פתרון הבחינה
במתמטיקה

מועד ב, תשפ"א, 2021, שאלון: 35481

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע" :
יואל גבע, ארד טלמון, ריקי טל, אביחי כהן, קובי שרוני, אודי נעים, יאיר גולני, רועי גבע

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

.1 ביום רגיל רכבת נוסעת במסלול באורך 300 ק"מ במהירות קבועה.
יום אחד הרכבת נסעה לאורך המסלול כולו במהירות הגדולה ב- 25% ממהירותה ביום רגיל, ולכן זמן הנסיעה שלה התקצר בחצי שעה בהשוואה לזמן נסיעתה ביום רגיל.

א. מצא את מהירות הרכבת ביום רגיל ואת זמן הנסיעה שלה ביום רגיל.

ביום אחר, לאחר שהרכבת נסעה במשך t <u>דקות</u> במהירות שלה ביום רגיל, היא נאלצה להוריד את מהירותה ב- 10 קמ"ש, והמשיכה לנסוע במהירות הנמוכה עד שהגיעה לסוף המסלול. ביום זה זמן הנסיעה של הרכבת התארך ב- 10 דקות בהשוואה לזמן נסיעתה ביום רגיל.

ב. מצא את t .

א. נסמן: מהירות הרכבת ביום רגיל: x

מהירות הרכבת ביום אחד גדולה ב-25% ממהירותה ביום הרגיל

ולכן היא מהירות 125% מ- x, כלומר $125\% \cdot x$ שזה $1.25x$.

נרכז את הנתונים בטבלה.

	זמן	מהירות	דרך
יום רגיל	$\frac{300}{x}$	x	300
יום אחד	$\frac{300}{1.25x} \rightarrow \frac{240}{x}$	$1.25x$	300

הזמן ביום אחד התקצר בחצי שעה לעומת הזמן ביום רגיל

ולכן נרכיב משוואת זמנים:

זמן יום רגיל = זמן יום אחד + $\frac{1}{2}$

נקבל: $\frac{300}{x} = \frac{240}{x} + \frac{1}{2}$

נכפיל במכנה משותף $2x$:

$600 = 480 + x$

$x = 120$

$\boxed{\text{מהירות הרכבת ביום רגיל 120 קמ"ש}}$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

נמצא את זמן הנסיעה בקצב הרגיל.

נציב $x=120$ בביטוי של הזמן $\frac{300}{x}$ ונקבל: $\frac{300}{120}$,

כלומר: 2.5 שעות.

$\boxed{\text{זמן הנסיעה בקצב הרגיל הוא שעתיים וחצי.}}$

ב. נרכז את הנתונים בטבלה.

דרך	מהירות	זמן	
$120\cdot\frac{t}{60}\rightarrow 2t$	120	$\frac{t}{60}$	חלק I
$110\left(2\frac{2}{3}-\frac{t}{60}\right)$	110	$2\frac{2}{3}-\frac{t}{60}$	חלק II

הערות לטבלה:

* מהירות הרכבת בחלק השני של התנועה נמוכה ב- 10 קמ"ש ולכן היא 110 קמ"ש
* זמן הרכבת בחלק הראשון הוא t דקות, כלומר $\frac{t}{60}$ שעות.
* זמן הנסיעה הכולל של הרכבת התארך ב- 10 דקות, כלומר היה שעתיים ו- 40 דקות או $2\frac{2}{3}$ שעות.

בחלק הראשון של התנועה הזמן היה $\frac{t}{60}$ שעות ולכן בחלק השני הזמן הוא $2\frac{2}{3}-\frac{t}{60}$ שעות.

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הדרך הכוללת ביום השני היא 300 ק"מ.

נכתוב את המשוואה!

$$\text{דרך חלק I} + \text{דרך חלק II} = 300$$

$$2t + 110\left(2\tfrac{2}{3} - \frac{t}{60}\right) = 300$$

$$\overset{6}{\cancel{2t}} + \overset{2}{\cancel{\frac{880}{3}}} - \overset{1}{\cancel{\frac{11t}{6}}} = \overset{6}{300}$$

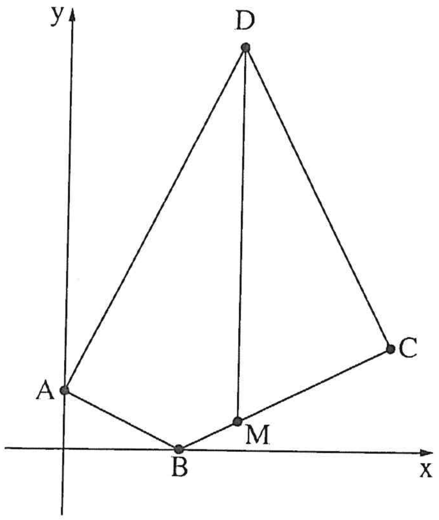
מכנה משותף
6

$$12t + 1760 - 11t = 1800$$

$$\boxed{t = 40 \text{ דקות}}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←



.2 נתון מרובע $ABCD$. הקודקוד A מונח על החלק החיובי של ציר ה־ y

והקודקוד B מונח על ציר ה־ x.

הנקודה M נמצאת על הצלע BC כך שהישר DM

מקביל לציר ה־ y (ראה סרטוט).

נתון: שיעור ה־ x של הנקודה M הוא 6.

משוואת הצלע BC היא: $y = \frac{1}{2}x - 2$.

א. מצא את שיעורי הנקודות B ו־ M.

נתון: $AB = 2 \cdot BM$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה A.

נתון כי AD מאונך ל־ AB.

ג. מצא את שיעורי הנקודה D.

נתון כי BC מאונך ל־ CD.

ד. מצא את משוואת המעגל החוסם את המשולש MDC.

א. מציאת נק' B, חיתוך עם ציר x, $y=0$:

$0 = \frac{1}{2}x - 2$

$2 = \frac{1}{2}x$

$x = 4$

$\boxed{B(4,0)}$

מציאת נק' M, הצבה $x=6$:

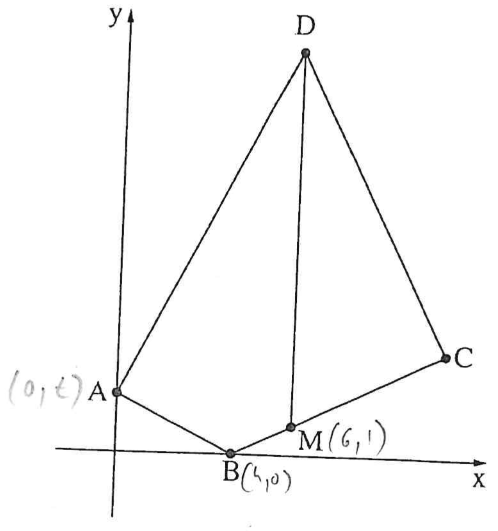
$y_{(6)} = \frac{1}{2} \cdot 6 - 2$

$y_{(6)} = 1$

$\boxed{M(6,1)}$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←



ד. נתון: $AB = 2 \cdot BM$

נחשב את אורך BM:

$$d_{BM} = \sqrt{(6-4)^2 + (1-0)^2}$$

$$d_{BM} = \sqrt{5}$$

ולכן: $AB = 2\sqrt{5}$.

נסמן: $A(0,t)$

נבטא את אורך AB באמצעות t:

$$d_{AB} = \sqrt{(0-4)^2 + (t-0)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{16+t^2}$$

ולכן $AB = 2\sqrt{5}$:

$$\sqrt{16+t^2} = 2\sqrt{5} \quad \backslash(\ )^2$$

$$16 + t^2 = 20$$

$$t^2 = 4$$

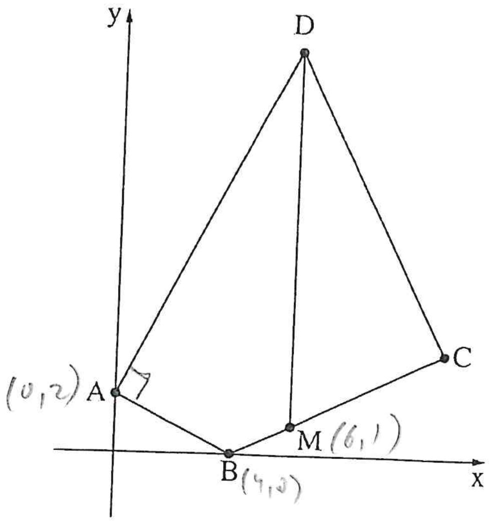
$$t = \pm 2$$

הנקודה A נמצאת על החלק החיובי של ציר ה-y ולכן $t=2$,

כלומר: $\boxed{A(0,2)}$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←



ג. נמצא את שיפוע AB:

$$m_{AB} = \frac{2-0}{0-4} = -\frac{1}{2}$$

AD מאונך ל- AB ולכן $m_{AD} = 2$

(שיפועים הפכיים ונגדיים).

נמצא את משוואת AD לפי

נקודה $A(0,2)$ ושיפוע 2:

$$y - 2 = 2(x - 0)$$

$$y = 2x + 2$$

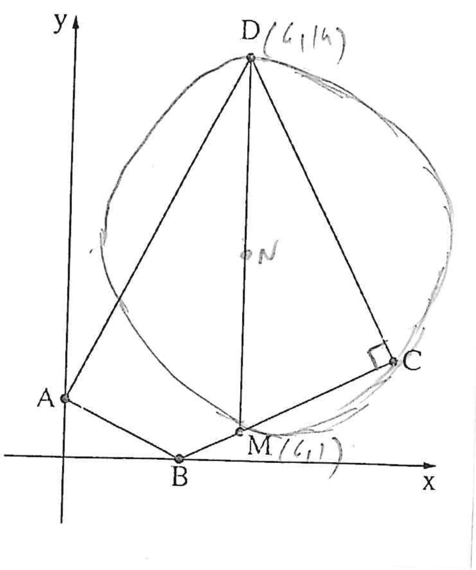
הקטע DM מקביל לציר ה-y ולכן שיעור ה-x בנקודה D הוא 6.

נציב ונקבל:

$$y_{(6)} = 2 \cdot 6 + 2 = 14$$

$$\boxed{D(6,14)}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←



ד. $CD \perp BC$ ולכן: $\sphericalangle DCM = 90°$.

נשרטט את המעגל החוסם את משולש MDC.

המשולש ישר-זווית ולכן המיתר המונח מול הזווית הישרה הוא קוטר המעגל, כלומר DM הוא קוטר המעגל.

נסמן את נקודת מרכז המעגל ב- N.

הנקודה N היא אמצע הקוטר. נשתמש בנוסחת אמצע קטע.

$$x_N = \frac{6+6}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$y_N = \frac{1+14}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$$

כלומר: $N(6,7.5)$.

נמצא את אורך הרדיוס. הרדיוס DN מקביל לציר ה-y ולכן

$$R = y_D - y_N = 14 - 7.5 = 6.5$$

נחשב את אורכו לפי:

אורך הרדיוס: 6.5 יחידות.

נציב בנוסחה למציאת משוואת מעגל:

$$(x-6)^2 + (y-7.5)^2 = 6.5^2$$

$$\boxed{(x-6)^2 + (y-7.5)^2 = 42.25}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

3. בעיר מסוימת נערך סקר כדי לבדוק את מספר התושבים בעיר שרוכבים על אופניים.

המשתתפים בסקר חולקו לשתי קבוצות: מבוגרים וצעירים.

נסמן ב־ x את ההסתברות לבחור באקראי צעיר מבין משתתפי הסקר.

בסקר נמצא:

80% מן הצעירים רוכבים על אופניים.

מספר הצעירים הרוכבים על אופניים גדול פי 4 ממספר המבוגרים ש<u>אינם</u> רוכבים על אופניים.

נתון כי ההסתברות לבחור באקראי משתתף בסקר שאיננו רוכב על אופניים היא 0.1 .

א. מצא את x .

בחרו באקראי משתתף בסקר.

ב. אם ידוע שנבחר מבוגר, מהי ההסתברות שהוא רוכב על אופניים?

ג. מהי ההסתברות שהמשתתף שנבחר הוא צעיר <u>או</u> שהוא רוכב על אופניים?

ד. נתון כי בסקר השתתפו 3,850 מבוגרים שרוכבים על אופניים.
כמה אנשים סך הכול השתתפו בסקר?

נסמן את השאלה בטבלה דו-ממדית:

	רוכב	לא רוכב	
מבוגר		$0.2x$	$1-x$
צעיר	$0.8x$		x
	0.9	0.1	1

נתונים:

* $P(\text{צעיר}) = x$
* $P(\text{לא רוכב}) = 0.1$
*

$$P(\text{רוכב} / \text{צעיר}) = 0.8$$

$$\frac{P(\text{צעיר} \cap \text{רוכב})}{P(\text{צעיר})} = 0.8$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

$$\frac{P(\text{צעיר} \cap \text{רוכב})}{x} = 0.8$$

$$P(\text{צעיר} \cap \text{רוכב}) = 0.8x$$

$$P(\text{צעיר} \cap \text{רוכב}) = 4 \cdot P(\text{מבוגר} \cap \text{לא רוכב}) \; *$$

$$0.8x = 4 \cdot P(\text{מבוגר} \cap \text{לא רוכב})$$

$$P(\text{מבוגר} \cap \text{לא רוכב}) = 0.2x$$

נמצא את ההסת׳: "צעיר ∩ לא רוכב" בשני אופנים שונים!

לפי שורת הצעירים נקבל: $x - 0.8x$, כלומר: $0.2x$.

לפי עמודת הלא רוכב נקבל: $0.1 - 0.2x$

נשווה בין הביטויים ונקבל!

$$0.2x = 0.1 - 0.2x$$

$$0.4x = 0.1$$

$$\boxed{x = 0.25}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

ב. נניח $x=0.25$ נקבל ונשלים טבלה

	רוכב	לא רוכב	
מבוגר	0.7	0.05	0.75
צעיר	0.2	0.05	0.25
	0.9	0.1	

$$P(\text{רוכב} / \text{מבוגר}) = \frac{P(\text{מבוגר וגם רוכב})}{P(\text{מבוגר})} = \frac{0.7}{0.75} = \boxed{\frac{14}{15}}$$

$P(\text{לא רוכב או צעיר})$

ג. אנחנו מתבקשים למצוא את:
נסתכל על ארבעת התאים הפנימיים של הטבלה
התאים שמתאימים לנו הם:

$$P(\text{רוכב} \cap \text{מבוגר}) + P(\text{רוכב} \cap \text{צעיר}) + P(\text{לא רוכב} \cap \text{צעיר})$$

$$0.7 + 0.2 + 0.05 = \boxed{0.95}$$

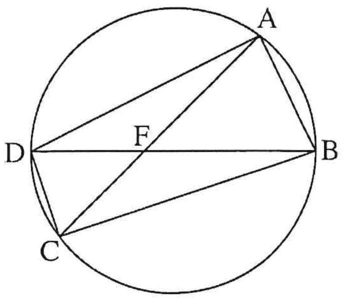
ד. נתון שמספר התלמידים שרוכבים על אופניים הוא 3,850.
ההסתברות לבחור מבוגר שרוכב על אופניים הוא 0.7.

נסמן ב-N את מספר האנשים שבסקר.

לפי הנתונים מתקיים: $0.7 \cdot N = 3{,}850$, כלומר: $N=5{,}500$

$\boxed{\text{מספר המשתתפים בסקר הוא } 5{,}500}$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←



4. נתון מעגל. המיתרים AC ו־ BD נחתכים בנקודה F (ראה סרטוט).

א. הוכח: $\triangle DFC \sim \triangle AFB$.

נתון: $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB$.

ב. הוכח: BD הוא קוטר במעגל.

נתון: $FC = \sqrt{18}$, $AF = \sqrt{32}$, $DF < BF$.

רדיוס המעגל שווה ל־ 5.

ג. מצא את אורך הקטע BF.

נתון: נקודה E היא אמצע הקטע AF, ונקודה G היא אמצע הקטע FB.

$DC = \sqrt{10}$.

ד. מצא את אורך הקטע EG.

פתרון:

	טענה	נימוק
(1)	$\sphericalangle AFB = \sphericalangle DFC$	זוויות קדקודיות שוות
(2)	$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$	זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת שוות
(3)	$\triangle AFB \sim \triangle DFC$	משפט דמיון ז.ז לפי (1),(2)
	מ.ש.ל. א'	
(4)	$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB$	נתון
(5)	$\sphericalangle DAB + \sphericalangle DCB = 180°$	זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל משלימות ל־180°
(6)	$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = 90°$	חישוב. לפי (4), (5)
(7)	BD קוטר במעגל	מול זווית היקפית ישרה מונח קוטר. לפי 6
	מ.ש.ל. ב'	

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

	טענה	נימוק
8	$AF=\sqrt{32}$, $FC=\sqrt{18}$	נתון
9	$DF<BF$	נתון
10	$R=5$	נתון
11	$BD=10$	קוטר שווה לפעמיים הרדיוס
12	$\frac{BF}{FC}=\frac{AF}{DF}=\frac{AB}{CD}$	יחס הצלעות המתאימות במשולשים דומים שווה. לפי 3
13	$\frac{BF}{\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{32}}{10-BF}$	הצבת נתונים. לפי 8,11,12
14	$BF=6$	חישוב. לפי 9,13

$\boxed{\text{מ.ש.ל ב}}$

	טענה	נימוק
15	$DC=\sqrt{10}$	נתון
16	E אמצע AF	נתון
17	G אמצע FB	נתון
18	$AB=2\sqrt{5}$	חישוב. לפי 12,14,15
19	GE קטע אמצעים במשולש ABF	הגדרת קטע אמצעים. לפי 16, 17

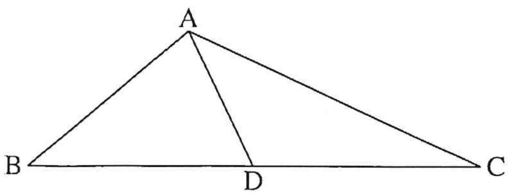
הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

נימוק	טענה	
הקטע האמצעי במשולש שווה למחצית הצלע השלישית. לפי 18, 19	$EG = \frac{AB}{2} = \sqrt{5}$	20

$\boxed{\text{מש.ל. ד'}}$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←



5. נתון משולש ABC (ראה סרטוט).

נתון: $\frac{AC}{BC} = \frac{2}{3}$, $\sphericalangle BAC = 120^{o}$.

א. חשב את גודל הזווית $\sphericalangle ABC$.

נתון: $BC = 12$.

AD הוא התיכון לצלע BC במשולש.

ב. חשב את אורך הקטע AD .

הנקודה F נמצאת באמצע הקטע AD והנקודה G נמצאת על הצלע AB .

נתון: שטח המשולש GAF שווה ל- 2 .

ג. חשב את אורך הקטע AG .

<u>פתרון:</u>

א. $\sphericalangle ABC = ?$

נשתמש במשפט הסינוסים במשולש ABC:

$$\frac{AC}{\sin\sphericalangle ABC} = \frac{BC}{\sin\sphericalangle BAC}$$

$$\Downarrow$$

$$\sin\sphericalangle ABC = \frac{AC}{BC} \cdot \sin\sphericalangle BAC$$

נציב נתונים:

$$\sin\sphericalangle ABC = \frac{2}{3} \cdot \sin 120^{\circ} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{\sphericalangle ABC \approx 35.264^{\circ}}$$

(זווית חדה
במשולש קהה זווית)

$BC = 12$

AD הוא התיכון לצלע BC במשולש.

ב. חשב את אורך הקטע AD.

מהנתונים נקבל:

$$AC = \frac{2}{3} BC = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$$

$$BD = DC = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$$

המשך בעמוד הבא...

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

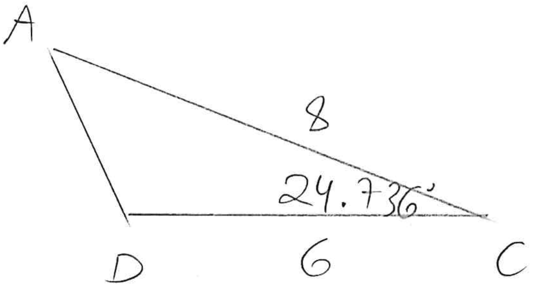
ב. המשך...

נרצה להשתמש במשפט הקוסינוסים במשולש ADC.

לצורך כך נמצא את $\measuredangle C$ המשותפת למשולשים ADC ; ABC

מסכום הזוויות במשולש ABC:

$$\measuredangle C = 180^\circ - \measuredangle B - \measuredangle BAC \approx 180^\circ - 120^\circ - 35.264^\circ = 24.736^\circ$$



משפט הקוסינוסים ב- $\triangle ADC$:

$$AD^2 = DC^2 + AC^2 - 2 \cdot DC \cdot AC \cdot \cos\measuredangle C$$

$$AD^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 24.736^\circ \approx 12.808$$

$AD \approx 3.579$ ס"מ

F אמצע AD, G על AB.
שטח משולש GAF שווה ל-2.

ג. חשב את אורך הקטע AG.

ראשית נמצא את $\measuredangle BAD$ המשותפת למשולשים GAF ; BAD.
זאת על פי משפט הסינוסים ומסקנות מסעיפים קודמים:

$$\frac{AD}{\sin\measuredangle ABD} = \frac{BD}{\sin\measuredangle BAD} \Rightarrow \sin\measuredangle BAD = \frac{BD}{AD} \cdot \sin\measuredangle ABD \approx \frac{6}{3.579} \cdot \sin 35.264^\circ$$

המשך החישובים בעמוד הבא...

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

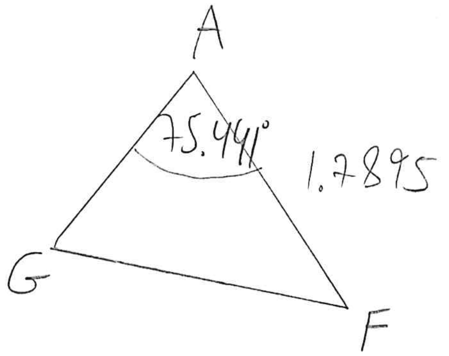
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

$$\sin\sphericalangle BAD \approx 0.968$$

(קטנה מהשלם 120°) $\sphericalangle BAD \approx 75.441^\circ$

כלומר: $\sphericalangle GAF \approx 75.441^\circ$ ו- $\sin\sphericalangle GAF \approx 0.968$

וכן $AF = \frac{1}{2}AD \approx \frac{1}{2}\cdot 3.579 = 1.7895$



נשתמש בנוסחה הטריגונומטרית לחישוב שטח משולש:

$$S_{\Delta GAF} = \frac{1}{2}AG\cdot AF\cdot \sin\sphericalangle GAF \approx \frac{1}{2}\cdot AG\cdot 1.7895\cdot 0.968$$

נשווה לשטח הנתון: $S_{\Delta GAF} = 2$:

$$\frac{1}{2}AG\cdot 1.7895\cdot 0.968 = 2 \quad / \cdot \frac{2}{1.7895\cdot 0.968}$$

$$AG \approx \frac{4}{1.7895\cdot 0.968}$$

$$\boxed{AG \approx 2.309}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a}{6x^2-x^3}$. $a>0$ הוא פרמטר.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) רשום את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ב. מצא את שיעור ה־ x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון: שיעור ה־ y של נקודת הקיצון של הפונקציה הוא $\frac{1}{4}$.

ד. מצא את a .

ה. **(1)** סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$.

ו. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x=2$.

פתרון:

א.1. תחום הגדרה: נדרוש: מכנה שונה מאפס:

$$6x^2-x^3\neq 0$$

$$x^2\cdot(6-x)\neq 0$$

$$x^2\neq 0 \,/\sqrt{\ } \qquad 6-x\neq 0\,/+x$$

$$x\neq 0 \qquad x\neq 6$$

לסיכום: תחום ההגדרה של הפונקציה: $\boxed{x\neq 6 \text{ וגם } x\neq 0}$

2. אסימפטוטה אופקית: הפונקציה הינה פונקציה רציונלית ולכן אם קיימת אסימפטוטה אופקית - היא יחידה:
החזקה של המעריך הגבוה ביותר של x במכנה גדולה מהחזקה של המעריך הגבוה ביותר של x במונה ולכן ניתן לקבוע כי $\boxed{y=0}$ הינה אסימפטוטה אופקית לציר y של הפונקציה f.

אסימפטוטות מאונכות לציר ה-x:
מתחום ההגדרה של הפונקציה: $x=6$; $x=0$ מאפסים את המכנה אך לא את המונה ולכן ניתן לקבוע כי $\boxed{x=6 \ ; \ x=0}$ הינן אסימפטוטות מאונכות לציר ה-x של הפונקציה f.

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

יואל גבע
לא מתפשרים.

ד. נגזיר:

נגזיר בעזרת חזקה שלילית

$$f(x) = \frac{a}{6x^2 - x^3} = a\cdot(6x^2 - x^3)^{-1}$$

$$f'(x) = -a\cdot(6x^2-x^3)^{-2}\cdot(12x-3x^2) = -\frac{a\cdot(12x-3x^2)}{(6x^2-x^3)^2} =$$

$$= \frac{3ax\cdot(x-4)}{(6x^2-x^3)^2}$$

נשווה את הנגזרת לאפס על מנת למצוא נקודות "חשודות" כקיצון:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{3ax\cdot(x-4)}{(6x^2-x^3)^2}=0 \Rightarrow 3ax\cdot(x-4)=0$$

$$3ax\cdot(x-4)=0 \quad /:3a>0$$

(נתון a פרמטר חיובי)

$$x\cdot(x-4)=0$$

או

$\cancel{x=0}$ נפסל מתחום ההגדרה

$x-4=0 \quad /+4$

$x=4$

נציג בטבלה

x	$x<$	0	$<x<$	4	$<x<$	6	$<x$
$f(x)$				$\frac{1}{4}$			
$Sign(f'(x))$	+		−	0	+		+
עלייה/ירידה $f(x)$	↗		↘	מינ'	↗		↗

ראה משובים עבור הטבלה בעמוד הבא...

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

חישובים עבור הטבלה:

$$f(x)=\frac{a}{6x^2-x^3}$$

$$f'(x)=\frac{3ax\cdot(x-4)}{(6x^2-x^3)^2}$$

מהתבוננות בביטוי האלגברי של הנגזרת f' ניתן להבחין כי סימנה זהה לסימן הביטוי $x\cdot(x-4)$ (הביטוי $\frac{3a}{(6x^2-x^3)^2}$ חיובי בכל תחום ההגדרה - נתון $0<a$).

לכן נבדוק רק בביטוי $x\cdot(x-4)$ לבדיקת סימן הנגזרת f' בטבלה:

$\underline{x=-1}$:

$$-1\cdot(-1-4)>0$$

$\underline{x=1}$:

$$1\cdot(1-4)<0$$

$\underline{x=5}$:

$$5\cdot(5-4)>0$$

$\underline{x=7}$:

$$7\cdot(7-4)>0$$

לפי הטבלה נוכל לקבוע את שיעור ה-x של נקודת הקיצון: $x=4$
וסוג הקיצון: מינימום.

כלומר עבור $x=4$ יש לפונקציה נקודת מינימום.

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

ג. מהטבלה שערכנו בסעיף קודם נקבע את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה f:

תחומי העלייה של הפונקציה $f(x)$:

$x<0$ או $4<x<6$ או $6<x$

תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$:

$0<x<4$

נתון: שיעור ה-y של נקודת הקיצון של הפונקציה הוא $\frac{1}{4}$.

ד. מצא את a.

נציב את שיעור ה-x של נקודת הקיצון בפונקציה ונשווה לשיעור ה-y הנתון של נקודת הקיצון:

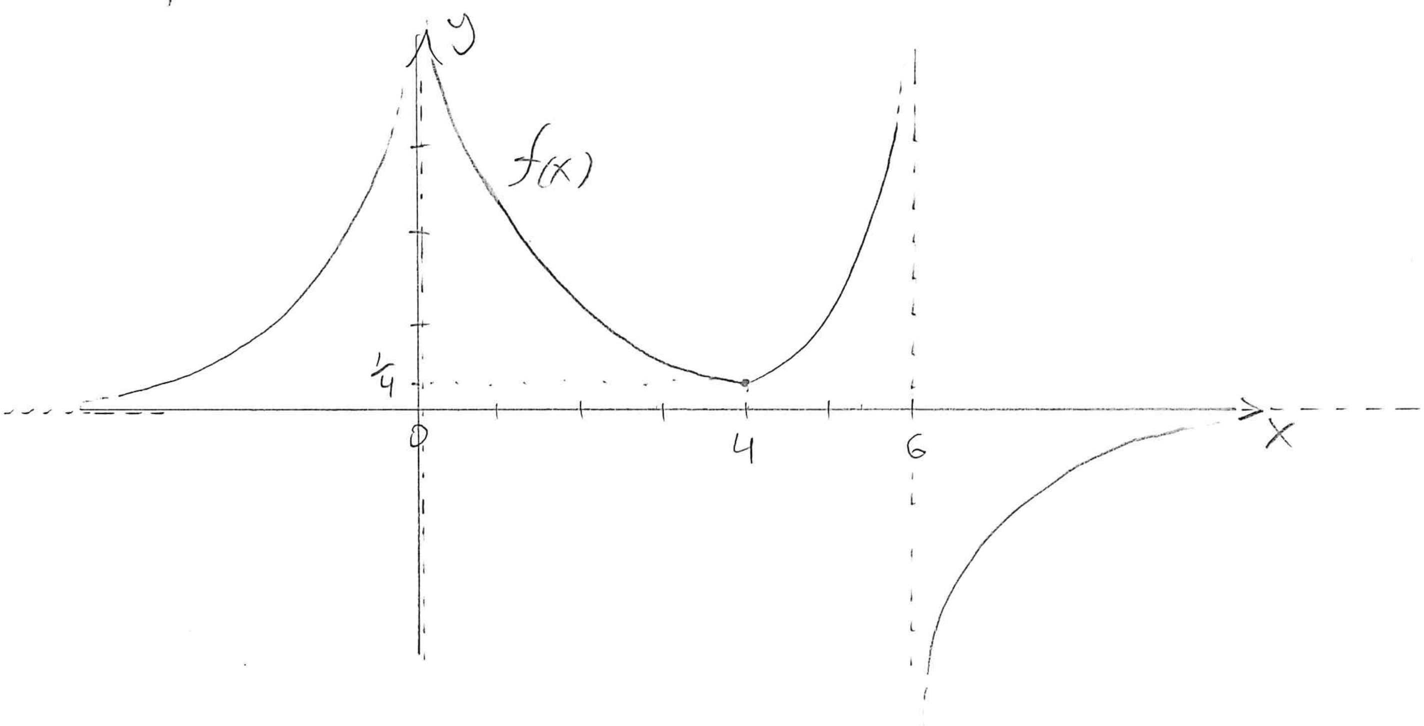
$$f(4)=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{a}{6\cdot4^2-4^3}=\frac{1}{4} \Rightarrow a=6\cdot4-4^2=8$$

כלומר: $\boxed{a=8}$

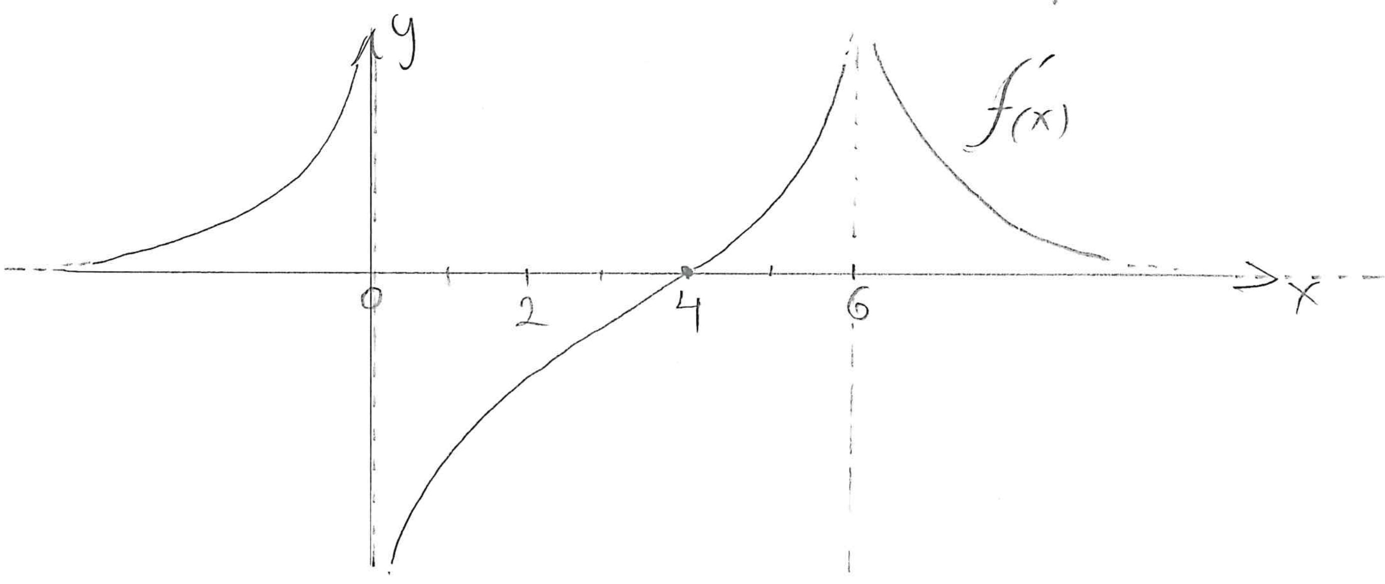
הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

ה.1. על פי סעיפי החקירה (נשרט) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$:

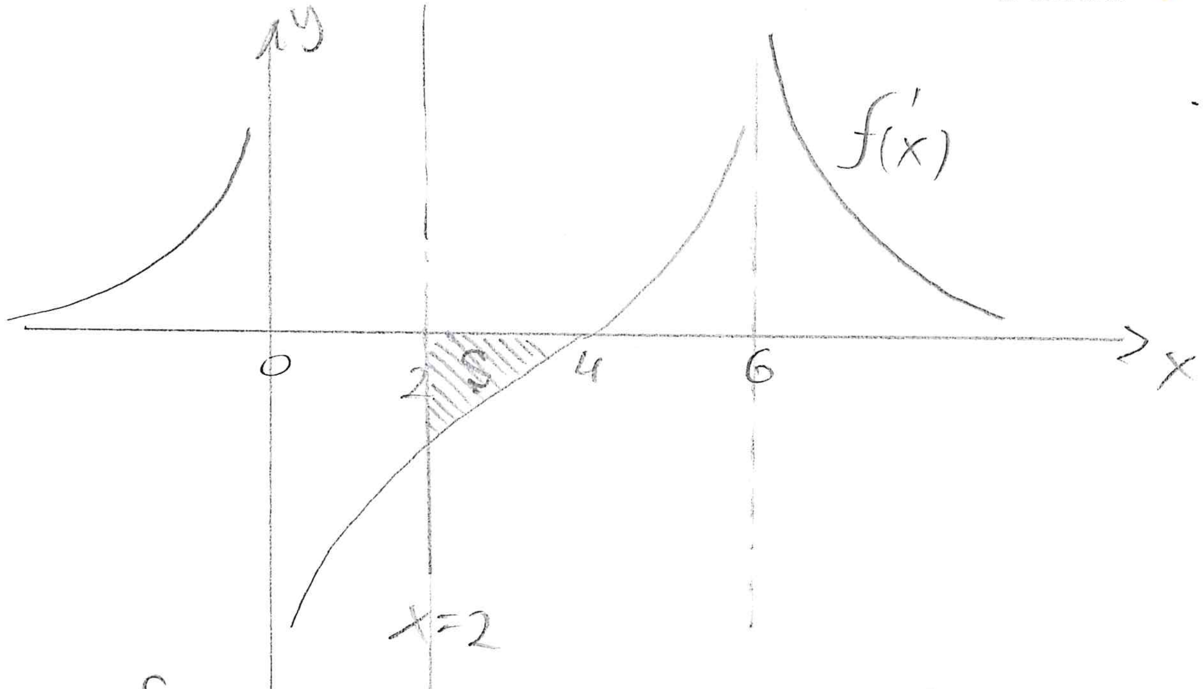


ה.2. נעזר בתחום ההגדרה, נקודת חיתוך עם ציר x, תחומי החיוביות והשליליות של $f'(x)$ כפי שהם עולים מהטבלה שערכנו. בנוסף, נשים לב כי ל-f' ישנן אותן אסימפטוטות מאונכות לציר x וניתן להוכיח כי גם יש לה אותה אסימפטוטה אנכית לציר y כמו לפונקציה $f(x)$.



הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

ו.



נסמן את השטח הנדרש ב- S (ראה שרטוט לעיל).

$$S=\int_2^4 (0-f'(x))dx = \left[-f(x)\right]_2^4 = (-f(4))-(-f(2)) = f(2)-f(4)$$

נחשב את $f(2)$. לצורך כך נציב $a=8$, $x=2$ בביטוי האלגברי של הפונקציה $f(x)$:

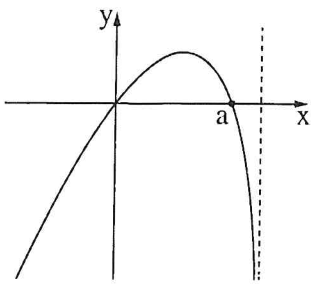
$$f(x)=\frac{8}{6x^2-x^3} \Rightarrow f(2)=\frac{8}{6\cdot 2^2-2^3}=\frac{1}{2}$$

$\Downarrow$ $f(4)=\frac{1}{4}$ מהנתון בשאלה ומסקנות מסעיפים קודמים

$$S=f(2)-f(4)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

נסכם: השטח הנדרש הינו $\frac{1}{4}$


הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←



7. $f(x)$ היא פונקציה שגרף פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מתואר בסרטוט שלפניך.

הגרף חותך את ציר ה־ x בראשית הצירים ובנקודה שבה $x = a$ בלבד.

a הוא פרמטר חיובי.

א. מצא את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $f(x)$,

וקבע את סוגן על פי הגרף (אם יש צורך, הבע באמצעות a). נמק את תשובתך.

נתון: $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{5-x}$.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את a .

ד. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = -3f(x)$.

ו. מצא את המשוואות של המשיקים לגרף הפונקציה $g(x)$ שהשיפוע שלהם הוא 0 .

פתרון:

א. לפי גרף $f'(x)$ הנתון ניתן לראות כי:

$f'(x)$ עוברת משלילית לחיובית דרך אפס סביב $x=0$

לכן ניתן להסיק כי f עוברת מירידה לעלייה סביב $x=0$

ועבור $x=0$ יש ל-$f(x)$ נקודת מינימום.

וכן כי $f'(x)$ עוברת מחיובית לשלילית דרך אפס סביב $x=a$

לכן ניתן להסיק כי f עוברת מעלייה לירידה סביב $x=a$

ועבור $x=a$ יש ל-$f(x)$ נקודת מקסימום.

נתון: $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{5-x}$

ב. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$: נדרוש:

ביטוי ממשי מתחת לשורש מספר זוגי - אי-שלילי: $0 \le 5-x$

$x \le 5$

כלומר תחום הגדרה של הפונקציה $f(x)$: $\boxed{x \le 5}$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

ג. נמצא את a.

נשתמש במסקנה כי $f'(a)=0$ (נובע מהגרף הנתון).

נגזור:

$$f(x)=x^2\cdot\sqrt{5-x}$$

$$f'(x)=2x\cdot\sqrt{5-x}-\frac{x^2}{2\sqrt{5-x}}$$

$$\Downarrow f'(a)=0$$

$$2a\sqrt{5-a}-\frac{a^2}{2\sqrt{5-a}}=0 \qquad /+\frac{a^2}{2\sqrt{5-a}}$$

$$2a\sqrt{5-a}=\frac{a^2}{2\sqrt{5-a}} \qquad /\cdot 2\sqrt{5-a}$$

$$4a(5-a)=a^2 \qquad /:a>0$$

(נתון a פרמטר חיובי)

$$4\cdot(5-a)=a$$

$$20-4a=a \qquad /+4a$$

$$5a=20 \qquad /:5$$

$$\boxed{a=4}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

ד. שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה f(x) עם ציר ה-x:
נציב y=0 בביטוי האלגברי של הפונקציה:

$$0 = x^2 \cdot \sqrt{5-x}$$

או

$x^2 = 0 \ /\sqrt{\ }$

$x = 0$

$\sqrt{5-x} = 0 \ /()^2$

$5-x = 0 \ /+x$

$x = 5$

כלומר נקודות החיתוך של גרף f(x) עם ציר ה-x הן:

$\boxed{(0,0) \ ; \ (5,0)}$

ה. גרף f(x):
מתחום ההגדרה, נקודות החיתוך עם הצירים ונקודות הקיצון
נשרטט את גרף הפונקציה.
מעט חקירה נוספת:
מנקודות הקיצון נובע: תחומי ירידה של f:

$x<0$ או $4<x<5$

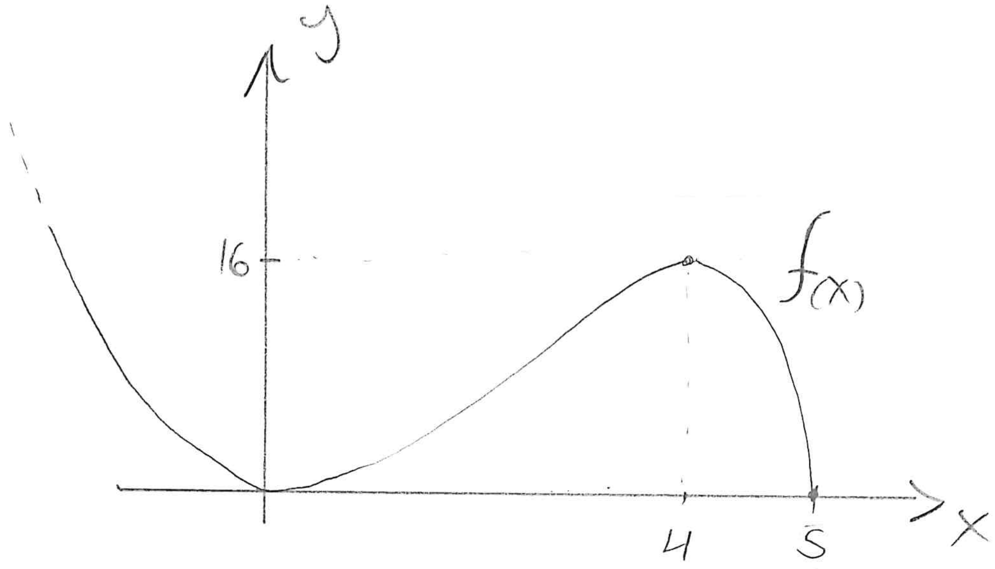
תחומי עלייה של f:

$0<x<4$

שיעור ה-y של נק' המקסימום: $f(4) = 4^2 \cdot \sqrt{5-4} = 16$.
נקודת הקיצון בקצה התחום: $(5,0)$ - מינימום מתחומי העלייה והירידה.
ניתן להראות כי ל-f אין אסימפטוטות מאונכות לצירים.
ראה שרטוט גרף f(x) בעמ' הבא...

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←



$g(x) = -3f(x)$

1. גרף $g(x)$ מהווה שיקוף של גרף $f(x)$ ביחס לציר ה-x
ומתיחה פי 3 בציר ה-y.
לכן שיעורי ה-x של נקודות הקיצון נשארים בעינם.
סוג הקיצון הינו הפוך מזה של $f(x)$.
ושיעור ה-y מוכפל פי -3.
מכך ומכיוון שהמשיקים לגרף הפונקציה $g(x)$ ששיפועיהם הוא אפס משיקים לגרף בנקודות הקיצון הפנימיות שלו
נוכל לקבוע כי נקודות ההשקה הן $(0, g(0)), (4, g(4))$
כלומר: $(0, -3f(0)), (4, -3f(4))$
$(0, 0), (4, -48)$
שיפועי המשיקים הדרושים הם אפס לכן משוואות המשיקים:

$\boxed{y = 0 \quad ; \quad y = -48}$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

8. בסרטוט שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)=\frac{9}{x^2}$ המוגדרת לכל $x>0$, והישר $y=-\frac{4}{3}x$.

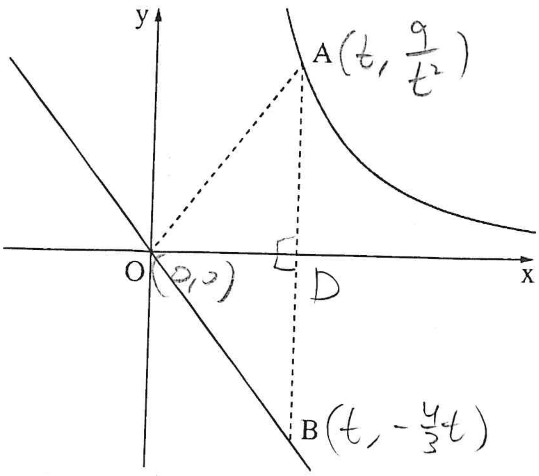
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון.

מן הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה־ y ,

והוא חותך את הישר $y=-\frac{4}{3}x$ בנקודה B .

א. מצא את שיעורי הנקודה A שבעבורה שטח המשולש AOB הוא מינימלי (O – ראשית הצירים).

ב. האם קיימת נקודה A שבעבורה שטח המשולש AOB הוא 4 ? נמק את תשובתך.



פתרון:

א. נתון: $x_A=t$ ומכאן $A(t,f(t))$

$A(t,\frac{9}{t^2})$

$t>0$ מכיוון כי A ברביע ה-I.

AB מקביל לציר y, לכן: $x_B=x_A=t$

נביע את שיעור ה-y של הנקודה B: (נמצאת על הישר $y=-\frac{4}{3}x$):

$y_B=-\frac{4}{3}x_B=-\frac{4}{3}t \Rightarrow B(t,-\frac{4}{3}t)$

נוריד גובה OD ל-AB במשולש AOB (ראו שרטוט).

D נמצאת על AB המקביל לציר ה-y כלל לכן $x_D=x_A=t$.

נביע את שטח המשולש AOB כפונקציה של t!

$$S_{\triangle AOB}=S(t)=\frac{1}{2}AB\cdot OD=\frac{1}{2}(y_A-y_B)\cdot(x_D-x_O)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{t^2}-\left(-\frac{4}{3}t\right)\right)\cdot(t-0)=\frac{9}{2t}+\frac{2}{3}t^2$$

הזדמנות לעתידה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

$$S(t) = \frac{9}{2t} + \frac{2}{3} \cdot t^2 \quad , \quad 0<t$$

נגזיר:

$$S'(t) = -\frac{9}{2t^2} + \frac{4}{3}t$$

נשווה נגזרת לאפס: $S'(t) = 0$

$$-\frac{9}{2t^2} + \frac{4}{3}t = 0 \quad / + \frac{9}{2t^2}$$

$$\frac{4}{3}t = \frac{9}{2t^2} \quad / \cdot \frac{3t^2}{4}$$

$$t^3 = \frac{27}{8} \quad / \sqrt[3]{\ }$$

$$t = \frac{3}{2}$$

נגזור שנית:

$$S''(t) = \frac{9}{t^3} + \frac{4}{3} \Rightarrow S''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} + \frac{4}{3} > 0$$

כלומר עבור $x_{A_{min}} = \frac{3}{2}$ מתקבל שטח מינימלי עבור משולש AOB.

שיעור ה-y של A עבורו מתקבל השטח המינימלי של משולש AOB:

$$f_{min}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 4$$

עבור $A_{min}\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ מתקבל שטח ΔAOB מינימלי.

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

ב. נ.ג.ר $t=\frac{3}{2}$ בפונקציית המטרה $S(t)=\frac{9}{2t}+\frac{2}{3}t^2$

על מנת לחשב את השטח המינימלי האפשרי עבור ΔAOB תחת האילוצים:

$$S\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{2\cdot\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2=3+\frac{3}{2}=4.5$$

כלומר שטח המשולש המינימלי הוא 4.5 יח"ר.

ולכן נוכל לקבוע כי לא קיימת נקודה A שבעבורה שטח המשולש AOB הוא 4.

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←