פתרון הבחינה
במתמטיקה

מועד מיוחד תשפ"א, 2021, שאלון: 35482

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע" :
יואל גבע, ארד טלמון, ריקי טל, אביחי כהן, קובי שרוני, אודי נעים, יאיר גולני, רועי גבע

1. נתונה סדרה הנדסית a_n שבה $a_4 = 12$, $a_7 = -96$.

א. מצא את מנת הסדרה ואת a_1 .

נתון: בסדרה a_n יש מספר זוגי של איברים.

סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים של הסדרה הוא 262,143 .

ב. מצא את מספר האיברים בסדרה a_n .

נתונה סדרה חשבונית b_n המקיימת: $b_7 = a_6$, $b_1 = a_3$.

ג. (1) מצא את הפרש הסדרה b_n .

(2) מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה b_n שסכומם הוא 357 .

א. סדרה a_n הנדסית

$a_n = a_1 q^{n-1}$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$

$a_7 = a_4 \cdot q^3$

$-96 = 12 \cdot q^3 \quad | :12$

$q^3 = -8 \quad | \sqrt[3]{}$

$\boxed{q = -2}$

$a_4 = a_1 q^3$

$12 = a_1 \cdot (-8)$

$\boxed{a_1 = -1.5}$

ב.

איבר 1	מקומות זוגיים
איבר 1	$a_2 = 3$
מנה	$q^2 = 4$
כמות	n

$a_2 = a_1 q = 3$

$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$

$262,143 = \frac{3 \cdot (4^n - 1)}{4 - 1}$

$262,143 = 4^n - 1$

$4^n = 262,144$

$n = \log_4 262144$

$n = 9$

[בסדרה כולה ישנם 18 איברים]

ג. b_n סדרה חשבונית

$b_1 = a_3 = a_1 q^2 = -6$

$b_7 = a_6 = a_1 q^5 = 48$

(1)

$b_7 = b_1 + 6d$

$48 = -6 + 6d$

$54 = 6d \qquad \boxed{d=9}$

(2)

$b_n + b_{n+1} = 357$

$b_n + b_n + d = 357$

$2b_n + 9 = 357$

$2b_n = 348$

$b_n = 174$

[האיברים הם $b_{22} + b_{21}$
כלומר - מקומותיהם הינם
המקומות 22 ו 21]

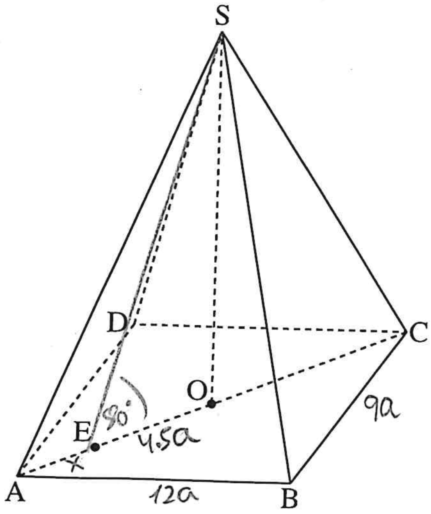
$b_1 + (n-1)d = 174$

$-6 + (n-1)\cdot 9 = 174$

$(n-1)\cdot 9 = 180 \quad |:9$

$n-1 = 20$

$n = 21$



2. נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ABCD הוא מלבן.

SO הוא גובה הפירמידה (ראה סרטוט).

נתון: $BC = 9a$, $AB = 12a$. a הוא פרמטר חיובי.

א. הבע באמצעות a את אורך אלכסון הבסיס, AC .

E היא נקודה על האלכסון AC כך שמתקיים: $EC = 4 \cdot AE$.

נתון כי גודל הזווית שבין SE לבסיס הוא 80^o .

ב. הבע באמצעות a את גובה הפירמידה, SO .

ג. נתון כי שטח המשולש SEO שווה ל- 130 .

חשב את נפח הפירמידה המשולשת SABC .

א. משפט פיתגורס במשולש ABC :

$AC^2 = (9a)^2 + (12a)^2$

$AC^2 = 81a^2 + 144a^2$

$AC^2 = 225a^2 \quad /\sqrt{\ }$

$\boxed{AC = 15 \cdot a}$

ב. נתון $EC = 4 \cdot AE$. נסמן $AE = x$ ולכן $EC = 4x$

$AC = 5x = 15 \cdot a \Rightarrow x = 3a$

$AE = 3a$

$AO = \frac{1}{2}AE = 7.5a$

$OE = 4.5a \Leftarrow$

$\underline{\Delta SOE}:$ $\tan 80^\circ = \frac{SO}{OE}$

$SO = 4.5a \cdot \tan 80^\circ$

$\boxed{SO = 25.52 \cdot a}$

ז.

$$S_{SEO} = \frac{1}{2}\cdot 50\cdot OE = 130$$

$$25.52\cdot a\cdot 4.5\cdot a = 260$$

$$a^2 = 2.264$$

$$a = 1.505$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 9a\cdot 12a\right)\cdot 25.52\cdot a$$

$$\boxed{V_{SABC} = 1{,}564.8}$$

3. נתונה הפונקציה $f(x)=\sin(2x)+\frac{1}{2}$ המוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. מצא את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=-4\sin x\cdot\cos x-1$ המוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

ד. הוכח כי $g(x)=-2f(x)$ לכל x בתחום.

ה. **(1)** מצא את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגן.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ו. מצא בעבור איזה ערך של k, הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בשלוש נקודות שונות.

א.

$f(0)=\sin(0)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\quad(0,\frac{1}{2})$

$f(x)=0 \Rightarrow \sin 2x+\frac{1}{2}=0 \qquad \sin 2x=-\frac{1}{2}$

$2x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k \qquad 2x=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2\pi k$

$x=-\frac{\pi}{12}+\pi k \qquad 2x=\frac{7\pi}{6}+2\pi k$

מתקיים $x=-\frac{\pi}{12} \qquad x=\frac{7\pi}{12}+\pi k$

מתקיים $x=-\frac{5\pi}{12}$

$\boxed{(0,\frac{1}{2})\ (-\frac{\pi}{12},0)\ (-\frac{5\pi}{12},0)}$

ב.

$f'(x)=2\cos 2x=0$

$\cos 2x=0$

$2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

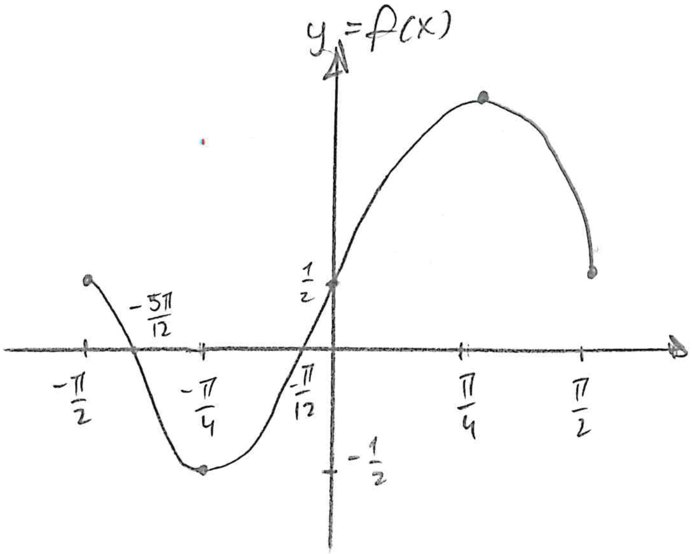
$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$

מתקיים $x=-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$	+	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'	קצה	−	0		0	−	קצה
f	max	↘	min	↗	max	↘	min

$$\left\{\begin{matrix} \max(-\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}) & \min(-\frac{\pi}{4},-\frac{1}{2}) \\ \max(\frac{\pi}{4},\frac{3}{2}) & \min(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}) \end{matrix}\right\}$$

ג.



ד.

$$g(x) = -4\sin x \cdot \cos x - 1 \qquad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

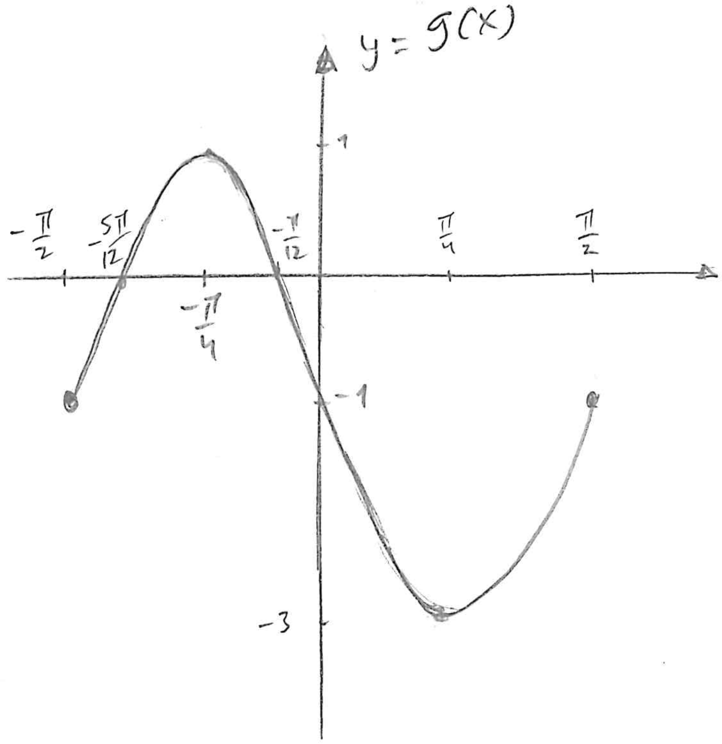
$$g(x) = -2\cdot(2\sin x \cdot \cos x) - 1 = -2\cdot \sin 2x - 1 = -2\cdot\underbrace{\left(\sin 2x + \frac{1}{2}\right)}_{=f(x)}$$

מכאן $g(x) = -2\cdot f(x)$

ה. (1) $g(x)$ הינה שיקוף אנכי ומתיחה של $f(x)$ ולכן שיעורי ה-x
של נקודות הקיצון הן זהות וסוגן מנוגד
וערכי הפונקציה מוכפלים ב- (-2)

$$\left\{ \min\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right),\ \max\left(-\frac{\pi}{4}, 1\right),\ \min\left(\frac{\pi}{4}, -3\right),\ \max\left(\frac{\pi}{2}, -1\right) \right\}$$

(ה.2)



1. $y=k$ יחתוך בשלוש נקודות רק עבור

$$\boxed{k=-1}$$

4. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^{2x}+3}{e^x-1}-7$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) רשום את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המאונכת לציר ה־ x .

ב. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

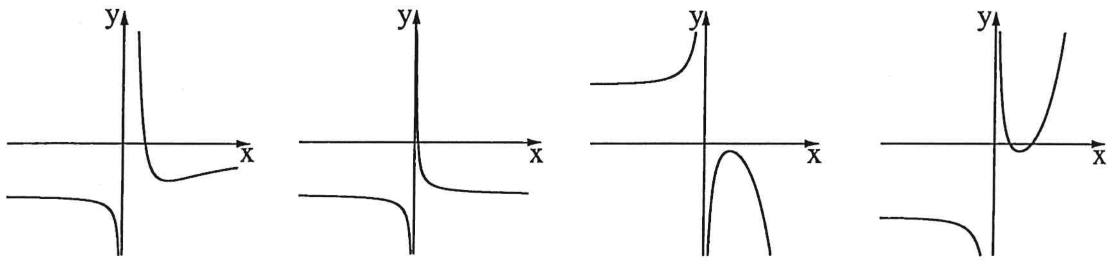
ד. **(1)** מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) אחד מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את גרף הפונקציה $f(x)$. קבע איזה מהם, ונמק את קביעתך.

ה. נתונה הפונקציה $g(x)$ שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נגזרת הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g'(x)=f(x)$.

מצא את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגן.



IV III II I

פתרון:

א.1. תחום הגדרה: נדרוש: מכנה שונה מאפס:

$e^x-1\neq 0$

$e^x\neq 1$

$e^x\neq e^0$

$\boxed{x\neq 0}$

2. $x=0$ מאפס את המכנה של המנה אך לא את המונה.

ולכן נוכל לקבוע כי $\boxed{x=0}$ הינה אסימפטוטה מאונכת לציר x של הפונקציה.

$f(x)=\frac{e^{2x}+3}{e^x-1}-7$

ב. נקודת קיצון:

נגזיר:

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}\cdot(e^x-1)-(e^{2x}+3)e^x}{(e^x-1)^2}$$

נפשט את הביטוי האלגברי של הנגזרת:

מונה הנגזרת:

$$e^x\cdot[2e^x\cdot(e^x-1)-(e^{2x}+3)]=e^x\cdot[2e^{2x}-2e^x-e^{2x}-3]=$$

$$=e^x\cdot[e^{2x}-2e^x-3]=$$

$$=e^x\cdot[(e^x)^2-2e^x-3]=$$

(פירוק לגורמים לפי "טרינום")

$$=e^x\cdot[(e^x-3)(e^x+1)]$$

כלומר הנגזרת הינה:

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot(e^x-3)\cdot(e^x+1)}{(e^x-1)^2}$$

נשים לב כי הביטוי $\frac{e^x\cdot(e^x+1)}{(e^x-1)^2}$

הינו חיובי לכל $x\neq0$ (תחום ההגדרה של הפונקציה f והנגזרת f')

ולכן סימן הנגזרת "ייקבע" עפ"י הסימן של הביטוי e^x-3

נשווה את הנגזרת לאפס: $f'(x)=0$ כאשר $e^x-3=0$ (ראה הסבר לעיל).

$e^x=3$

$x=\ln3$

נציג בטבלה ונציב בביטוי e^x-3 לקביעת סימן הנגזרת.

x	$x<0$	$0<x<\ln3$	$\ln3$	$\ln3<x$
$f(x)$			-1	
$sign(f'(x))$	$-$	$-$	0	$+$
התנהגות $f(x)$ עלייה/ירידה	↘	↘	min	↗

ראה חישובים עבור הטבלה להלן:

$\underline{x=-1}$

$$e^{-1}-3=\frac{1}{e}-3<0$$

$\underline{x=1}$

$$e^{1}-3=e-3<0$$

$\underline{x=2}$

$$e^{2}-3>0$$

נחשב את שיעור ה-y של נקודת הקיצון:

$$f(\ln3)=\frac{e^{2\ln3}+3}{e^{\ln3}-1}-7=\frac{12}{2}-7=-1 \Rightarrow \boxed{(\ln3,-1)\ \text{min}}$$

ג. תחומי העלייה והירידה של הפונקציה f, מהטבלה לעיל:

תחומי עלייה: $\ln3<x$

תחומי ירידה: $0<x<\ln3$ או $x<0$

ד.1. לגרף f אין נקודת חיתוך עם ציר ה-y שכן $x=0$ לא בתחום ההגדרה של הפונקציה.

חיתוך עם ציר x: נציב $y=0$ בביטוי האלגברי של הפונקציה:

$$0=\frac{e^{2x}+3}{e^x-1}-7 \quad \overset{+7}{\Rightarrow} \quad \frac{e^{2x}+3}{e^x-1}=7 \quad /\cdot(e^x-1)$$

$$e^{2x}+3=7e^x-7 \quad /-7e^x+7$$

$$e^{2x}-7e^x+10=0$$

$$(e^x)^2-7e^x+10=0$$

(פירוק לפי טרינום)

$$(e^x-2)(e^x-5)=0$$

או

$$e^x=2 \qquad e^x=5$$

$$x=\ln 2 \qquad x=\ln 5$$

נסכם: נקודות חיתוך גרף הפונקציה f עם ציר ה-x הן:

$\boxed{(\ln 2,0),\ (\ln 5,0)}$

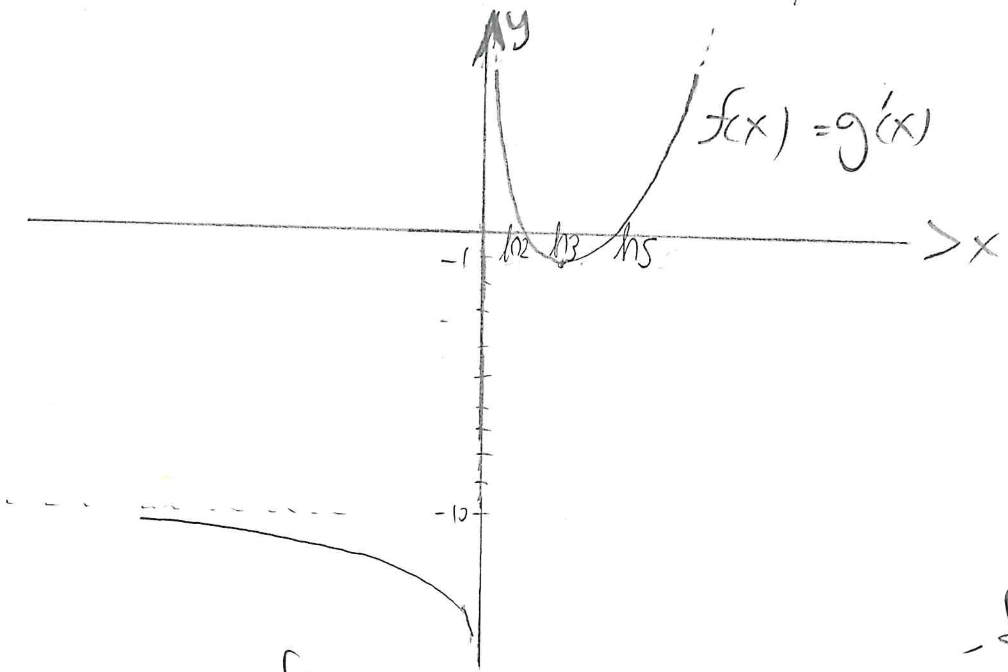
ד.1. גרף I תואם לכל סעיפי חקירת הפונקציה (א-ג).
לכן גרף I מתאר את גרף הפונקציה $f(x)$

גרף II אינו מתאר את גרף הפונקציה f בשל סוג הקיצון, תחומי העלייה והירידה ונקודות החיתוך עם הצירים.

גרף III נפסל מכיוון שאין בו נקודת קיצון והוא עולה עבור $x>\ln 2$.

גרף IV נפסל מכיוון שיש לו רק נקודת חיתוך אחת עם ציר ה-x.

ה. תחום ההגדרה של $g(x)$ זהה לזה של $f(x)$.
$f(x) = g'(x)$ כלומר $f(x)$ היא הנגזרת של $g(x)$.
נשתמש בגרף הפונקציה $f(x)$ (גרף מס' I)
שציירנו בסעיף הקודם.



שיעורי ה-x של
הנקודות בהן $g'(x)$ מתאפסת הם שיעורי ה-x של נקודות
החיתוך של גרף $f(x)$ עם ציר ה-x.
כלומר $g'(x)=0$ עבור $x=\ln5$ או $x=\ln2$
$f(x)=g'(x)$ עוברת מחיובית לשלילית דרך אפס סביב $x=\ln2$
ולכן ל-$g(x)$ יש נקודת קיצון מסוג מקסימום ב-$x=\ln2$.
$f(x)=g'(x)$ עוברת משלילית לחיובית דרך אפס סביב $x=\ln5$.
לכן ל-$g(x)$ יש נקודת קיצון מסוג מינימום ב-$x=\ln5$.

5. נתונה הפונקציה $f(x)=\ell n(-x^2+4x-3)$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה־ y .

ב. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+b$. b הוא פרמטר.

ה. קבע איזו מן הטענות (1)–(2) שלפניך נכונה. נמק את קביעתך.

(1) כאשר $b<0$, גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה־ x בשתי נקודות.

(2) כאשר $b>0$, גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה־ x בשתי נקודות.

ו. נתון כי הישר $y=-\ell n(0.75)$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודת הקיצון שלה.

מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה־ x .

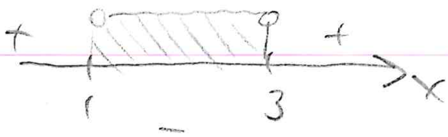
פתרון:

א(1). תחום הגדרה: נדרוש: תוכן הלוגריתם חיובי:

$0<-x^2+4x-3$

$x^2-4x+3<0$

$(x-1)(x-3)<0$



$\boxed{1<x<3}$

(2) מתכונות הפונקציה הלוגריתמית, כאשר תוכן הלוגריתם שואף לאפס ערכי הפונקציה שואפים למינוס אינסוף.

מאפסי תוכן הלוגריתם, ומתחום ההגדרה: $(x-1)(x-3)=0$

$x=1$ או $x=3$

לפי הנ"ל נוכל לקבוע כי $\boxed{x=3}$ ו- $\boxed{x=1}$ הן האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה-y.

ב. נקודת קיצון:

נגזור:

$$f(x)=\ln(-x^2+4x-3)$$

$$f'(x)=\frac{-2x+4}{-x^2+4x-3}$$

נשווה את הנגזרת לאפס: $f'(x)=0$

$$\frac{-2x+4}{-x^2+4x-3}=0 \quad /\cdot(-x^2+4x-3)$$

$$-2x+4=0 \quad /+2x$$

$$4=2x \quad /:2$$

$$x=2$$

מתחום ההגדרה של f והביטוי האלגברי של f' נוכל לקבוע כי המכנה של הנגזרת f' חיובי בכל תחום ההגדרה ($1<x<3$)
לכן נוכל לגזור רק את מונה הנגזרת f' לבדיקת סימן של הנגזרת השנייה בנקודה בה $x=2$ בלבד.

$$(-2x+4)'=-2<0$$

(בכלל בכל $1<x<3$)

נוכל לקבוע כי $f''(2)<0$.

ולכן ל-f יש נקודת קיצון מסוג מקסימום עבור $x=2$.

נחשב את ערך הפונקציה f עבור $x=2$:

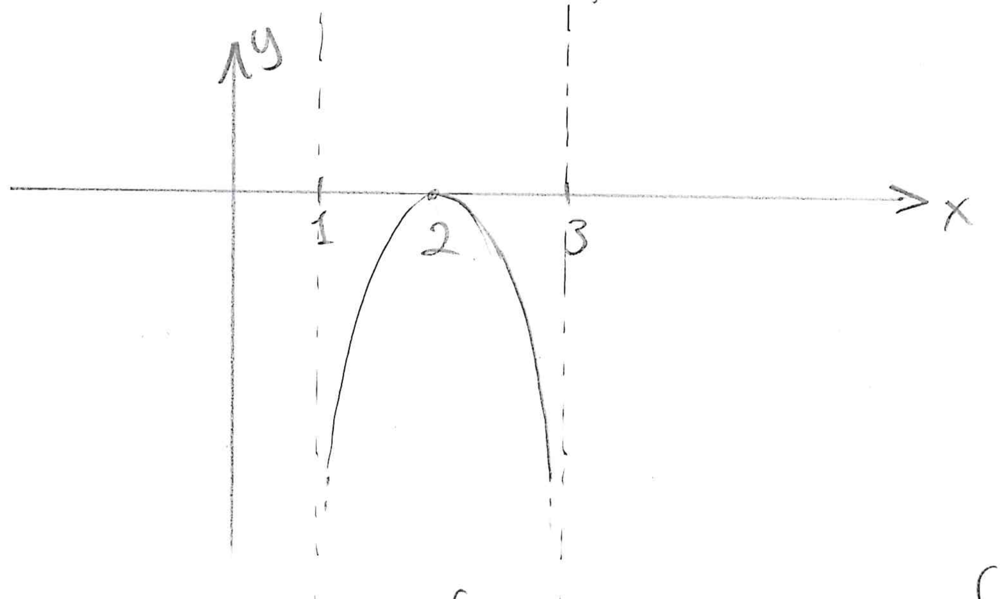
$$f(2)=\ln(-2^2+4\cdot2-3)=\ln 1=0 \Rightarrow \boxed{(2,0)\max}$$

ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה f. מתחום ההגדרה של f וסוג הקיצון שמצאנו כאשר $x=2$, נוכל להסיק כי:

תחומי העלייה של הפונקציה f: $1<x<2$

ותחומי הירידה של הפונקציה f: $2<x<3$

ד. סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ על פי כל סעיפי החקירה:



ה. $g(x)=f(x)+b$. b הוא פרמטר.
גרף הפונקציה $g(x)$ מהווה הזזה של גרף הפונקציה $f(x)$ ב-b יחידות בציר ה-y.
לכן שיעור ה-x של נקודת הקיצון וסוג הקיצון לא ישתנו.
שיעור ה-y של נקודת הקיצון יהיה: $g(2)=f(2)+b=0+b=b$
לכן נקודת הקיצון של $g(x)$: $(2,b)\max$
ולפי חקירה קודמת זו היא נקודת קיצון מוחלטת בתחום $1<x<3$.

נבדוק כי טענה (1):
כאשר $b<0$, גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה-x בשתי נקודות הינה טענה שגויה. שכן במקרה זה נקודת המקסימום המוחלט תהיה מתחת לציר ה-x וגרף הפונקציה $g(x)$ לא יחתוך את ציר ה-x.

ולכן טענה (2):
כאשר $0<b$, גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה-x בשתי נקודות היא טענה נכונה. במקרה זה נק' המקסימום המוחלטת נמצאת מעל ציר ה-x ומהחקירה של הפונקציה $f(x)$ ניכר כי במקרה זה גרף $g(x)$ יחתוך את ציר ה-x בשתי נקודות.

ו. נתון כי הישר $y=-\ln(0.75)$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודת הקיצון שלה.

לכן שיעור ה-y של נקודת ההשקה הינו $y=-\ln(0.75)$

הראינו כי הביטוי עבור שיעור ה-y של נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ הוא: $y=b$

מהנ"ל נובע כי $b=-\ln(0.75)$.

נציב זאת בביטוי האלגברי של הפונקציה $g(x)$:

$$g(x)=f(x)+b=\ln(-x^2+4x-3)-\ln(0.75)$$

על מנת לחשב את נקודות החיתוך של $g(x)$ עם ציר ה-x, נציב $y=0$ בביטוי האלגברי של הפונקציה $g(x)$:

$$g(x)=0$$

$$\ln(-x^2+4x-3)-\ln(0.75)=0 \quad /+\ln(0.75)$$

$$\ln(-x^2+4x-3)=\ln(0.75)$$

$$-x^2+4x-3=0.75 \quad /-0.75$$

$$-x^2+4x-3.75=0 \quad /\cdot 4$$

$$-4x^2+16x-15=0 \quad /\cdot(-1)$$

$$4x^2-16x+15=0$$

$$4(x-1.5)(x-2.5)=0$$

$x=1.5$ או $x=2.5$

לסיכום: שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה-x הן:

$\boxed{(1.5,0)\ ,\ (2.5,0)}$