פתרון הבחינה
במתמטיקה

מועד ב, תשפ"א, 2021, שאלון: 35482

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע" :
יואל גבע, ארד טלמון, ריקי טל, אביחי כהן, קובי שרוני, אודי נעים, יאיר גולני, רועי גבע

1. דניאלה קנתה מקרר בתשלומים חודשיים. התשלום הראשון הוא 700 שקלים, ולאחר מכן כל תשלום נמוך ב־ 30 שקלים מן התשלום שלפניו.

א. מהו מספר התשלום שבו תשלם דניאלה 280 שקלים?

ב. **(1)** האם ייתכן שהתשלום האחרון שתשלם דניאלה יהיה תשלום מספר 29 ? נמק את תשובתך.

(2) מהו התשלום הנמוך ביותר האפשרי בסדרת התשלומים של דניאלה ומהו מספר התשלום?

נעמה קנתה מקרר באותו המחיר שבו קנתה דניאלה את המקרר שלה, אך שילמה עליו ב־ 30 תשלומים חודשיים שווים של 280 שקלים כל תשלום.

ג. בכמה תשלומים קנתה <u>דניאלה</u> את המקרר שלה?

פתרון:

א. התשלומים החודשיים הם סדרה חשבונית שבה $a_1=700$, $d=-30$.

התשלום ה n הוא 280 שקלים. נציב בנוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית:

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

$$280=700+(n-1)\cdot(-30)$$

$$-420=-30n+30$$

$$30n=450$$

$$n=15$$

$\boxed{\text{התשלום ה-15 יהיה 280 שקלים}}$

ב. (1) נחשב את התשלום ה-29:

$$a_{29}=700+28\cdot(-30)=-140$$

תשלום שלילי לא אפשרי, לכן התשובה היא לא.

(בדיקה) מתי תשלום יהיה אפס:

$a_n = 0$

$\Downarrow$

$700 + (n-1) \cdot (-30) = 0$

$700 - 30n + 30 = 0$

$30n = 730$

$n = 24\frac{1}{3}$

כלומר, התשלום האחרון האפשרי יהיה
$\boxed{\text{התשלום ה-24}}$.

נחשב את התשלום:

$a_{24} = 700 + 23 \cdot (-30) = 10$

התשלום יהיה $\boxed{\text{10 שקלים}}$

ב. עלות המדרגים היא $30 \cdot 280 = 8{,}400$

נשתמש בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית:

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1) \cdot d]$

$\Downarrow$

$8{,}400 = \frac{n}{2}[2 \cdot 700 + (n-1) \cdot (-30)]$

$8{,}400 = \frac{n}{2}[1{,}430 - 30n]$

$$8{,}400 = 715n - 15n^2 \quad /:(-5)$$

$$3n^2 - 143n + 1{,}680 = 0$$

נפתור את המשוואה ונקבל:

$$n_1 = 21 \quad , \quad n_2 = 26.6$$

לפי סעיף ב' (2) הפתרון השני לא אפשרי

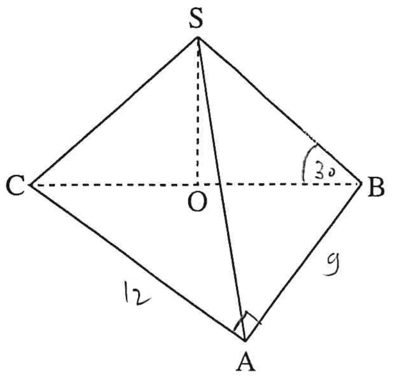
ולכן $n=21$

$\boxed{\text{דניאלה קנתה את המקרר ב- 21 תשלומים}}$

2. נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה ABC הוא משולש ישר זווית, $\sphericalangle CAB = 90^{\circ}$ (ראה סרטוט).

נתון: $AB = 9$, $AC = 12$.

הזווית שבין המקצוע הצדדי SB ובין הבסיס ABC שווה ל- 30° .



א. חשב את גובה הפירמידה, SO .

ב. חשב את נפח הפירמידה.

נתון: נקודה M היא אמצע הצלע AB .

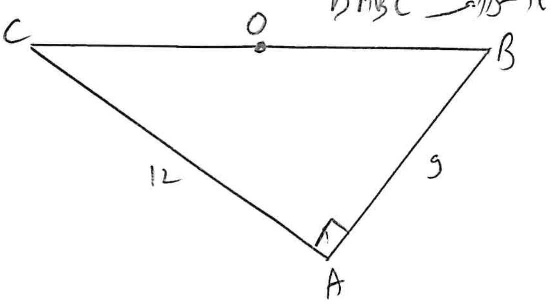
נקודה E נמצאת על הקטע OM כך שמתקיים: $OE = 2 \cdot EM$.

ג. מצא את הזווית שבין SE לבסיס הפירמידה.

ד. חשב את שטח המשולש SEM .

פתרון:

א. נחשב תחילה את BC במשולש ישר-זווית $\triangle ABC$ באמצעות משפט פיתגורס:



$BC^2 = 9^2 + 12^2$

$BC^2 = 81 + 144$

$BC^2 = 225 \; /\sqrt{}$

$BC = 15$

SO הוא הגובה בפירמידה ישרה, לכן הנקודה O היא נקודת מרכז המעגל החוסם את הבסיס.

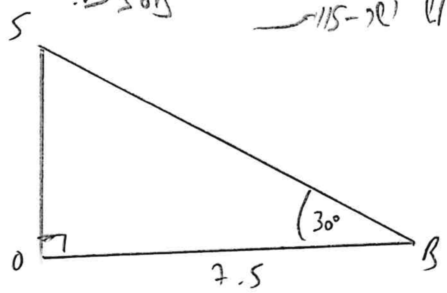
המשולש הוא משולש ישר-זווית ולכן BC הוא קוטר המעגל

ומכאן ש- OB הוא רדיוס המעגל.

רדיוס המעגל OB שווה באורכו למחצית הקוטר BC שאורכו 15

ולכן אורך הרדיוס OB הוא 7.5 .

נחשב את גובה הפירמידה SO במשולש ישר-זווית SOB:



$\tan 30° = \frac{SO}{7.5}$

$SO = 7.5 \cdot \tan 30°$

$SO = 4.33$

ב. נחשב את נפח הפירמידה לפי הנוסחה:

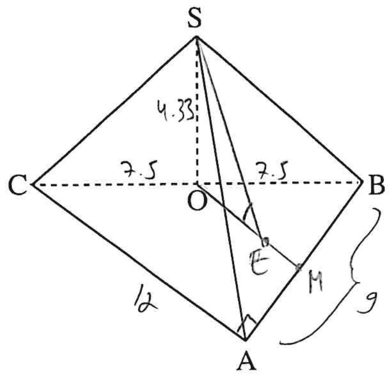
$V = \frac{S_{\Delta ABC} \cdot h}{3}$

נחשב את שטח הבסיס:

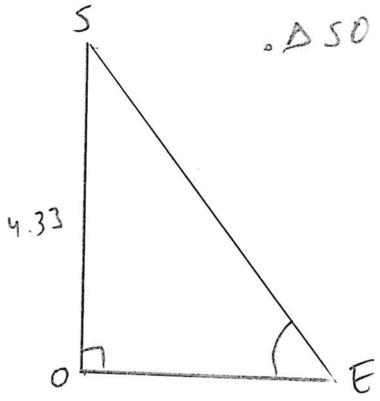
$S_{\Delta ABC} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$

נציב ונקבל:

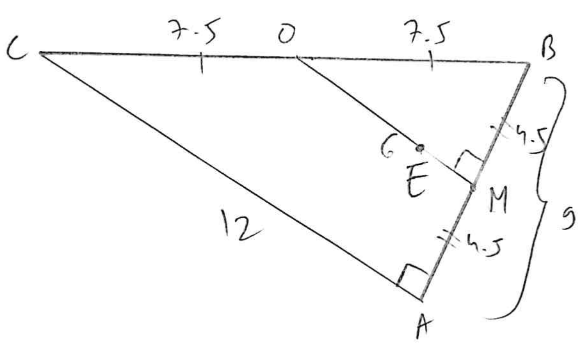
$V = \frac{54 \cdot 4.33}{3} = 77.94$



ג) הזווית המבוקשת היא $\sphericalangle SEO$
במשולש ישר-זווית ΔSOE.



נסתכל על משולש ΔABC:



הנקודה O היא אמצע BC

הנקודה M היא אמצע AB

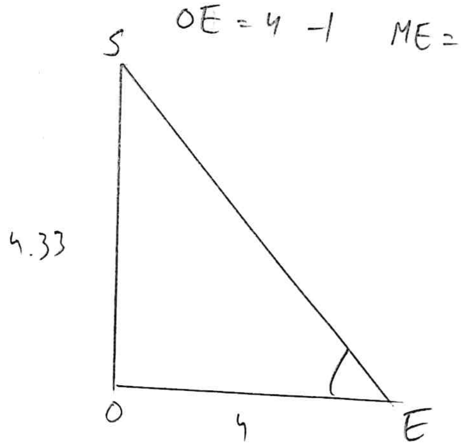
ולכן OM הוא קטע אמצעים במשולש.

לכן הוא מקביל ל- AC ומכאן ש- $\sphericalangle OMB = \sphericalangle CAB$ (זוויות מתאימות

בין ישרים מקבילים) ושווה למחצית של AC, כלומר $OM = 6$.

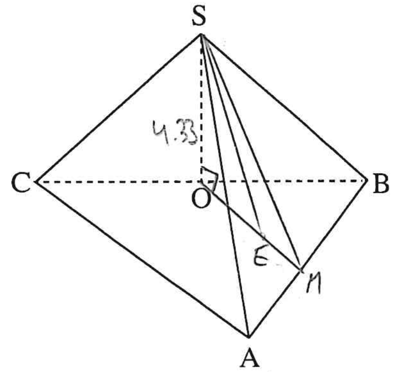
נתון ש- $OE = 2 \cdot EM$ וסכומם הוא 6, לכן $ME = 2$ ו- $OE = 4$

נחשב את הזווית המבוקשת:

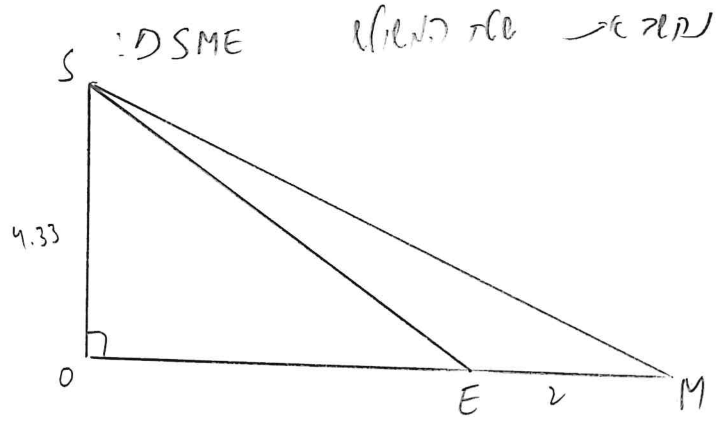


$$\tan \sphericalangle SEO = \frac{4.33}{4}$$

$$\sphericalangle SEO = 47.27^\circ$$



ג. נחשב את שטח המשולש ΔSME:



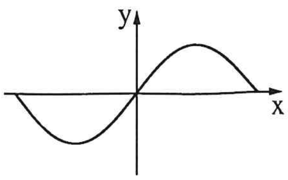
המשולש הוא משולש קהה-זווית, הגובה ל-EM המורד מקודקוד S הוא הגובה החיצוני SO.

נחשב לפי הנוסחה:

$$S_{\Delta SEM} = \frac{EM \cdot SO}{2}$$

$$S_{\Delta SEM} = \frac{2 \cdot 4.33}{2} = 4.33$$

3. הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מוגדרות בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.



לפניך סרטוט של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתון כי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חותך את ציר ה־ x בשלוש נקודות בדיוק:
$(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(0, 0)$, $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

נתון: $f(x) = (\sin x)^2 - \frac{1}{4}$.

ג. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה־ x הנמצאת מימין לראשית הצירים, ומשיק נוסף בנקודת המינימום שלה.

ה. מצא את שיעורי נקודת המפגש של שני המשיקים.

בתשובתך דייק 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

א. תחומי העליה של הפונקציה מתקבלים לפי תחומי החיוביות של גרף הנגזרת. מהשרטוט עולה: $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

תחומי הירידה של הפונקציה מתקבלים לפי תחומי השליליות של גרף הנגזרת. מהשרטוט עולה: $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

ב. נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ מתקבלות על ידי נקודות החיתוך של גרף הנגזרת עם ציר ה-x, כלומר עבור:
$x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$.

הפונקציה יורדת בתחום $-\pi < x < 0$, כלומר היא יורדת מימינה השמאלי ולכן הנקודה השמאלית היא נקודת מקסימום..

הפונקציה יורדת בתחום $-\pi<x<0$ ועולה בתחום $0<x<\pi$

ולכן $x=0$ היא נקודת מינימום.

הפונקציה עולה בתחום $0<x<\pi$, כלומר היא עולה עד נקודה

הקצה הימני ולכן הקצה הימני הוא נקודת מקסימום.

לסיכום: $x=\frac{\pi}{2}$ מקסימום, $x=0$ מינימום, $x=-\frac{\pi}{2}$ מקסימום.

ג. מציאת חיתוך עם ציר ה-y, נציב $x=0$:

$$f(0)=(\sin 0)^2-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4} \qquad \left(0,-\frac{1}{4}\right)$$

מציאת חיתוך עם ציר ה-x, נציב $y=0$:

$$(\sin x)^2-\frac{1}{4}=0$$

$$(\sin x)^2=\frac{1}{4} \quad /\sqrt{\ }$$

$$\sin x=\pm\frac{1}{2}$$

פתרון כללי:

$$\sin x=\frac{1}{2}$$

$$\sin x=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$x=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi k \qquad\qquad x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$$

$$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k \qquad\qquad x=\frac{\pi}{6}$$

פתרון בתחום:

אין פתרון בתחום $\qquad \left(\frac{\pi}{6},0\right)$

פתרון שני: $\sin x = -\frac{1}{2}$

$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k$

$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$

אין פתרון בתחום.

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

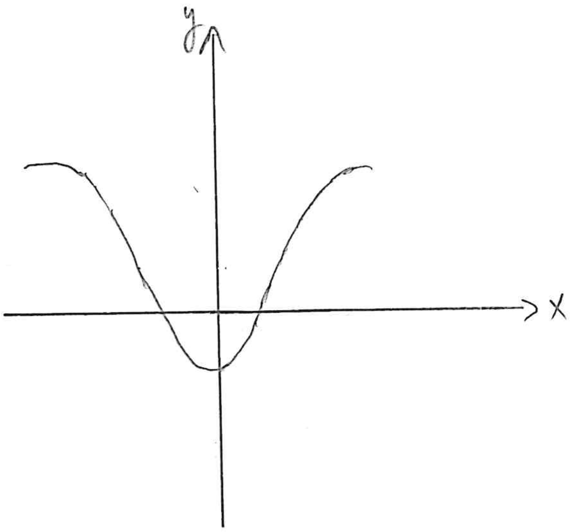
פתרון בתחום: $x = -\frac{\pi}{6}$

$\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$

לסיכום: נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים:

$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$

ד.



ה. נמצא את משוואות המשיקים.

המשיק הראשון הוא המשיק בנקודת החיתוך של הפונקציה

עם ציר ה-x שמימין לראשית הצירים, כלומר $(\frac{\pi}{6},0)$.

נמצא את שיפוע המשיק. נגזור את הפונקציה:

$$y' = 2\sin x \cdot \cos x$$

$$y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

שיפוע המשיק הוא $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

משוואת המשיק:

$$y-0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

נעבוד עם מספרים עשרוניים:

$$y = 0.866(x-0.523)$$

$$y = 0.866x - 0.453$$

המשיק השני עובר בנקודת המינימום של הפונקציה שהיא $(0,-\frac{1}{4})$

ולכן שיפועו 0. משוואת המשיק הנ"ל היא: $y=-\frac{1}{4}$.

נמצא את נקודת החיתוך:

$$\begin{cases} y = 0.866x - 0.453 \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$0.866x - 0.453 = -\frac{1}{4}$$

$$0.866x = 0.203$$

$$x = 0.23$$

שיעור ה-y בנקודת החיתוך הוא $-\frac{1}{4}$

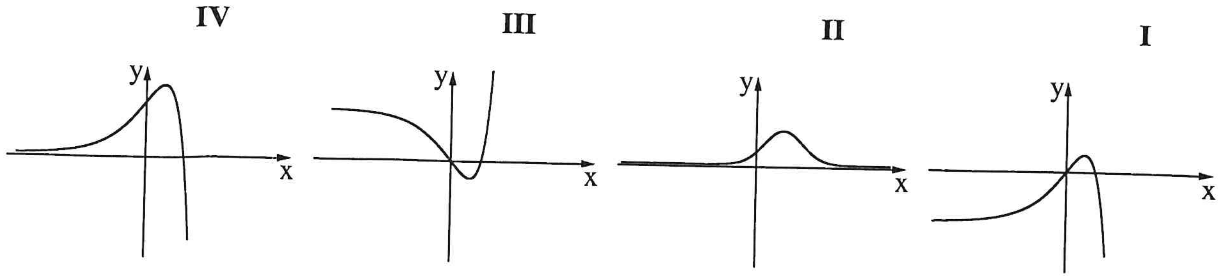
ולכן הנקודה היא $(0.23, -\frac{1}{4})$

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = -e^{2x} + 4e^{x} - 3$ המוגדרת לכל x .

א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

ג. אחד מן הגרפים I-IV שלפניך מתאר את גרף הפונקציה $f(x)$. קבע איזה מהם ונמק את קביעתך.



נתונה הפונקציה: $g(x) = f(x) + b$. b הוא פרמטר.

העבירו משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודת הקיצון שלה.

ד. מצא את משוואת המשיק (הבע באמצעות b).

ה. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי המשיק שמצאת בסעיף ד ועל ידי ציר ה־ y .

פתרון:

א. חיתוך עם ציר x $(y=0)$:

$$-e^{2x}+4e^{x}-3=0 \quad / \cdot(-1)$$

$$e^{2x}-4e^{x}+3=0$$

$$(e^{x})^2-4\cdot(e^{x})+3=0$$

$$(e^{x}-1)\cdot(e^{x}-3)=0$$

או

$$e^{x}=1=e^{0} \qquad e^{x}=3$$

$$x=0 \qquad x=\ln 3$$

$$\boxed{(0,0)} \qquad \boxed{(\ln 3,0)}$$

גם נקודת חיתוך (יחידה) עם ציר ה-y.

7. נגזור:

$f(x)=-e^{2x}+4e^{x}-3$

$f'(x)=-2e^{2x}+4e^{x}$

נשווה נגזרת לאפס: $f'(x)=0$

$-2e^{2x}+4e^{x}=0$

$-2e^{x}(e^{x}-2)=0$

או

$-2e^{x}\neq 0$ לכל x

$e^{x}=2$

$x=\ln 2$

נגזור פעם נוספת:

$f''(x)=-4e^{2x}+4e^{x}$

$f''(\ln 2)=-4\cdot 4+8=-8<0$

לכן ניתן לקבוע כי עבור $x=\ln 2$ יש לפונקציה f נקודת קיצון מסוג מקסימום.

נחשב את שיעור ה-y של נקודת הקיצון:

$f(\ln 2)=-e^{2\ln 2}+4e^{\ln 2}-3=-4+4\cdot 2-3=1$

$\boxed{(\ln 2, 1)\ max}$

ג. גרף I מתאר את גרף הפונקציה $f(x)$.
כאמור על פי נקודת הקיצון וסוגה וכן נקודות החיתוך עם הצירים.
גרף II נפסל מכיוון שלא חותך את הצירים כלל.
גרף III נפסל מפאת סוג הקיצון.
גרף IV נפסל כיוון שלא חותך את הצירים בראשית.

נתונה הפונקציה: $g(x)=f(x)+b$
העבירו משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודת הקיצון שלה.

ד. מצא את משוואת המשיק.
גרף $g(x)$ מהווה הזזה של גרף $f(x)$ ב-b יחידות בציר y ("הזזה אנכית").
לכן סוג הקיצון ושיעור ה-x של נקודת הקיצון נותרים קבועים.
שיעור ה-y של נק' הקיצון:

$$g(\ln 2)=f(\ln 2)+b=1+b$$

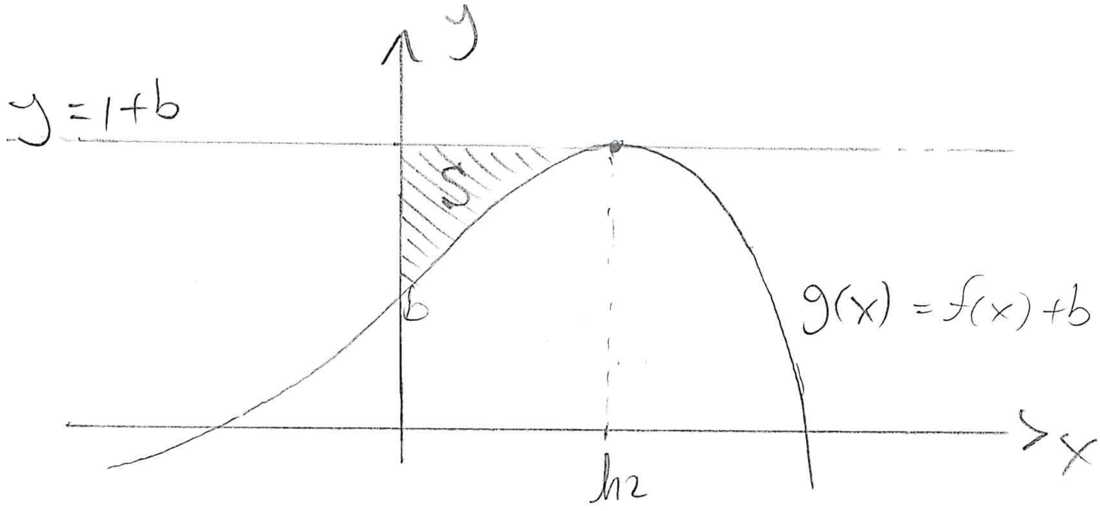
מכיוון שנק' ההשקה $(\ln 2, 1+b)$ נק' הקיצון של $g(x)$ בנק' הקיצון שיפוע המשיק הוא אפס. לכן משוואת המשיק:

$$y-y_1=m\cdot(x-x_1)$$

$$y-(1+b)=0\cdot(x-\ln 2)$$

$$\boxed{y=1+b}$$

ה.



נסמן את השטח הדרוש ב- S (ראה שרטוט).

$$S=\int_0^{\ln 2}\left(1+b-g(x)\right)dx=\int_0^{\ln 2}\left(1+\cancel{b}-\left(f(x)+\cancel{b}\right)\right)dx=$$

$$=\int_0^{\ln 2}\left(1-f(x)\right)dx=\int_0^{\ln 2}\left(1-\left(-e^{2x}+4e^{x}-3\right)\right)dx=$$

$$=\int_0^{\ln 2}\left(e^{2x}-4e^{x}+4\right)dx=\left[\frac{e^{2x}}{2}-4e^{x}+4x\right]_0^{\ln 2}=$$

$$=\left(\frac{e^{2\ln 2}}{2}-4e^{\ln 2}+4\ln 2\right)-\left(\frac{e^{2\cdot 0}}{2}-4\cdot e^{0}+4\cdot 0\right)=$$

$$=\left(2-8+4\ln 2\right)-\left(\frac{1}{2}-4\right)=\boxed{4\ln 2-2.5\approx 0.273}$$

יח"ר

5. נתונה הפונקציה $f(x)=3x\cdot\ell n(ax)$. $a>0$ הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=\frac{1}{3e}$.

ב. מצא את a .

הצב $a=3$, וענה על הסעיפים ג-ו שלפניך.

ג. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

ד. מצא את שיעור ה־ y של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוג הקיצון.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ו. נתונה הפונקציה $g(x)$ שתחום הגדרתה זהה לתחום הגדרתה של הפונקציה $f(x)$.

פונקציית הנגזרת $g'(x)$ מקיימת: $g'(x)=-f(x)$.

האם לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון?

אם כן – מצא את שיעור ה־ x של נקודת הקיצון של $g(x)$, וקבע את סוגה. אם לא – נמק.

פתרון:

א. תחום הגדרה: נדרוש: תוכן הלוגריתם חיובי: $0<ax$

נתון: $0<a$

$\Downarrow$

$\boxed{0<x}$

נתון: ל-$f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=\frac{1}{3e}$

ב. מצא את a.

מהנתון נובע $f'(\frac{1}{3e})=0$

נגזור:

$$f(x)=3x\cdot\ln(ax)$$

$$f'(x)=3\cdot\ln(ax)+3x\cdot\frac{a}{ax}=3\ln(ax)+3$$

$$\Downarrow \quad f'(\tfrac{1}{3e})=0$$

$$3\ln(a\cdot\tfrac{1}{3e})+3=0 \Rightarrow 3\ln(\tfrac{a}{3e})=-3 \Rightarrow \ln(\tfrac{a}{3e})=-1 \Rightarrow \frac{a}{3e}=\frac{1}{e}$$

$$\boxed{a=3}$$

נציב $a=3$ בביטוי האלגברי של הפונקציה:

$$f(x)=3x\cdot\ln(3x)$$

ג. חיתוך גרף f עם ציר x - נציב $y=0$ בביטוי האלגברי של הפונקציה:

$$0=3x\cdot\ln(3x)$$

$: 3x>0$
מתחום ההגדרה של הפונקציה:
$0<x$

$$\ln(3x)=0$$

$$3x=e^0=1$$

$$x=\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{3},0\right)}$$

ד. נגזור:

$$f(x)=3x\cdot\ln(3x)$$

$$f'(x)=3\ln(3x)+3x\cdot\frac{3}{3x}=3\ln(3x)+3$$

$$\Downarrow\ f'(x)=0$$

$$3\ln(3x)+3=0 \Rightarrow 3\ln(3x)=-3 \Rightarrow \ln(3x)=-1$$

$$3x=\frac{1}{e}$$

$$x=\frac{1}{3e}$$ (חישוב מאושש עם הנתון).

חשוב: יחידה ולפי הנתון הינה קיצון. נקבע את סוג הקיצון לפי נגזרת שנייה

$$f''(x)=3\cdot\frac{3}{3x}=\frac{3}{x} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{3e}\right)=\frac{3}{\left(\frac{1}{3e}\right)}>0$$

המשך בעמ' הבא...

לפי סימן הנגזרת השנייה נדע כי סוג הקיצון הוא מינימום..
נחשב את שיעור ה-y:

$$f\left(\frac{1}{3e}\right) = 3\cdot\frac{1}{3e}\cdot\ln\left(3\cdot\frac{1}{3e}\right) = -\frac{1}{e}$$

$$\boxed{y_{min} = -\frac{1}{e}}$$

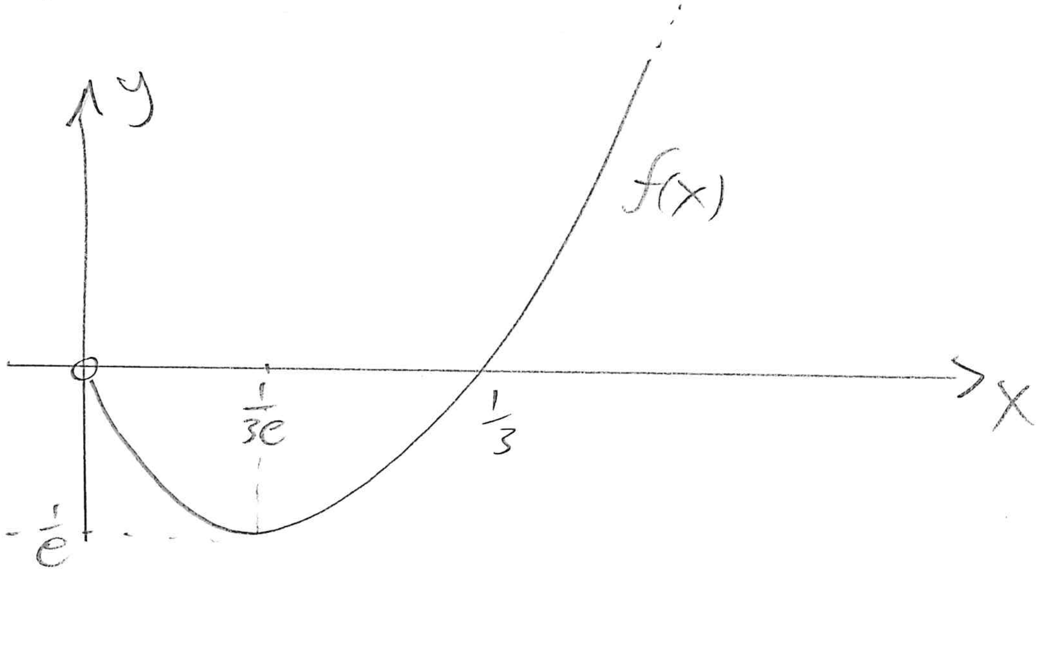
נקודת הקיצון: מינ $\left(\frac{1}{3e}, -\frac{1}{e}\right)$

ה. גרף $f(x)$:

ניתן להיווכח כי כאשר x שואף לאינסוף גם ערכי $f(x)$ שואפים לאינסוף וכן כאשר x שואף לאפס דרך ערכים חיוביים, $f(x)$ שואף לאפס דרך ערכים שליליים. ניתן לוודא שהנ"ל אמורה ע"י טבלת ערכים:

x	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	-0.0024	-0.0174	-0.1052

כלומר הראשית הינה "חור" בקצה תחום ההגדרה של הפונקציה.



ו. גרף g(x) הינו שיקוף של גרף f(x) ביחס לציר ה-x.

כלומר תחומי החיוביות של g(x) הפוכים מאלו של f.

על פי גרף f, f חיובית עבור $x>\frac{1}{3}$

כלומר $\boxed{f=g'\text{, שלילית עבור } x>\frac{1}{3}}$

וכן f שלילית עבור $0<x<\frac{1}{3}$

משמע $\boxed{f=g'\text{, חיובית עבור } 0<x<\frac{1}{3}}$

בנוסף $g'(\frac{1}{3})=f(\frac{1}{3})=0$

הנגזרת של g עוברת מחיובית לשלילית דרך אפס בדיוק $x=\frac{1}{3}$. מכאן נוכל להסיק כי:

לפונקציה g(x) יש נקודת קיצון שישעור ה-x שלה הוא $x_{max}=\frac{1}{3}$ וסוגה: מקסימום.