פתרון הבחינה
במתמטיקה

מועד קיץ תשפ"א, 2021, שאלון: 35481

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע" :

1. הדרך בין ביתו של ארז ובין ביתה של קרן היא מסלול ישר שאורכו 36 ק"מ.

ביום א' בשעה 7:00 יצא כל אחד מהם מביתו ורכב על אופניים במהירות קבועה לכיוון ביתו של האחר.

הם נפגשו בשעה 8:20 .

ביום ב' שוב יצאו ארז וקרן מביתם ורכבו על אופניים זה לכיוונו של זה.

ארז יצא מביתו בשעה 7:00 , ואילו קרן יצאה מביתה בשעה 7:45 .

כל אחד מהם רכב באותה מהירות שבה רכב ביום א'.

בזמן שנפגשו היה ארז במרחק 21 ק"מ מביתו.

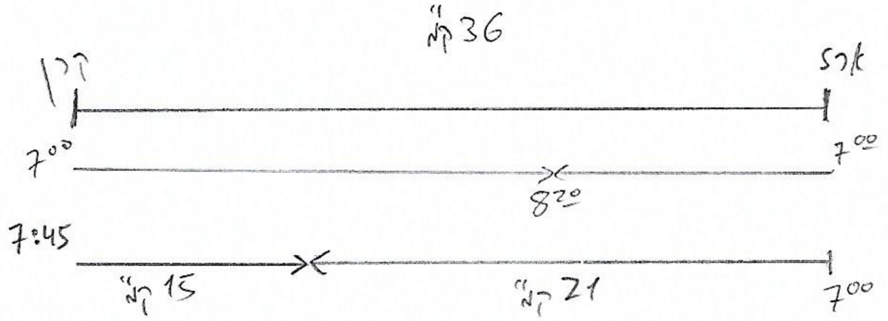
א. מצא את מהירות הרכיבה של ארז ואת מהירות הרכיבה של קרן.

ב. באיזו שעה הם נפגשו ביום ב'? נמק.

ג. באיזו שעה ביום ב' היה המרחק בין ארז לבין קרן 13.5 ק"מ לפני שהם נפגשו? נמק.

1^{20} שעות $= \left(1\frac{1}{3}\right)$ שעות

45 דקות $= \frac{45}{60} = \left(\frac{3}{4}\right)$ שעות



	t זמן (שעות)	v מהירות (קמ"ש)	S דרך (ק"מ)
יום א' ארז	$1\frac{1}{3}$	x	$1\frac{1}{3}x$
יום א' קרן	$1\frac{1}{3}$	y	$1\frac{1}{3}y$
יום ב' ארז	$\frac{21}{x}$	x	21
יום ב' קרן	$\frac{15}{y}$	y	15

36 ק"מ ביחד

(1) $1\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}y = 36$

(2) $\frac{21}{x} = \frac{15}{y} + \frac{3}{4}$

$\Downarrow$

(1) $1\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}y = 36 \quad \backslash :1\frac{1}{3}$

$x + y = 27 \qquad y = 27 - x$

(2) $\dfrac{\overset{4(27-x)}{21}}{x} = \dfrac{\overset{4x}{15}}{27-x} + \dfrac{\overset{x(27-x)}{3}}{4} \quad \backslash \cdot 4 \cdot x \cdot (27-x)$

$84(27-x) = 60x + 3x(27-x)$

$2268 - 84x = 60x + 81x - 3x^2$

$3x^2 - 225x + 2268 = 0 \quad \backslash :3$

$x^2 - 75x + 756 = 0$

נפסל $y>0$ $\left\{ \begin{array}{ll} x_1 = 63 & x_2 = 12 \\ y_1 = -36 & y_2 = 15 \end{array} \right. \Rightarrow$ { מהירות הרכיבה של ארז היא 12 קמ"ש
מהירות הרכיבה של קרן היא 15 קמ"ש }

ב. זמן הרכיבה של ארז ביום ב' הוא $\frac{21}{x}$ ובהצבת $x=12$ קמ"ש
מתקבל כי רכב 1.75 שעות עד המפגש.
0.75 שעות $= 0.75 \times 60$ דקות $=$ 45 דקות ולכן רכב שעתיים ו- 45 דקות
מאחר שיצא בשעה 7:00 [המפגש אירע ביום ב' בשעה 08:45]

ויכולנו גם לחשב את הזמן של קרן $= \frac{15}{y}$ ובהצבת $y=15$ קמ"ש
מתקבל כי רכבה שעה אחת בדיוק.
מאחר שיצאה בשעה 7:45 המפגש ביום ב' אירע בשעה 08:45

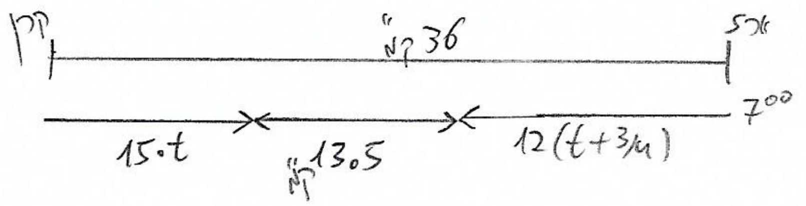
ג. נסמן t = זמן הרכיבה של קרן

ולכן $t+\frac{3}{4}$ = זמן הרכיבה של ארז מכיוון שיצא 45 דקות לפניה.

$\underset{\text{קמ"ש}}{15}\cdot t$ = הדרך שקרן עברה בזמן t

$\underset{\text{קמ"ש}}{12}\cdot(t+\frac{3}{4})$ = הדרך שארז עבר בזמן $t+\frac{3}{4}$

$$15\cdot t+12\cdot(t+\tfrac{3}{4})=\underset{\text{ק"מ}}{36}-\underset{\text{ק"מ}}{13.5}$$



$$15t+12t+9=22.5$$
$$27t=13.5 \Rightarrow \underset{\text{שעה}}{t=0.5}=\underset{\text{דקות}}{30}$$

קרן רכבה 30 דקות
ארז רכב 75 דקות
(30+45)

עבור קרן $7:45$ + 30 דקות = $08:15$ ו עבור ארז. $7:00$ + 75 דקות = $08:15$

ביום ב' המרחק ביניהם היה 13.5 ק"מ
(לפני שנפגשו) בשעה 8:15

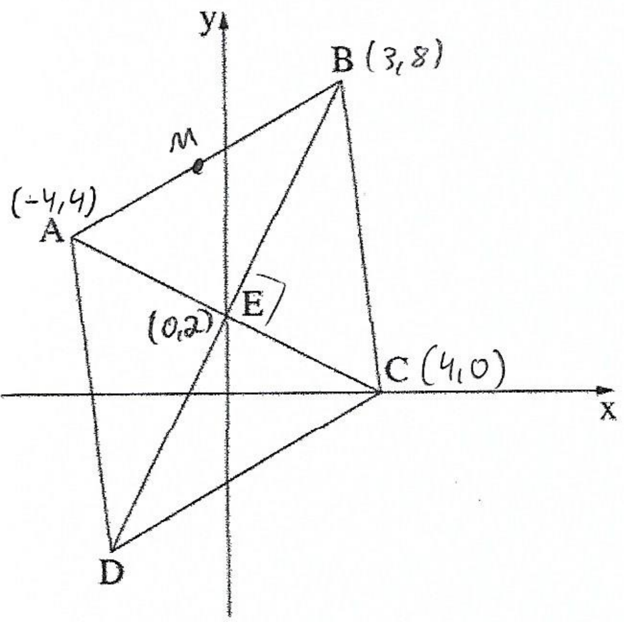
2. המרובע ABCD המתואר בציור שלפניך הוא מעוין.

הנקודה B נמצאת ברביע הראשון.

אלכסוני המעוין נפגשים בנקודה E הנמצאת על ציר ה־ y .

נתון: $C(4,0)$;

שיפוע הישר BD הוא 2 .



א. **(1)** מצא את שיעורי הנקודה E .

(2) מצא את משוואת הישר BD .

נתון: שטח המשולש BEC הוא 15 .

ב. **(1)** מצא את אורך הקטע BE .

(2) מצא את שיעורי הנקודה B .

ג. מצא את משוואת המעגל החוסם את המשולש AEB .

א. (1) $BD \perp AC$ אלכסוני מעוין מאונכים זה לזה

$m_{BD}=2 \Rightarrow m_{AC}=-\frac{1}{2}$

משוואת AC:

$C(4,0)$ $\quad AC: \ y-0=-\frac{1}{2}(x-4) \Rightarrow y_{AC}=-\frac{1}{2}x+2$

חיתוך של AC עם ציר y:

$x_E=0 \Rightarrow y_E=-\frac{1}{2}\cdot 0+2=2 \Rightarrow \boxed{E(0,2)}$

(2) ישר BD:

$m_{BD}=2 \quad E(0,2)$

$y-2=2(x-0) \Rightarrow \boxed{y_{BD}=2x+2}$

נתון: $S_{BEC}=15$

ב. (1) $S_{BCE}=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot CE$

$d_{CE}=\sqrt{(4-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{20}$

$\frac{1}{2}\cdot BE\cdot\sqrt{20}=15$

$BE=\frac{30}{\sqrt{20}}=3\sqrt{5}$

$\boxed{BE=3\sqrt{5}}$

ב.(2) הנקודה B נמצאת על BD ולכן מקיימת את משוואתו

$BE = 3\sqrt{5}$ ומקיימת $E(0,2)$ ו- $B(x, 2x+2)$

$d_{BE} = 3\sqrt{5} = \sqrt{(x-0)^2 + (2x+2-2)^2}$

$(3\sqrt{5}) = \sqrt{x^2+(2x)^2} \quad /()^2$

$45 = x^2 + (2x)^2$

$45 = x^2 + 4x^2$

$5x^2 = 45$

$x^2 = 9$

$x = -3 \qquad x = 3$

$x_D = -3 \qquad x_B = 3$

$D(-3,-4) \qquad \boxed{B(3,8)}$

הנקודה D נמצאת גם כן על BD
ומקיימת את משוואתו וגם סבורה
המרחק מנק' E שווה ל- $3\sqrt{5}$
ולכן x_D הוא הפתרון הנוסף של המשוואה

$x_B = 3 \qquad y_B = 2x+2$

$y_B = 8$

$x_D = -3 \qquad y_D = 2x+2$

$y_D = -4$

ג. מרכז M המעגל החוסם את $\triangle ABE$ הוא אמצע AB כי AB קוטר במעגל כי $\angle AEB = 90°$

E אמצע AC. $E(0,2)$, $C(4,0)$

$0 = \frac{x_A+4}{2} \Rightarrow x_A = -4$

$2 = \frac{y_A+0}{2} \Rightarrow y_A = 4$

$A(-4,4)$, $B(3,8)$ $\quad M\left(\frac{3-4}{2}, \frac{8+4}{2}\right) \quad M\left(-\frac{1}{2}, 6\right)$

$a = -\frac{1}{2}$

$b = 6$

$R = d_{AM} = \sqrt{(-4+\frac{1}{2})^2 + (6-4)^2} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{65}}{2} \quad R^2 = \frac{65}{4} = 16\frac{1}{4}$

משוואת המעגל היא

$$\boxed{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y-6)^2 = 16\frac{1}{4}}$$

3. בקופסה יש 20 כדורים בשלושה צבעים בלבד: אדום, לבן ושחור.

נתון: 40% מן הכדורים שבקופסה אדומים.

מספר הכדורים השחורים בקופסה גדול פי 3 ממספר הכדורים הלבנים בקופסה.

א. מהי ההסתברות להוציא מן הקופסה באקראי כדור לבן?

ב. הוציאו באקראי כדור מן הקופסה, החזירו אותו והוציאו שוב באקראי כדור מן הקופסה.

מהי ההסתברות ששני הכדורים שהוציאו הם באותו צבע?

ג. מתוך הקופסה שבה 20 הכדורים הוציאו באקראי בזה אחר זה שני כדורים <u>ללא החזרה</u>.

(1) מהי ההסתברות ששני הכדורים שהוציאו הם באותו צבע?

(2) אם ידוע ששני הכדורים שהוציאו הם בצבעים <u>שונים</u>, מהי ההסתברות שהכדור הראשון שהוציאו הוא לבן?

א.

$P(\text{אדום}) = 0.4 \quad P(\text{לבן}) = x \quad P(\text{שחור}) = 3x$

$0.4 + x + 3x = 1$

$4x = 0.6$

$x = 0.15$

$P(\text{לבן}) = 0.15$

$P(\text{שחור}) = 0.45$

$\boxed{P(\text{לבן}) = 0.15 = \frac{3}{20}}$

ב.

$P(\text{אותו צבע}) = P^2(\text{לבן}) + P^2(\text{אדום}) + P^2(\text{שחור}) = 0.4^2 + 0.15^2 + 0.45^2 = 0.385$

בגלל ההחזרה ההסתברויות הן ללא שינוי

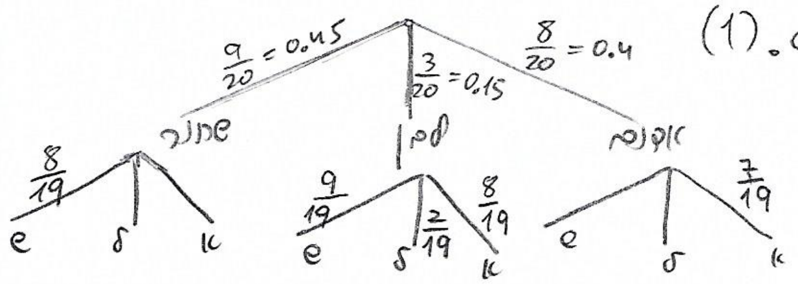
$\boxed{P(\text{אותו צבע}) = \frac{77}{200} = 0.385}$

ג. (1)

8 אדומים $= 0.4 \times 20 =$ כמות אדומים

3 לבנים $= 0.15 \times 20 =$ כמות לבנים

9 שחורים $= 0.45 \times 20 =$ כמות שחורים



$P(\text{אותו צבע}) = P(\text{לבן לבן}) + P(\text{אדום אדום}) + P(\text{שחור שחור})$

$P(\text{אותו צבע}) = \frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19} + \frac{3}{20}\cdot\frac{2}{19} + \frac{9}{20}\cdot\frac{8}{19}$

$\boxed{P(\text{אותו צבע}) = \frac{134}{380} = \frac{67}{190} = 0.3526}$

ג.(21) מאורע = צבעים שונים

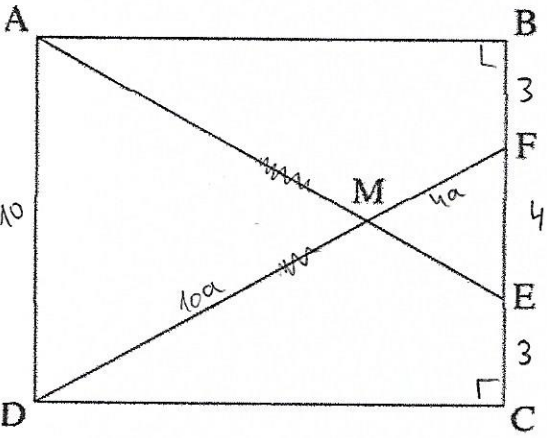
$$P\left(\text{צבעים שונים}\right) = 1 - P\left(\text{אותו צבע}\right)$$

$$P\left(\text{צבעים שונים}\right) = 1 - \frac{67}{190} = \frac{123}{190} = \frac{246}{380}$$

$$P\left(\text{ראשון לבן} \cap \text{צבעים שונים}\right) = P\left(\text{לבן ירוק}\right) + P\left(\text{לבן שחור}\right) = \frac{3}{20}\cdot\frac{8}{19} + \frac{3}{20}\cdot\frac{9}{19} = \frac{51}{380}$$

$$P\left(\text{ראשון לבן} / \text{צבעים שונים}\right) = \frac{\frac{51}{380}}{\frac{246}{380}} = \frac{51}{246}$$

$$\boxed{P\left(\text{ראשון לבן} / \text{צבעים שונים}\right) = \frac{51}{246} = \frac{17}{82} \simeq 0.2073}$$



4. המרובע ABCD הוא מלבן.

הנקודות E ו־ F נמצאות על הצלע BC, כמתואר בציור.

הקטעים AE ו־ DF נחתכים בנקודה M.

א. הוכח: $\Delta AMD \sim \Delta EMF$.

נתון: $AE = DF$.

ב. הוכח: $BF = EC$.

נתון: $AD = 10$, $FB = 3$.

ג. חשב את היחס: $\frac{DF}{DM}$.

א'. 1. $AD \parallel BC$ צלעות נגדיות מקבילות במלבן

2. (S) $\sphericalangle MEF = \sphericalangle MAD$ זווית מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים (1)

3. (S) $\sphericalangle MFE = \sphericalangle MDA$

4. $\Delta AMD \sim \Delta EMF$ לפי משפט דמיון ז.ז (3,2) מ.ש.ל א'.

ב'. 5. נתון $AE = DF$ (3)

6. (S) $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 90°$ קדקודי המלבן הם זוויות ישרות

7. (3) $AB = DC$ צלעות נגדיות שוות במלבן

8. $\Delta ABE \cong \Delta DCF$ לפי משפט חפיפה צלע, צלע והזווית מול הגדולה מביניהן
($AE > AB$, $DF > DC$ היתר בכל משולש גדול מהניצב)

9. $BE = CF$ צלעות שוות בהתאמה בחפיפת משולשים

10. $FE = FE$ קטע משותף לחיסור קטעים

11. $BE - FE = FC - FE$ חיסור קטע משותף

$BF = CE$

מ.ש.ל ב'.

ב. 12. נתון $FB=3$, $AD=10$

13. $CE = FB = 3$ (לפי 11) הצבה

14. $BC = AD = 10$ צלעות נגדיות שוות במלבן

15. $FE = 4$ חיסור קטעים משלימים על BC , $FE = 10-3-3 = 4$

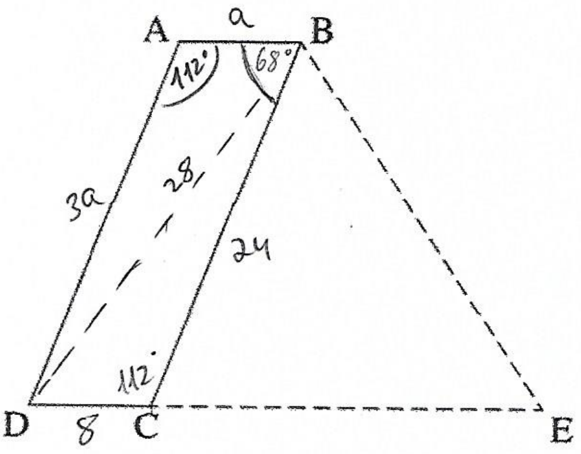
16. $\frac{DM}{MF} = \frac{AD}{FE} = \frac{10}{4}$ יחסי צלעות מתאימות שווים במשולשים דומים (4)

17. נסמן לפי (16): $DM = 10X$, $MF = 4X$

$DF = 14X$ חיבור הקטעים

18. $\frac{DF}{DM} = \frac{14X}{10X} = \frac{14}{10}$ הצבה וחישוב

$\boxed{\frac{DF}{DM} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5} = 1.4}$ מ.ש.ל ב.



5. נתונה מקבילית ABCD, כמתואר בציור.

נתון: $\sphericalangle ABC = 68^o$, $AB = a$, $AD = 3a$, $BD = 28$.

א. מצא את a .

ב. חשב את זוויות המשולש DBC .

הנקודה E נמצאת על המשך הצלע DC, כמתואר בציור.

נתון: שטח המשולש BED הוא 356 .

ג. מצא את אורך הקטע CE .

א. $\sphericalangle A = 180° - \sphericalangle ABC$ סכום זוויות חד-צדדיות $180°$

$\sphericalangle A = 112°$ בין מקבילים $AD \parallel BC$

צלעות נגדיות מקבילות במקבילית

$\underline{\triangle ABD}$:

$$28^2 = a^2 + (3a)^2 - 2 \cdot a \cdot 3a \cdot \cos 112°$$

$$784 = a^2 + 9a^2 + 2.248 \cdot a^2$$

$$784 = 12.248 \cdot a^2 \Rightarrow a^2 = 64.01 \Rightarrow \boxed{a = 8}$$

ב. $\sphericalangle BCD = 112° = \sphericalangle A$ זוויות נגדיות שוות במקבילית

$DC = AB = a = 8$, $BC = AD = 3a = 24$ צלעות נגדיות שוות במקבילית

$\underline{\triangle BDC}$:

$$\frac{28}{\sin 112°} = \frac{8}{\sin \sphericalangle B} \Rightarrow \sin \sphericalangle B = \frac{8 \cdot \sin 112°}{28} \Rightarrow \sphericalangle DBC = 15.36°$$

$$\frac{28}{\sin 112°} = \frac{24}{\sin \sphericalangle D} \Rightarrow \sin \sphericalangle D = \frac{24 \cdot \sin 112°}{28} \Rightarrow \sphericalangle BDC = 52.64°$$

$\sphericalangle D = 180° - 112° - 15.36° = 52.64°$ או

זוויות המשולש BDC הן: $\{15.36°, 52.64°, 112°\}$

ג. נתון: $S_{BED}=356$

נסמן $h=$ גובה מ- B ל- DE

$S_{BCE}=\frac{1}{2}\cdot CE\cdot h$

$S_{BDC}=\frac{1}{2}\cdot DC\cdot h$ $\quad DC=8$

$S_{BDC}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 24\cdot \sin 112^\circ = 89$

$\left(=\frac{1}{2}\cdot DC\cdot BC\cdot \sin\measuredangle BCD\right)$

$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot h = 89$

$h=22.25$

$S_{BCE}=S_{BDE}-S_{BDC}=356-89=267$

$267=\frac{1}{2}\cdot CE\cdot 22.25$

$\boxed{CE=24}$

6. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{-1}{x+2}+\frac{k}{x+6}$. k הוא פרמטר.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=-3$.

א. מצא את הפרמטר k .

הצב $k=9$ בפונקציה $f(x)$ וענה על הסעיפים ב-ג.

ב. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

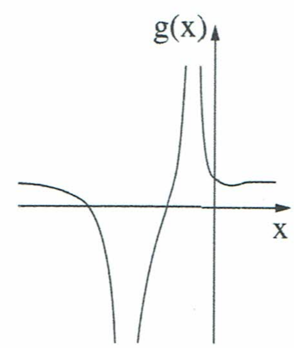
(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

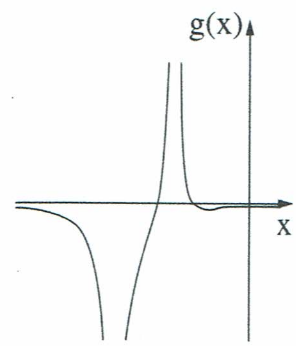
(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=f'(x)$.

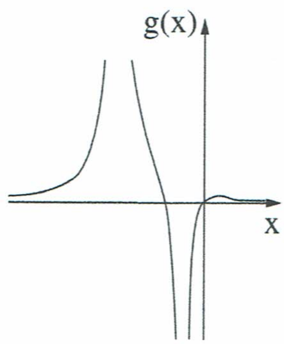
ג. אחד מן הגרפים I-IV שלפניך מתאר את גרף הפונקציה $g(x)$. קבע איזה, ונמק את קביעתך.



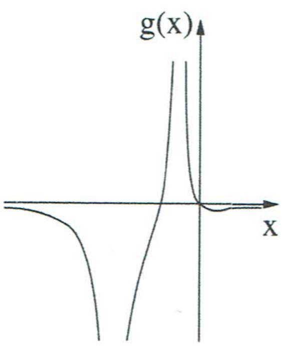
I



II



III



IV

פתרון:

א. הפונקציה הינה פונקציה רציונלית ומוגדרת בתחום הפתוח:
$x\neq-2$ וגם $x\neq-6$

לכן, בנקודת הקיצון של הפונקציה ערך הנגזרת שווה לאפס.

בשילוב עם הנתון בשאלה נקבל: $f'(-3)=0$ *

$$f(x)=\frac{-1}{x+2}+\frac{k}{x+6}=\frac{-(x+6)+k(x+2)}{(x+2)(x+6)}=\frac{(k-1)\cdot x+2k-6}{(x+2)(x+6)}$$

$$f(x)=\frac{(k-1)x+2k-6}{x^2+8x+12}$$

נגזור: נשתמש בנוסחה עבור נגזרת של פונקציית מנה:

$$f'(x)=\frac{(k-1)\cdot(x^2+8x+12)-((k-1)\cdot x+2k-6)(2x+8)}{(x^2+8x+12)^2}$$

$$\Downarrow \quad * \; f'(-3)=0$$

$$\frac{(k-1)\cdot((-3)^2+8\cdot(-3)+12)-((k-1)\cdot(-3)+2k-6)(2\cdot(-3)+8)}{((-3)^2+8\cdot(-3)+12)^2}=0$$

$$(k-1)\cdot(-3)-(-3k+3+2k-6)\cdot 2=0$$

$$-3k+3-2\cdot(-k-3)=0$$

$$-3k+3+2k+6=0 \quad /+k$$

$$9=k$$

$$\boxed{k=9}$$

נציב $k=9$ בביטוי האלגברי של הפונקציה $f(x)$
ובנגזרת $f'(x)$ ונפשט:

$$\boxed{f(x)=\frac{(9-1)\cdot x+2\cdot 9-6}{x^2+8x+12}=\frac{8x+12}{x^2+8x+12}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{(9-1)\cdot(x^2+8x+12)-\left((9-1)\cdot x+2\cdot 9-6\right)(2x+8)}{(x^2+8x+12)^2}}=$$

$$=\frac{8(x^2+8x+12)-\overbrace{(2x+8)(8x+12)}^{16x^2+88x+96}}{(x^2+8x+12)^2}=$$

$$=\frac{8x^2+64x+\cancel{96}-16x^2-88x-\cancel{96}}{(x^2+8x+12)^2}=\boxed{\frac{-8x^2-24x}{(x^2+8x+12)^2}}$$

ב.1. תחום ההגדרה של הפונקציה f: נדרוש: מכנה שונה מאפס:

$x^2+8x+12\neq 0$

$(x+6)(x+2)\neq 0$

$x\neq -6$ וגם $x\neq -2$

תחום הגדרה של הפונקציה f:

$$\boxed{x<-6 \text{ או } -6<x<-2 \text{ או } -2<x}$$

ד.2. אסימפטוטות של הפונקציה f המאונכות לציר ה-x:
מתחום ההגדרה $x=-2$ ו- $x=-6$ מאפסים את המכנה
אך לא את המונה של הפונקציה הרציונלית ולכן ניתן לקבוע
כי $\boxed{x=-2}$ ו- $\boxed{x=-6}$ הן אסימפטוטות
המאונכות לציר ה-x של הפונקציה f.

אסימפטוטות של הפונקציה f המאונכות לציר ה-y:

$$f(x)=\frac{8x+12}{x^2+8x+12}$$

מעריך החזקה הגבוהה ביותר של x במכנה גדול
ממעריך החזקה הגבוהה ביותר של x במונה
ולכן ניתן לקבוע כי $\boxed{y=0}$ הינה אסימפטוטה אנכית
לציר y של הפונקציה f (f רציונלית ולכן יש לה לכל
היותר אסימפטוטה אנכית לציר y יחידה).

ב.3. נקודות הקיצון של הפונקציה f וסוגן:
חשובה - נשווה את הנגזרת לאפס:

$$f'(x)=0$$

$$\frac{-8x^2-24x}{(x^2+8x+12)^2}=0 \Rightarrow -8x^2-24x=0 \Rightarrow -8x(x+3)=0$$

$-8x=0$ או $x+3=0$

$x=0$, $x=-3$

(עלה בקנה אחד עם הנתון בשאלה)

ב.3. המשך... נציג בטבלה:

x	$x <$	-6	$< x <$	-3	$< x <$	-2	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$				4				1	
$\text{Sign}(f'(x))$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
הפונקציה $f(x)$ עליה/ירידה	↘		↘	min	↗		↗	max	↘

חישובים עבור הטבלה:
מהתבנית בביטוי האלגברי של הנגזרת $f'(x)$ ניתן לראות כי המכנה חיובי בכל תחום ההגדרה. ולכן לבדיקת סימן ניתן להציב במונה הנגזרת בלבד: $-8x^2-24x$

$x=-7$: $\quad -8\cdot(-7)^2-24\cdot(-7) = -224 < 0$

$x=-4$: $\quad -8\cdot(-4)^2-24\cdot(-4) = -32 < 0$

$x=-2.5$ $\quad -8\cdot(-2.5)^2-24\cdot(-2.5) = 10 > 0$

$x=-1$ $\quad -8\cdot(-1)^2-24\cdot(-1) = 16 > 0$

$x=1$ $\quad -8\cdot 1^2-24\cdot 1 = -32 < 0$

מהטבלה: עבור $x=0$ מתקבלת נקודת מקסימום.
ועבור $x=-3$ מתקבלת נקודת מינימום.
נחשב את שיעורי ה-y של הנקודות הנ"ל:

$$f(-3)=\frac{8\cdot(-3)+12}{(-3)^2+8\cdot(-3)+12}=4$$

$$f(0)=\frac{8\cdot 0+12}{0^2+8\cdot 0+12}=1$$

$$\Rightarrow \boxed{(-3,4)\,min \quad , \quad (0,1)\,max}$$

ד. 4. סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

על פי סעיפי החקירה הקודמים נשרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

על מנת לדייק נחשב את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים: חיתוך עם ציר y : כבר חישבנו $(0,1)$

(זו נקודת המקסימום)

חיתוך עם ציר x $(y=0)$: $f(x)=0$

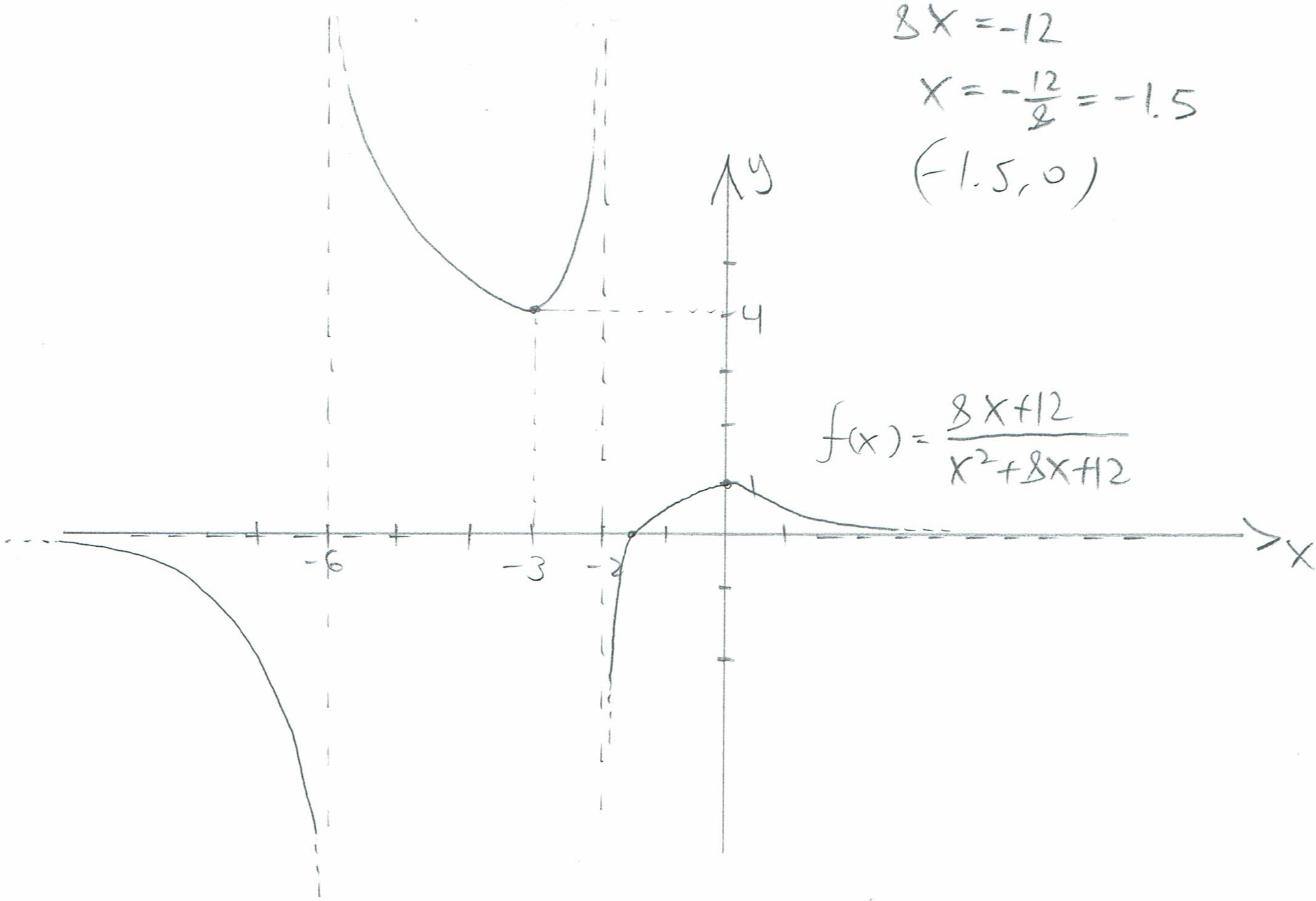
$$\frac{8x+12}{x^2+8x+12}=0$$

$$8x+12=0$$

$$8x=-12$$

$$x=-\frac{12}{8}=-1.5$$

$$(-1.5,0)$$



$g(x) = f'(x)$

ג.

גרף הנגזרת $f'(x)$.

הנגזרת מתאפסת עבור $x=0$ ועבור $x=-3$.
ולכן גרפים I ו- II נפסלים - הם אינם חותכים
את הצירים בראשית.

סביב $x=-3$ הנגזרת עוברת משלילית לחיובית
דרך אפס ולכן גרף III נפסל.
גרף IV הוא היחיד שמתאים לתחומי החיוביות
והשליליות של הנגזרת $f'(x)$ כפי שעולה מהטבלה שערכנו.
וכן גרף זה מתאים לשיעורי נקודות החיתוך של $f'(x)$
עם הצירים.
לסיכום: **גרף IV** מתאר את גרף הפונקציה $g(x)$.

7. נתונה הפונקציה: $f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot (2x - 1)$ המוגדרת לכל x.

א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. חשב את השטח הנמצא ברביע השלישי ומוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי ציר ה־ y.

נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) - 4$.

נסמן ב־ S את השטח הנמצא ברביע השלישי ומוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x, על ידי ציר ה־ y ועל ידי האנך לציר ה־ x העובר דרך נקודת המקסימום של הפונקציה.

ה. בכמה גדול השטח S מן השטח שחישבת בסעיף ד? נמק.

פתרון:

א. חיתוך עם ציר x $(y=0)$:

$$0 = (x^2+2x+1)\cdot(2x-1)$$

או

$$x^2+2x+1=0 \qquad 2x-1=0$$
$$(x+1)^2=0 \qquad 2x=1$$
$$x+1=0 \qquad x=\frac{1}{2}$$
$$x=-1$$

$$\boxed{(-1,0)\ ,\ (\tfrac{1}{2},0)}$$

חיתוך עם ציר y $(x=0)$:

$$f(0) = (0^2+2\cdot0+1)\cdot(2\cdot0-1) = -1$$

$$\boxed{(0,-1)}$$

ד. שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וסוגן.
ונפתח סוגריים:

$$f(x)=(x^2+2x+1)\cdot(2x-1)=2x^3+4x^2+2x-x^2-2x-1=$$

$$=2x^3+3x^2-1$$

נגזור:

$$f'(x)=6x^2+6x$$

נשווה את הנגזרת לאפס על מנת למצוא נקודות חשודות כקיצון:

$$f'(x)=0$$

$$6x^2+6x=0$$

$$6x\cdot(x+1)=0$$

או

$$6x=0 \quad\quad x+1=0$$

$$x=0 \quad\quad x=-1$$

נגזור פעם נוספת על מנת לסווג את נקודות הקיצון:

$$f''(x)=12x+6$$

$$f''(-1)=12\cdot(-1)+6=-6<0$$

לכן עבור $x=-1$ מתקבלת נק' קיצון מסוג מקסימום.

$$f''(0)=12\cdot0+6=6>0$$

לכן עבור $x=0$ מתקבלת נקודת קיצון מסוג מינימום.

ב. המשך...

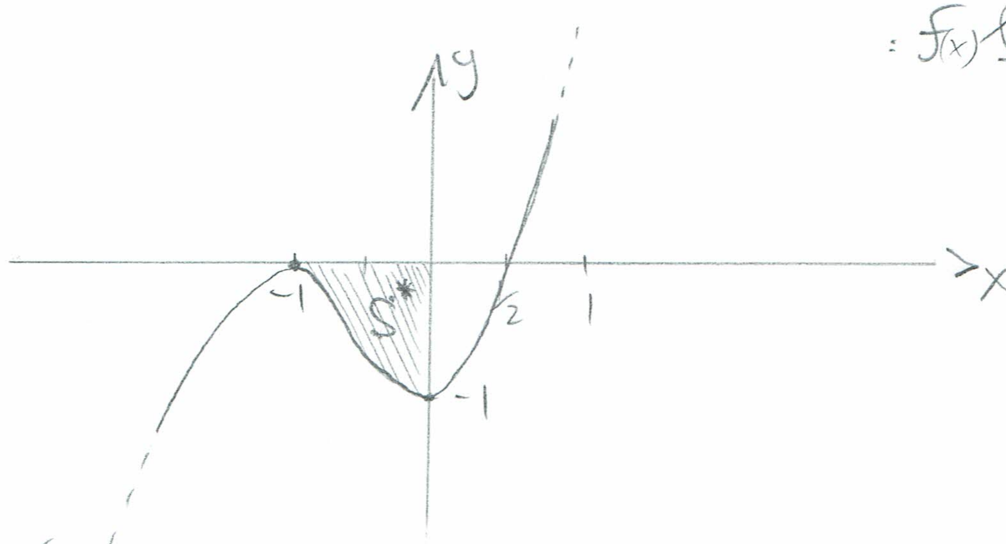
$$f(-1)=2\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2-1=-2+3-1=0$$

$$\boxed{(-1,0)\ max}$$

$$f(0)=2\cdot 0^3+3\cdot 0^2-1=-1$$

$$\boxed{(0,-1)\ min}$$

ג. גרף $f(x)$:



ד. נחשב את השטח הדרוש S^* (ראה סימון בגרף)
תוך שימוש באינטגרל המסויים - שטח הכלוא בין $y=0$ ל-$f(x)$ בין $x=-1$ ל-$x=0$.

$$S^*=\int_{-1}^{0}(0-f(x))dx=\int_{-1}^{0}(-(2x^3+3x^2-1))dx=\int_{-1}^{0}(-2x^3-3x^2+1)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^4}{2}-x^3+x\right]_{-1}^{0}=0-\left(-\frac{(-1)^4}{2}-(-1)^3-1\right)=\frac{1}{2}$$

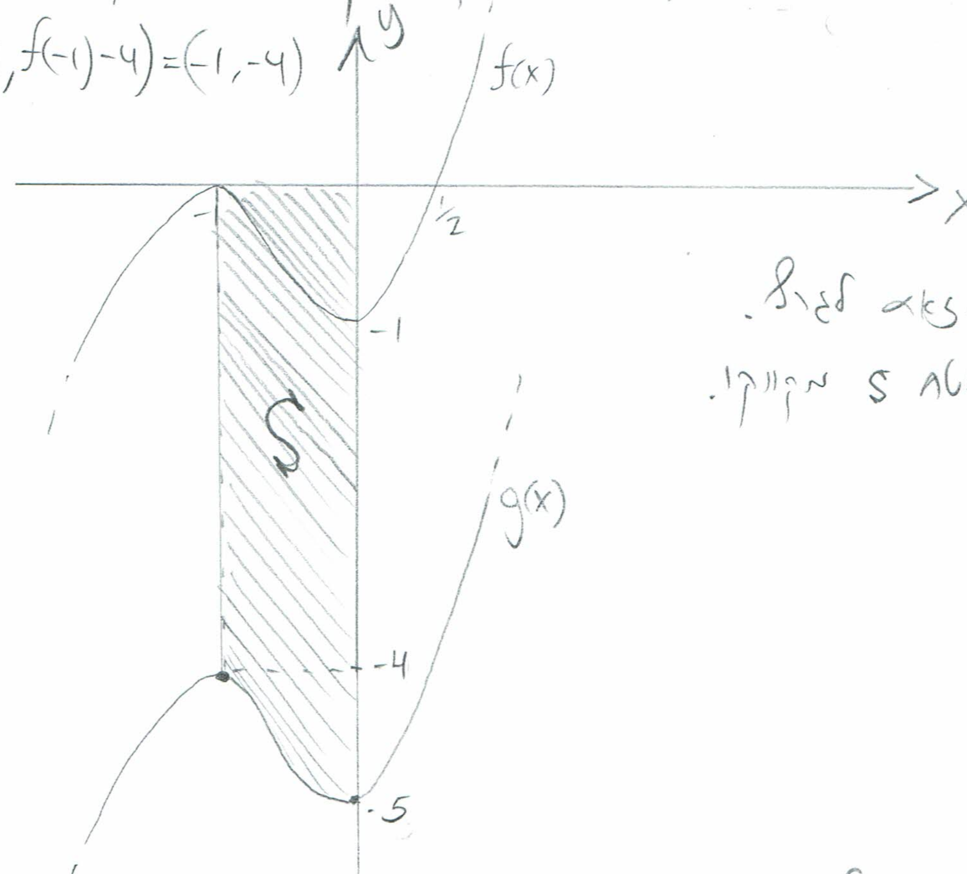
השטח הדרוש: $\boxed{S^*=\frac{1}{2}}$ יח"ר

ה.

$$g(x) = f(x) - 4$$

גרף הפונקציה $g(x)$ מהווה הזזה של גרף הפונקציה $f(x)$ ב-4 יחידות "כלפי מטה" בציר ה-y.
לכן שיעורי ה-x של נקודות הקיצון וסוגן נשמרו. נקודת המקסימום של g:

$$(-1, g(-1)) = (-1, f(-1)-4) = (-1,-4)$$



נוסיף זאת לגרף.
ראה שטח S מקווקו.

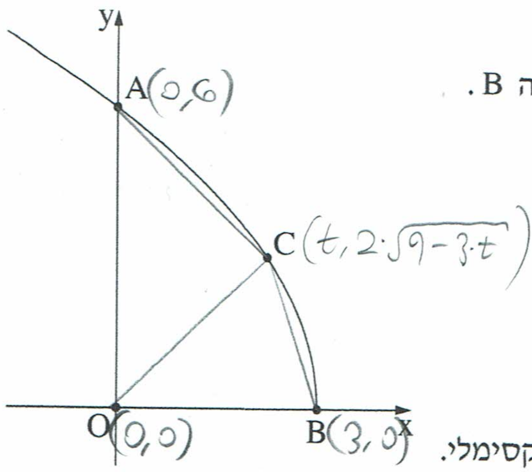
השטח S גדול מהשטח S^* בשטח מלבן שאורכי צלעותיו: 1 ; 4.
כלומר S גדול מ-S^* ב-$1\cdot 4$: $\boxed{\text{4 יחידות שטח}}$

דרך חלופית: חישוב S:

$$\boxed{S} = \int_{-1}^{0}(0-g(x)) = \int_{-1}^{0}(-(f(x)-4))dx = \int_{-1}^{0}(-f(x)+4)dx = \underbrace{\int_{-1}^{0}(-f(x))dx}_{S^*} + \int_{-1}^{0}4dx =$$

$$= S^* + [4x]_{-1}^{0} = S^* + 0 - 4\cdot(-1) = \boxed{S^* + 4}$$

8. נתונה הפונקציה: $f(x) = 2 \cdot \sqrt{9 - 3x}$.



א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־y בנקודה A ואת ציר ה־x בנקודה B .

הנקודה C נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון (ראה ציור).

הנקודה O היא ראשית הצירים.

נסמן ב־t את שיעור ה־ x של הנקודה C .

ב. הבע באמצעות t את שטח המשולש AOC

ואת שטח המשולש BOC .

ג. **(1)** מצא בעבור איזה ערך של t סכום שטחי המשולשים הוא מקסימלי.

(2) מצא את הסכום המקסימלי של שטחי המשולשים.

פתרון:

א. נדרוש: ביטוי ממשי מתחת לשורש מספר זוגי - אי-שלילי:

$0 \le 9 - 3x$ $\quad / +3x$

$3x \le 9$ $\quad / :3$

$\boxed{x \le 3}$

ב. נקודות חיתוך גרף f עם הצירים:

A: $f(0) = 2 \cdot \sqrt{9 - 3 \cdot 0} = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow A(0,6)$

B: $0 = 2 \cdot \sqrt{9-3x} \Rightarrow \sqrt{9-3x} = 0 \Rightarrow 9 - 3x = 0 \Rightarrow 3x = 9$

$x = 3$

$B(3,0)$

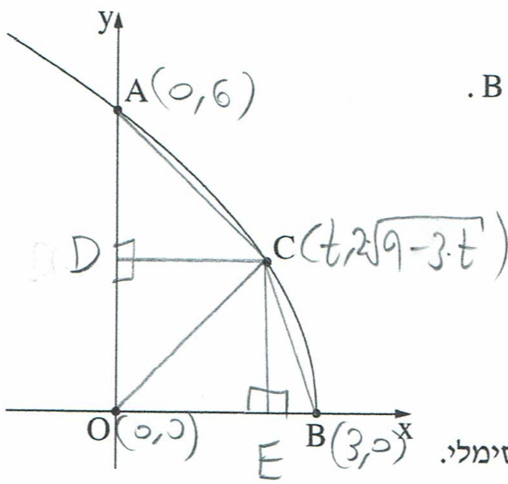
מהגרף ומהנתון כי נק' C נמצאת ברביע הראשון (והסימון הנתון בשאלה) נקבל:

$0 < t < 3$

$C(t, f(t)) = (t, 2 \cdot \sqrt{9 - 3t})$

הראשית $O(0,0)$.

8. נתונה הפונקציה: $f(x) = 2 \cdot \sqrt{9-3x}$.



א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־y בנקודה A ואת ציר ה־x בנקודה B .

הנקודה C נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון (ראה ציור).

הנקודה O היא ראשית הצירים.

נסמן ב־t את שיעור ה־ x של הנקודה C .

ב. הבע באמצעות t את שטח המשולש AOC

ואת שטח המשולש BOC .

ג. **(1)** מצא בעבור איזה ערך של t סכום שטחי המשולשים הוא מקסימלי.

(2) מצא את הסכום המקסימלי של שטחי המשולשים.

ב. המשך...

נוריד גבהים מ-C המאונכים לצירים בכל אחד מהמשולשים.

ב - ΔAOC:

גובה CD המאונך לצלע AO (נמצא על ציר y).

שיעור ה-x של נקודה D - נמצא על ציר ה-y הוא אפס.

ב - ΔBOC:

גובה CE המאונך לצלע BO (נמצא על ציר x).

שיעור ה-y של נקודה E - נמצא על ציר ה-x הוא אפס.

נביע את שטחי המשולשים תוך שימוש ב-t ובנוסחה לחישוב שטח משולש:

$$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot (y_A - y_O) \cdot (x_C - x_D) = \frac{1}{2} \cdot (6-0) \cdot (t-0) = \boxed{3t}$$

$$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot (x_B - x_O) \cdot (y_C - y_E) = \frac{1}{2} \cdot (3-0) \cdot (2\cdot\sqrt{9-3t} - 0) = \boxed{3 \cdot \sqrt{9-3t}}$$

ג.1. בעבור איזה ערך של t סכום שטחי המשולשים הוא מקסימלי?

פונקציית המטרה: סכום שטחי המשולשים:

$$S(t) = S_{\Delta AOC} + S_{\Delta BOC} = 3t + 3\cdot\sqrt{9-3t} \quad , \quad 0<t<3$$

נחקור את פונקציית המטרה בתחום הנ"ל למציאת קיצון
נגזיר:

$$S'(t) = 3 + 3\cdot\frac{-3}{2\sqrt{9-3t}} = 3 - \frac{9}{2\sqrt{9-3t}}$$

נשווה את הנגזרת לאפס: $S'(t)=0$

$$3-\frac{9}{2\sqrt{9-3t}}=0 \rightarrow \frac{9}{2\sqrt{9-3t}}=3 \rightarrow 3=2\sqrt{9-3t} \quad /()^2$$

$$9=4\cdot(9-3t) \quad /:4$$

$$9-3t=\frac{9}{4} \quad /+3t-\frac{9}{4}$$

$$3t=9-\frac{9}{4} \quad /:3$$

$$t=3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

נגזיר פעם נוספת: לצורך כך נציג כחזקה שלילית: $S'(t)=3-\frac{9}{2}\cdot(9-3t)^{\frac{1}{2}}$

$$S''(t)=\frac{9}{4}\cdot(9-3t)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-3)=\frac{-27}{4}\cdot\frac{1}{(\sqrt{9-3t})^3}$$

הביטוי עבור הנגזרת השנייה שלילי בכל תחום ההגדרה (ולכן בפרט $S''(\frac{9}{4})<0$

משמע, עבור $\boxed{t_{max} = \frac{9}{4} = 2.25}$ מתקבל סכום מקסימלי של שטחי המשולשים.

ג.2. הסכום המקסימלי של שטחי המשולשים:

נציב $t = \frac{9}{4}$ בפונקציית המטרה:

$$S_{max} = S\left(\frac{9}{4}\right) = 3 \cdot \frac{9}{4} + 3 \cdot \sqrt{9 - 3 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{27}{4} + 3 \cdot \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{27}{4} + \frac{18}{4} = \frac{45}{4}$$

הסכום המקסימלי של שטחי המשולשים הינו: $\boxed{11.25}$ יחידות ריבועיות.