדה מעלית ב 63 מטרים ברציפות, ללא עצירות ביניים. ידוע כי המהירות של כל אחת מן המעליות בעלייה שווה למהירות של כל אחת מהן בירידה. כמו כן ידוע כי המעליות נעות במהירויות קבועות.
- א. חשב את המהירות של כל אחת משתי המעליות.
- מעלית א הייתה בקומת הקרקע של בית המלון, ואילו מעלית ב הייתה בקומה הנמצאת מעל קומה שגובהה 42 מטרים. שתי המעליות התחילו לנוע באותו זמן לכיוון הקומה שגובהה 42 מטרים. מעלית א עלתה לקומה זו מקומת הקרקע ללא עצירות ביניים. מעלית ב ירדה לקומה זו מן הקומה שבה היא הייתה ובדרכה עצרה עצירת ביניים אחת, שנמשכה 6 שניות. שתי המעליות הגיעו לקומה שגובהה 42 מטרים בדיוק באותו זמן.
- ב. האם מעלית ב הייתה בקומה העליונה של בית המלון כאשר היא התחילה לרדת? נמק את תשובתך.

פתרון:

א. נניח x היא המהירות של מעלית א, ו- y היא המהירות של מעלית ב. נכריב ששתי המהירויות שוות. והשנייה היא היחס של המהירות. געויה:

$$\frac{33}{x} + 14 = \frac{81}{y} + 7$$

$$\frac{33}{x} + 7 = \frac{81}{y}$$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה



קירוב:

$$\frac{15}{x} + 9 = \frac{63}{y} \Rightarrow \frac{5}{x} + 3 = \frac{21}{y}$$

דיקאני מערכה של שתי שוואל:

$$\begin{cases} \frac{33}{x} + 7 = \frac{81}{y} \\ \frac{5}{x} + 3 = \frac{21}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{33+7x}{x} = \frac{81}{y} \\ \frac{5+3x}{x} = \frac{21}{y} \end{cases} /:$$

(ה) = שוואל ונדבא:

$$\frac{33+7x}{5+3x} = \frac{81}{21} \Rightarrow 693 + 147x = 405 + 243x$$

$$96x = 288 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \frac{5}{3} + 3 = \frac{21}{y} \Rightarrow y = 4.5$$

אסינום:
 מהירה מעלה א' קמאר, אטריה
 מהירה מעלה ב' 5א אטריה

ב. נסמן א - הכרן שמעלה ב' יורד - אקר
 זוהי 42 ק - א, יורכיק שלואל 5א ניק:

$$\frac{k}{4.5} + 6 = \frac{42}{3} \Rightarrow k = 36$$

נמידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה.



באותה העת, בינו לבין המורה הייתה 36
 מסתים על הדור 24 המסתיים באומר
 אותה בינו לבין 78 מסתיים (36+42)
 על הדור אבס.
 בסוף הוא היה אצלה אצלה של 18 מלרין
 על הדור אבס, ולכן אותה בי אן היתה
 בדור העיונים של בית המלון כאשר היא
 התחילה.

נחידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה.



2. נתונה סדרה a_n שסכום n האיברים הראשונים שלה, לכל n טבעי, הוא:

$$S_n = k \cdot n^2 - p \cdot n$$

א. הבע את האיבר הכללי של הסדרה באמצעות k, p ו- n , בעבור $n \geq 2$.

(2) הנוסחה שמצאת בתת-סעיף א(1) נכונה בעבור כל n טבעי. הסבר מדוע.

(3) הוכח כי הסדרה היא סדרה חשבונית והבע את d , הפרש של הסדרה, באמצעות k .

נתונות שתי סדרות הנדסיות b_n ו- c_n .

מתת הסדרה b_n שווה ל- d (הפרש הסדרה החשבונית a_n).

הסדרה c_n היא סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה שווה ל- $\frac{2}{d}$.

נתון: $a_1 = b_1 = c_1$,

$k = 1.5, p = 4.5$.

ב. הסבר מדוע הסדרה c_n היא סדרה מתכנסת.

נתון כי היחס בין סכום m האיברים הראשונים של הסדרה b_n ובין סכום כל אברי הסדרה האינסופית c_n הוא $\frac{1}{3} \cdot 40$.

ג. חשב את m .

ד. האם הסדרה c_n היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת? נמק את תשובתך.

פתרון:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

1. (1) נשמר בנוסחה:

$$a_n = kn^2 - pn - (k(n-1)^2 - p(n-1))$$

$$a_n = kn^2 - pn - (kn^2 - 2kn + k - pn + p)$$

$$a_n = 2kn - k - p$$

(2) נהנוסחה (2) סוף (1) (הקב):

$$a_1 = 2k \cdot 1 - k - p = k - p$$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה.



להנוסחה הנגזרת נקבל:

$$a_n = S_n = k \cdot n^2 - p \cdot n = k - p$$

זיבאנו שהנוסחה נכונה גם עבור $n=1$,
ואכן היא נכונה לכל n טבעי, ולפיכך שאנו
יחדיו ש a היא נכונה לפי סעיף א'.

(ג) נוכיח הפרט דבוק:

$$a_n - a_{n-1} = k - p - (2k(n-1) - k - p)$$

$$= k - p - 2kn + 2k + k + p = 2k$$

הסציה הטבועית עם הפרט דבוק $d=2k$

ג. נתון $k=1.5$, $p=4.5$. כיון שגדור סדר

הוא נהדר: $a_1 = -3$, $a_2 = 3$

גדור סדר a נהדר:

$a_1 = -3$, $a_2 = \frac{2}{3}$

האנה של סדר a האנה האנה והאנה האנה האנה האנה



$$S_m = \frac{b_1 (q^m - 1)}{q - 1} = \frac{-3 (3^m - 1)}{3 - 1}$$

ד. כגד:

$$S = \frac{C_1}{1 - q} = \frac{-3}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{-3}{\frac{1}{3}} = -9$$

נניח שיש לנו סדרה חשבונית:

$$\frac{S_m}{S} = 40 \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-3 (3^m - 1)}{2} = 40 \frac{1}{3}$$

נצטרף זנב ונשווה:

$$\frac{3^m - 1}{6} = 40 \frac{1}{3} \Rightarrow 3^m = 247$$

$$\boxed{m = 5}$$

3. סדרה חשבונית היא סדרה עולה משום שהאיבר הראשון שלילי, והמשוואה בין איברי הסדרה היא $a_n = a_1 + (n-1)d$, כלומר היא יחידה גדלה מעולה.

נחידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה



3. בבית ספר תיכון גדול מאוד, מספר התלמידים גדול פי 9 ממספר המורים. בבית הספר נערך סקר שהשתתפו בו כל המורים והתלמידים בבית הספר, והם בלבד. המשתתפים בסקר נשאלו אם הם נבדקו לגילוי קורונה. נמצא כי 80% מן המורים בבית הספר נבדקו לגילוי קורונה. כמו כן נמצא כי $\frac{13}{15}$ מכלל המשתתפים בסקר (מורים ותלמידים), שנבדקו לגילוי קורונה, היו תלמידים.
- מהי ההסתברות שמבין כלל המשתתפים בסקר ייבחר באקראי תלמיד שלא נבדק לגילוי קורונה? בחרו באקראי בזה אחר זה 5 משתתפים מבין כלל משתתפי הסקר.
 - מהי ההסתברות שלפחות 4 מהם נבדקו לגילוי קורונה?
 - ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, לפחות משתתף אחד נבדק לגילוי קורונה. מהי ההסתברות שלפחות 4 מן המשתתפים שנבחרו נבדקו לגילוי קורונה?
 - ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, בדיוק 2 נבדקו לגילוי קורונה. מהי ההסתברות שהאחרון שנבחר נבדק לגילוי קורונה?

פתרון:
נתון: אירועי A ו-B הם אירועי דימום. A - נורה דמי כיון ← \bar{A} - לא נורה דמי כיון
B - נבדק לזיהוי דימום ← \bar{B} - לא נבדק לזיהוי דימום

נתון: (1) $P(\bar{A}) = 9 \cdot P(A)$

(2) $P(B|A) = 0.8$

(3) $P(\bar{A}|B) = \frac{13}{15}$



~ נתון (1) וד > : $1 - P(A) = 5 \cdot P(A) \Rightarrow P(A) = 0.1$

~ נתון (2) וד > : $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.8 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.08$

$P(A \cap \bar{B}) = 0.1 - 0.08 = 0.02$

~ נתון (3) וד > : $\frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{13}{15} \Rightarrow P(\bar{A} \cap B) = \frac{13}{15} \cdot P(B)$

כאן $P(B) = x$ ונציב ככה בראשון.

יש לשים לב:

	\bar{A}	A	
x	$\frac{13}{15}x$	0.08	B
		0.02	\bar{B}
1	0.9	0.1	

נמידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה



$$P_5(4) = \binom{5}{4} \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^1 = 0.2592$$

$$P_5(5) = 0.6^5 = 0.07776$$

ולכן הסכום הוא:

$$P = 0.2592 + 0.07776 = \boxed{0.33696}$$

ד. הפקד נשאלת - נוסחה בתנאי. עז

הסתברות

$$P(\text{אחת 4} / \text{אחת 3}) = \frac{P(\text{אחת 4} \cap \text{אחת 3})}{P(\text{אחת 3})}$$

$$P = \frac{P_5(4) + P_5(5)}{1 - P_5(0)} = \frac{0.33696}{1 - 0.4^5} = \frac{0.33696}{0.98736}$$

$$P = \frac{351}{1031} = 0.340446$$



3. מספר האפשרויות שדציה 2 לבין

$$5 \text{ "כח" } = 10 = \binom{5}{2}$$

לבין האפשרויות האלו 4 אפשרויות

כוחלם א - האחרון, ולכן ההסתברות

$$P = \frac{4}{10} = 0.4$$

דבר נוסף:

$$P(\text{האחרון / דציה 2} / \text{כח" } 2) = \frac{P(\text{האחרון "כח" } 2 \text{ ודציה 2})}{P(\text{דציה 2 ודציה 2})}$$

$$= \frac{0.6 \cdot P_4(1)}{P_5(2)} = \frac{0.6 \cdot \binom{4}{1} \cdot 0.6^1 \cdot 0.4^3}{\binom{5}{2} \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^3} = \frac{4}{10} = 0.4$$

נמזעע ענ פסיכומטרי
בזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה.



נילוי

אם מנדודת אחת למעלה
יזכאיק שני לשידויק למעלה
אז הם שולייק באוריק

באז הנתקדה. אפי. (3)

הזכר התיכון. אפי. (4)

משולם הז התיכון שולייק למעלה
הרזק אורם הנתקדה הז
משולם ישיר שולייק. אפי. (5,4)

משולם פיגאוריק משולם
ABC. אפי. (6)

הזקדה. אפי. (7,4)

חישוק.

למש

$AM = BM$ (3)

$AM = CM$

$AM = BM = CM$ (4)

AM תיכון אקדאן (5)

BC קמשולם ABC

$\angle BAC = 90^\circ$ (6)

משולם

$AC^2 + AB^2 = BC^2$ (7)

$AC^2 + AB^2 = (2AM)^2$ (8)

$AC^2 + AB^2 = 4AM^2$ (9)

משולם

נמידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה.



ניתוח

נתון

חישו ב. אפי (7)

חישו ב. אפי. (4, 11)

קנייה עזר

משל: אמצע מאונך לאנדרט
בנקודת ההשקה.

חידו כוונות

כאן התקרה. אפי (15)

מחזקת על שאלה במשאל מו (ח)

5/1 שאלה. אפי (4, 13)

אפי (16, 17)

טעם

$AC=6, AB=8$ (10)

$BC=10$ (11)

$AM=CM=BM=5$ (12)

נגדיו כרציוסוק (13)

$BU - 1 AO$

$\angle OAM = \angle OBM = 90^\circ$ (14)

$\angle OAB + \angle BAM = 90^\circ$ (15)

$\angle CAM + \angle BAM = 90^\circ$

$\angle OAB = \angle CAM$ (16)

$\angle ACM = \angle MAC$ (17)

$\angle OAB = \angle OBA$

$\angle OBA = \angle ACM$ (18)



נילוז

שפט צמיין S.S אפי (8,16)

'חס הקלטה הסתוללה
בשולשי, הקוללה. אפי. (19)

חישולו > (אפי. 20, 12, 10)

טעם

$\Delta OAB \sim \Delta MAC$ (19)

$\frac{OA}{AM} = \frac{AB}{AC}$ (20)

$OA = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$ (21)

נ.ש.ל

נוסחה טעם שולש. אפי. (20, 12)

קניי - עפר

אודה (קסיס בשולש) הוללה
תיכיון. אפי. (4)

שפט פיתאגורס בשולש

ADM - אפי. (4, 24, 23)

נוסחה טעם שולש. אפי.
(25, 23, 10)

$S_{ABM} = \frac{OB \cdot BM}{2} = \frac{50}{3}$ (22)

(23) נוקיני אנקה MD

עפר AC בשולש
AMC

$AD = CD = 3$ (24)

$MD = 4$ (25)

$S_{ACM} = \frac{AC \cdot MD}{2} = 12$ (26)



ניחוד
חישוב

טעם

$$\frac{S_{OBM}}{S_{AMC}} = \frac{50}{12} = \frac{25}{6} \approx 4.17$$

3 חישוב

נמידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה.



5. DB ו-DC משיקים למעגל שמרכזו O, כמתואר בסרטוט. רדיוס המעגל: R.

המשך BD חותך את המשך OC בנקודה A.

הקטע OD והמיתר BC נחתכים בנקודה M.

הקטע CE מאונך ל-AB.

נסמן: $\angle ABC = \alpha$.

א. הסבר מדוע אפשר לחסום במעגל:

(1) את המרובע OBDC.

(2) את המרובע MDEC.

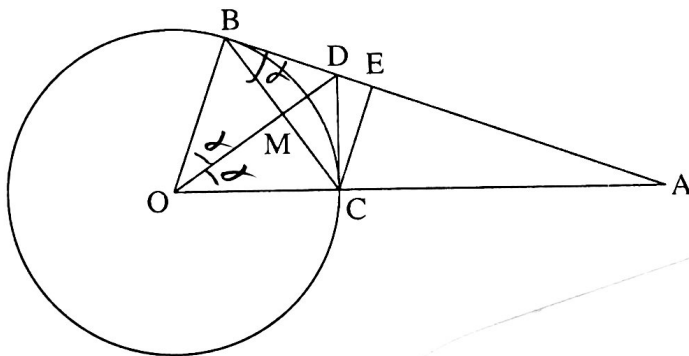
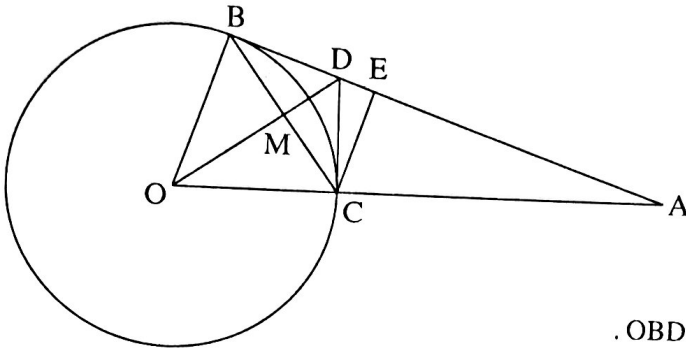
נסמן: d_1 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע OBDC.

d_2 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע MDEC.

d_3 הוא קוטר המעגל החוסם את המשולש AOD.

ב. הבע באמצעות α ו-R את d_1 , את d_2 ואת d_3 .

ג. מצא את הערך של α שבעבורו מתקיים: $\frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_3}$.



פתרון:

(1) כ

$$\angle OBD = \angle DCO = 90^\circ$$

(S) ~ (S) כיון ש (שני זוויות)

(S) ~ (S) זוויות התייחסות



$$\angle OBD + \angle DCO = 180^\circ$$



מכאן $\angle BCO = \angle OBC$ (זוויות התייחסות)

$$(2) \angle PEC = 90^\circ \quad (נניח) \quad (CE \perp AB)$$

$$OB = OC = R$$

נחידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים

אל תתפשר עליה



$BD = DC$ (שני שיהיה ארעון היוקאק)

מאחר (דודה שלויק)

מכאן $\angle BOC$ הוא זאתון

(א) כפיאניק בזאתון מאון (כיק) $BC \perp OD$

$\angle OMC = 90^\circ$

$\angle OMC + \angle DEC = 180^\circ$

מכאן $\angle DEC$ זכ אטילה בזאתון

OD הוא קוטר בזאתון ומוסק אז $\angle ODC = 90^\circ$.
כאן, $\angle OBC = \angle ODC = 90^\circ$.

$\angle BOC = 2 \angle BAC = 2\alpha$
 $\angle BOD = \angle COD = \alpha$
במשולש הזוים הנשענים
אלה דלת



$\triangle BOD:$ $\frac{R}{OD} = \cos \alpha \Rightarrow \boxed{OD = d_1 = \frac{R}{\cos \alpha}}$

CD הוא דו-קר קמטול סמוס. הרוחב MDEC כואו, $CD = d_2$.

$\triangle DCO:$ $\frac{DC}{R} = \tan \alpha \Rightarrow \boxed{CD = d_2 = R \tan \alpha}$

$\triangle AOD:$

$\angle OAD = 90^\circ - 2\alpha$

$\frac{OD}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} = 2R = d_3$

$d_3 = \frac{OD}{\cos 2\alpha}$

$\boxed{d_3 = \frac{R}{\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha}}$



למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה.



$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_3}$$

$$\frac{R \tan \alpha}{\frac{R}{\cos \alpha}} = \frac{\frac{R}{\cos \alpha}}{\frac{R}{\cos \alpha \cos \alpha}}$$

$$\tan \alpha \cdot \cos \alpha = \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \sin(90^\circ - 2\alpha)$$

$$\alpha = 90^\circ - 2\alpha + 360^\circ \quad , \quad \alpha = 90^\circ + 2\alpha + 360^\circ$$

α איז אן אפיק וואס רונט היינט שטראק

$$\boxed{\alpha = 30^\circ} \quad (ה.ו.)$$

נמידע על פסיכומטרי
בימאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים

אל תתפשר עליה



6. נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{x}{(x^2-2)^2}$, $g(x) = \frac{x}{(x^2-2)^3}$

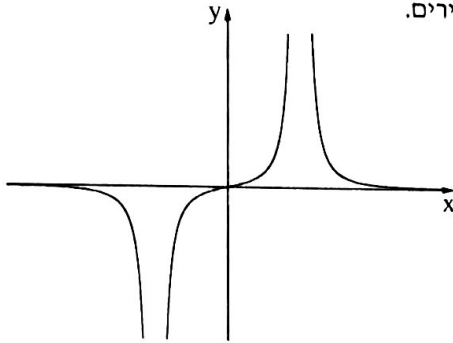
א. ענה על תת-סעיפים (1)-(4) בעבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון.

(4) הוכח כי הפונקציה אי-זוגית.



ב. (1) הגרף שלפניך מתאר את אחת הפונקציות $f(x)$, $g(x)$.

קבע איזו מן הפונקציות הגרף מתאר. נמק את קביעתך.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה האחרת.

נתונה פונקציה $h(x)$ שמקיימת: $h'(x) = f(x)$.

$f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו תחום.

ג. מה הם תחומי העלייה והירידה של $h(x)$?

ד. חשב את:

(1) $\int_{-1}^1 f(x) dx$. נמק את תשובתך.

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x והישרים $x = 1$, $x = -1$.

נתונה הפונקציה $k(x) = f(x) + b$. $b \neq 0$ הוא פרמטר.

ה. האם הפונקציה $k(x)$ זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמק את תשובתך.

פתרון:
א. נתתי קבונת ליה $f(x)$.

(1) $(x^2-2)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{2}$

(2) אסימפטוטה אנכית, אסימפטוטה אופיינטית, אסימפטוטה אופיינטית.

$x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$

נחידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה



אסימפטוטה אנכית $y=0$

(3) נלמד:

$$f'(x) = \frac{(x^2-2)^2 - x \cdot 2(x^2-2) \cdot 2x}{((x^2-2)^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-2) \{x^2-2-4x^2\}}{(x^2-2)^4} = \frac{-3x^2-2}{(x^2-2)^3}$$

$$-3x^2-2=0 \Rightarrow x^2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow$$

אין פתרונות. פונקציה איננה נהוגת. היכיון

$$f(-x) = \frac{-x}{((1-x)^2-2)^2} = \frac{-x}{(x^2-2)^2} = -f(x) \quad (4)$$

משקל אבולוציה = $f(x)$

$$(x^2-2) \neq 0$$

$$x \neq \pm\sqrt{2}$$

(1)

$$y=0, x=\sqrt{2}, x=-\sqrt{2}$$

(2)

$$g'(x) = \frac{(x^2-2)^3 - x \cdot 3(x^2-2)^2 \cdot 2x}{((x^2-2)^3)^2}$$

(3) נלמד:



$$g'(x) = \frac{(x^2-2)^2 \{x^2-2-6x^2\}}{(x^2-2)^6} = \frac{-5x^2-2}{(x^2-2)^4}$$

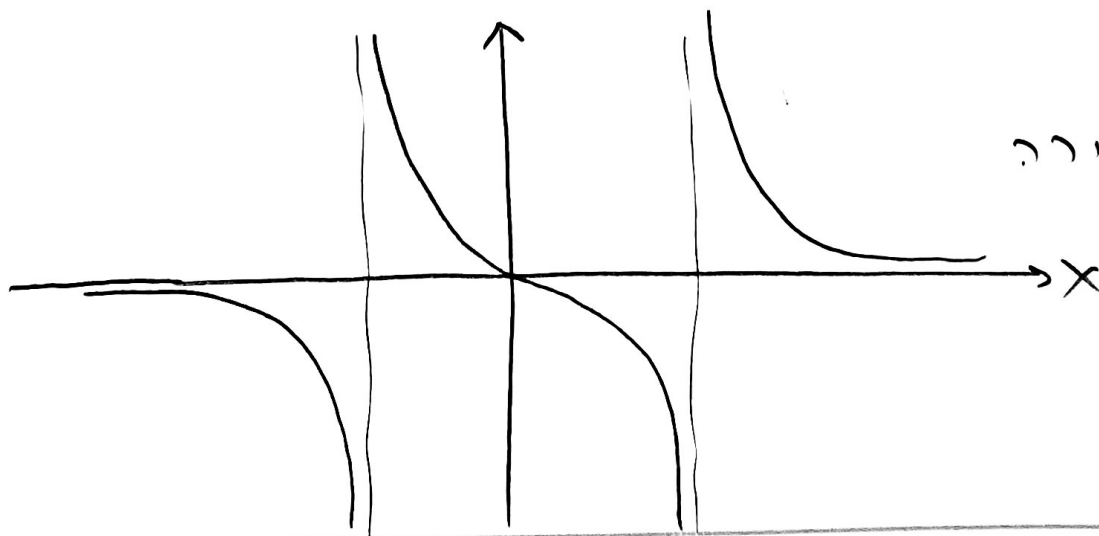
אילו נריון $\Rightarrow \frac{-2}{5} = x = -5x - 2 = 0$

אין נדור נה דילון גב אפוקוליה $g(x)$

$$g(-x) = \frac{-x}{(x^2-2)^3} = \frac{-x}{(x^2-2)^3} = -g(x) \quad (4)$$

סל

ה. (1) בציור יש תמונה של פונקציה ויחידה, סאו כפי
 ערכיו בפונקציה $g(x)$ נראה שהיא
 מסוג $g(x) = \frac{1}{x}$ שיהיה פונקציה
 שבו $\sqrt{-2}$ וסליו $g(x)$ יורד ספ.
 זכור הלא מסוג הפונקציה $g(x)$



(2)

אפי והקורה
 כפי

נחמד על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
 אל תתפשר עליה



$$h'(x) = f(x)$$

נתון: \cdot

לפי תנאי החיוביות והשליליות של $f(x)$

(דבר):

תחומי עלייה: $x < \sqrt{2}$ או $\sqrt{2} < x < 0$

תחומי ירידה: $0 < x < \sqrt{2}$ או $x < -\sqrt{2}$

3. (א) הפונקציה $f(x)$ היא צולגה, והטבלה

סימטריה ביחס לציר ה-y, הנטה כלפי ימין
שווקה בטבלה כלקט שטוח, אולם בסימני הפונקציה

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$$

(2) נרשם $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$ בטבלה $x=0$ עד $x=1$

ונכנסו $x=2$:

$$S = 2 \int_0^1 \frac{x}{(x-2)^2} dx$$

ואם האינטגרל ניתן לחשב בעזרת שיטת

$$\int f(x) dx = \frac{f(x)^{u+1}}{u+1} + C$$

נחידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה.



$$\int \frac{x}{(x^2-2)^2} dx = \int \frac{2x(x^2-2)^{-2}}{2} dx = \frac{(x^2-2)^{-1}}{-2} + C$$

$$= \frac{-1}{2(x^2-2)} + C$$

נחזיק אשטח:

$$S = 2 \cdot \left[\frac{-1}{2(x^2-2)} \right]' = 2 \left[\frac{-1}{-2} - \frac{-1}{-4} \right] = \boxed{\frac{1}{2}}$$

ה. הפונקציה $K(x)$ היא פולינום זוגי

אז פולינום זוגי $b \neq 0$ משוק להצטב

אנכי חתום זכרן שהפונקציה לא זוגי

בניגוד, זכרן היא איננה פולינום

היא איננה פולינום משום ש- $f(x)$ היא

פולינום מתחילת, והצטב לא תהיה

זוגי.



7. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 - 4a}}{x^3}$. $a > 0$ הוא פרמטר.

בסעיפים א-ה, בטא את תשובותיך באמצעות a , לפי הצורך.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. הוכח שהפונקציה $f(x)$ אי-זוגית.

ג. (1) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ה. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$, אם יש כאלה?

ידוע כי בכל אחת מנקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, יש לגרף של $f(x)$ ולגרף של $g(x)$ משיק משותף.

ו. (1) הוסף לסרטוט שבמחברתך סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. פרט את שיקולייך.

(2) מהו הערך של a ? נמק את תשובתך.

פתרון:

$$\begin{cases} x^3 \neq 0 \\ 3x^2 - 4a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{4a}{3} \leq x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \leq -\sqrt{\frac{4a}{3}} \text{ ו } \sqrt{\frac{4a}{3}} \leq x \end{cases} \quad \text{ל.כ}$$

$$\boxed{x \leq -\sqrt{\frac{4a}{3}} \quad \vee \quad \sqrt{\frac{4a}{3}} \leq x} \quad \text{כפי כוונתי}$$

$$f(-x) = \frac{\sqrt{3(-x)^2 - 4a}}{(-x)^3} = \frac{\sqrt{3x^2 - 4a}}{-x^3} = -f(x) \quad \text{פ.ד}$$

נחידע על פסיכומטרי
ביאול גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אנ' תתפשר עליה.



ד. (1) קיבץ ג' י"א נ"א ש"א - $x=0$ $\sqrt{3x^2-4a}$ נ"א
ה"א נ"א

$$\frac{\sqrt{3x^2-4a}}{x^3} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$3x^2-4a=0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = \frac{4a}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{4a}{3}}$$

קיבץ ג' א:

$$\left(\sqrt{\frac{4a}{3}}, 0 \right)$$

$$\left(-\sqrt{\frac{4a}{3}}, 0 \right)$$

(2) נ"א:

$$f'(x) = \frac{\frac{-6x}{2\sqrt{3x^2-4a}} \cdot x^3 - 3x^2 \cdot \sqrt{3x^2-4a}}{(x^3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{3x^4}{\sqrt{3x^2-4a}} - 3x^2 \sqrt{3x^2-4a}}{x^6}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 3x^2(3x^2-4a)}{x^6 \cdot \sqrt{3x^2-4a}} = \frac{x^2(3x^2 - 9x^2 + 12a)}{x^6 \sqrt{3x^2-4a}}$$

$$f'(x) = \frac{12a - 6x^2}{x^4 \sqrt{3x^2-4a}}$$

נ"א ע"א פ"א נ"א
ב"א ג"א ←

ה"א נ"א ל"א נ"א יש פ"א נ"א
א"א ת"א ע"א



נשאלה (א) פסול נפתור:

$$12a - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2a \Rightarrow x = \pm \sqrt{2a}$$

$$f(\sqrt{2a}) = \frac{\sqrt{3(\sqrt{2a})^2 - 4a}}{(\sqrt{2a})^3} = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2a} \cdot 2a} = \frac{1}{2a}$$

לפי הסעיף הקודם של א. 2.15

$$f(-\sqrt{2a}) = -\frac{1}{2a}$$

נראה קטנה של המונות (ב) קצת ארוך
דביע סוג הקיבול:

$$f''(x) = -12x$$

$$f''(\sqrt{2a}) < 0 \rightarrow \text{מקסימום}$$

$$f''(-\sqrt{2a}) > 0 \rightarrow \text{מינימום}$$

נסכם ונוסיף אם א (קצת ארוך הקיבול)

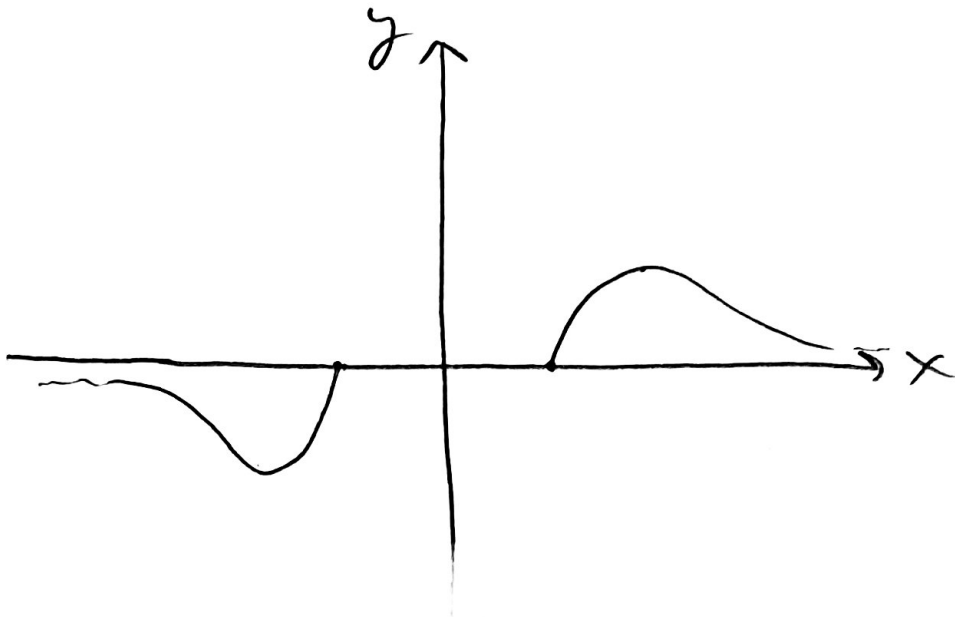
בקלה תחזק ההכרחה:

☺



$$\left(\sqrt{\frac{4a}{3}}, c \right) \text{ גינולווק , } \left(\sqrt{2a}, \frac{1}{2a} \right) \text{ גזסילווק}$$

$$\left(-\sqrt{\frac{4a}{3}}, c \right) \text{ גזסילווק , } \left(-\sqrt{2a}, -\frac{1}{2a} \right) \text{ גינולווק}$$



3. $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ ה. (1)

(1) גזסילווק, סגול א' : $x < -\sqrt{\frac{4a}{3}}$ ו $\sqrt{\frac{4a}{3}} < x$

(2) $x = -\sqrt{\frac{4a}{3}}$, $x = \sqrt{\frac{4a}{3}}$

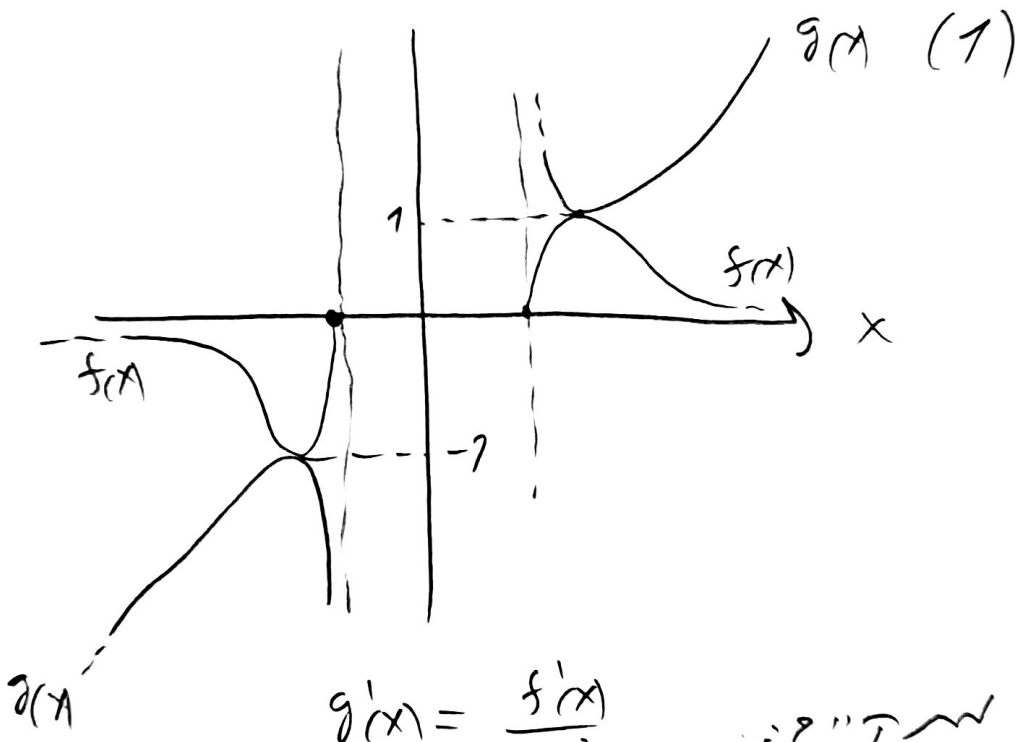


נמידע עכ פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה.



1. נכיון שיש אפיונהיות $f(x)$ ו- $g(x)$ שגד שמהם גדולה היקיון, זה נהייב שטוער ה- g שלהן הוא 1 , 1 אכן:



הסקר: $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)^2}$

כאשר טעו x של נדונה היקיון שמהם אכן חזוה עליה ויכונה את הפכים.

$\frac{1}{2a} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ (2)

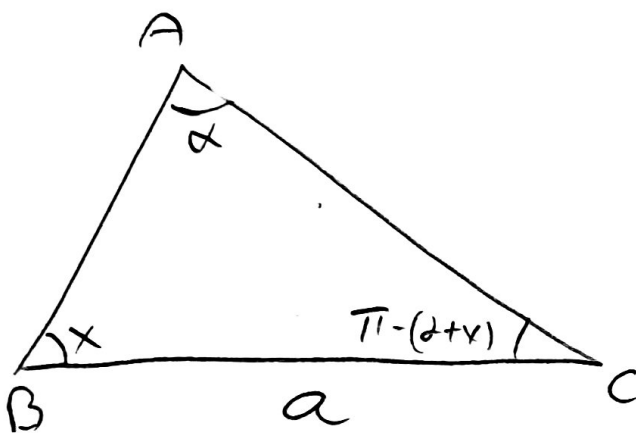
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעבודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה.



8. במשולש ABC אורך הצלע BC הוא a.
נתון: $\angle BAC = \alpha$ (ברדיאנים).
נסמן: $\angle ABC = x$ ($0 < x < \pi - \alpha$).

- א. הבע באמצעות x, a ו- α את היקף המשולש ABC.
ב. הבע באמצעות α את ערך ה-x שבעבורו היקף המשולש ABC הוא מקסימלי.
ג. הסבר מדוע מתקיים המשפט הזה: מכל המשולשים בעלי צלע נתונה וזווית מולתה נתונה, המשולש בעל ההיקף המקסימלי הוא משולש שווה שוקיים.



פתרון:

א. (נראה קל) הסינוס:

$$\angle C = \pi - (\alpha + x)$$



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin x} = \frac{AB}{\sin(\pi - (\alpha + x))}$$

($\pi > \alpha + x$)

$$AC = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin x$$

$$AB = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin(\alpha + x)$$

$$P_{ABC} = a + \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin x + \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin(\alpha + x)$$

ולכן:

נמידע על פסיכומטרי
בימאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה



→ נגזרת אלה ההיטה:

$$P'_{ABC} = 0 + \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \cos x + \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \cos(\alpha + x)$$

נשווה לאפס ונסוור:

$$\frac{a}{\sin \alpha} (\cos x + \cos(\alpha + x)) = 0$$

$$\cos x + \cos(\alpha + x) = 0$$

נשתמש בסה"ח: $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

וידוע:

$$2 \cos\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = 0$$

$$x + \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \phi$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + \pi k$$

בתחום הנתון $(0 < x < \pi - \alpha)$ (דג)

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

↓



נצטרך כעת להיות:

$$f''(x) = \frac{9}{\sin \alpha} (-\sin x - \sin(\alpha + x))$$

↑
חיובי

$$f''\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) - \sin\left(\alpha + \frac{\pi - \alpha}{2}\right)$$

$$= -\left(\sin\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right)\right)$$

בתחום הימין הביטויים בסוגריים של הביטויים
חיוביים ולכן סימן המכנה יהיה שלילי.
אם כן נקבע ש $x = \frac{\pi - \alpha}{2}$ מתקבל נדרוש
לדאוג.

תשובה: עבור

$$\boxed{x = \frac{\pi - \alpha}{2}}$$

יחדיו הם מהווים משולש ABC.

$$\angle C = \pi - (\alpha + x) = \pi - \left(\alpha + \frac{\pi - \alpha}{2}\right) = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

↓

נחידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה.



די בלתי שאלא תלמידי גא, תלמידי (דפי)
סעקור היילי מהסיילי

$$\angle B = \angle C = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

ומכאן, שישלילם ABC אלה ילקיין

$$AB = AC$$

נמידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה.

