

# פונקציות רציונליות –

## שאלון 581

קובץ זה כולל פונקציות רציונליות המתאימות לשאלון 581.

רוב השאלות קצרות יחסית ואינן כוללות חקירה מלאה של הפונקציה, אלא מדגישות רעיון מסוים.

הדגשנו בעיקר:

הבעה על ידי פרמטרים (כולל הקשר בין ערך הפרמטר למספר הפתרונות של המשוואה), אסימפטוטות אנכיות ואופקיות, "חור" בגרף, פונקציות ללא תבנית אלגברית ידועה, פתרון באמצעות גרף הפונקציה, הזזות, מתיחות וטרנספורמציות

של פונקציה רציונלית וחקירה של הפונקציה  $\frac{1}{f(x)}$

בהסתמך על גרף הפונקציה  $f(x)$ .

מומלץ לפתור שאלות מהקובץ תוך כדי לימוד הנושא ובעיקר לקראת סיום הנושא.

לא כללנו את הקשר בין גרף של פונקציה לגרף נגזרתה.

נושא זה יובא בקובץ נפרד.

ברצוננו להודות מקרב לב לעפר ילין על הייעוץ הפדגוגי לשאלות, על בדיקת השאלות, על ההערות וההארות המצוינות ועל תמיכה בלתי מסויגת.

מורה המעוניין להציע תיקונים מוזמן לשלוח מייל לכתובת

[publish@geva.co.il](mailto:publish@geva.co.il)

יואל גבע אריק דז'לדטי

1. נתונות שלוש פונקציות:

$$h(x) = \frac{x(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}, \quad g(x) = \frac{x^2}{(x-3)(x+3)}, \quad f(x) = \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)}$$

קבע לאיזו פונקציה יש את התכונה הבאה:  
יש לה שני ערכי  $x$  שבהם היא לא מוגדרת, ואסימפטוטה אנכית אחת.  
נמק את בחירתך והסבר מדוע הפונקציות האחרות אינן מתאימות.

2. נתונה פונקציה רציונלית  $f(x)$ , המקיימת:  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ .

- עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבע האם היא נכונה. נמק.
- (1) נקודות החיתוך של  $f(x)$  עם ציר ה- $x$  מתקבלות בהכרח בכל נקודה שבה  $g(x) = 0$ .
  - (2) נקודות החיתוך של  $f(x)$  עם ציר ה- $x$  מתקבלות בהכרח בכל נקודה שבה  $h(x) = 0$ .
  - (3) לפונקציה  $f(x)$  יש בהכרח אסימפטוטות אנכיות כאשר  $h(x) = 0$ .

3. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 + 12x + 32}{x^2 + 9x + 20}$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$  והראה שעבור כל  $x \neq -4$  בתחום מתקיים:  $f(x) = \frac{x+8}{x+5}$ .
- ב. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה  $f(x)$ .
- ג. הנקודה  $A$  היא נקודת אי-רציפות סליקה ("חור") של הפונקציה  $f(x)$ .  
(1) מצא את שיעורי הנקודה  $A$ .  
(2) הראה שהישר המחבר את הנקודה  $A$  עם ראשית הצירים – חוצה את הזווית שבין הצירים.

4. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 - kx + m}{x^2 - 6x + 5}$ , המוגדרת כאשר  $x \neq 1$ ,  $x \neq 5$ . נתון:  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 1.75$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $k$  ו- $m$ .

5. נתונה שתי פונקציות:  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $g(x) = x + \frac{1}{x}$ .

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{נסמן:}$$

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $h(x)$ ?  
ב. הראה שבתחום שמצאת בסעיף א' מתקיים:  $h(x) = x$ .  
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $h(x)$ .

6. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 + x - a}{x^2 - x + a}$ ,  $a$  הוא פרמטר.  
 א. לאילו ערכים של  $a$ , הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל ערך של  $x$ .  
 ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ , אם נתון  $a > 1$ .  
 ג. הבע באמצעות  $a$  את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ , אם נתון  $a < 0$ .

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 - k - 6}{x^2 + 1}$ .

- א. מצא לאילו ערכים של הפרמטר  $k$  גרף הפונקציה  $f(x)$  חותך את ציר ה- $x$  בשתי נקודות שונות.  
 ב. נתון שלפונקציה  $f(x)$  יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$ . דרך נקודות אלה העבירו ישרים המאונכים לציר ה- $x$ . המרחק בין הישרים הוא 8. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .

8. הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - k + 4}$  מוגדרת לכל ערך של  $x$ .

- א. מצא את התחום של הפרמטר  $k$ .  
 ב. האם ייתכן שלפונקציה יש נקודת מקסימום?

9. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 - k}{x^2 - 9}$ .

- א. מהו הערך של  $k$  שבעבורו אין לפונקציה  $f(x)$  אסימפטוטה אנכית?  
 ב. נתון  $k \neq 9$ .  
 (1) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (2) לגרף הפונקציה  $f(x)$  יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$ , הנמצאות בין שתי האסימפטוטות האנכיות שלה.  
 מצא את תחום הערכים של  $k$ . נמק.

10. נתונה הפונקציה  $f(x) = x + \frac{m(x-1)}{x}$ .  $m$  הוא פרמטר.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 נתון שלפונקציה  $f(x)$  יש נקודות קיצון.  
 ב. (1) מצא את תחום הערכים של  $m$ .  
 (2) הבע את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  באמצעות  $m$ , וקבע את סוגן.  
 ג. לכל ערך של  $m$  מתקבל גרף אחר לפונקציה  $f(x)$ . קיימת נקודה הנמצאת על כל הגרפים המתקבלים ל- $f(x)$  וששיעוריה אינם תלויים בפרמטר  $m$ . מצא את שיעורי נקודה קבועה זו.

11. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 - a}{x^3}$ .

- מצא לאילו ערכים של הפרמטר  $a$  יש לפונקציה  $f(x)$  נקודות קיצון.  
 כמה נקודות קיצון יש לפונקציה במקרה זה?

12. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4x + k}$ .

- א. מצא באיזה תחום נמצא הפרמטר  $k$ , כדי שלפונקציה  $f(x)$  :  
 (1) יש שני ערכי  $x$  שעבורם היא לא מוגדרת.  
 (2) יש ערך אחד של  $x$  שעבורו היא לא מוגדרת.  
 (3) אין ערכי  $x$  שעבורם היא לא מוגדרת.  
 ב. מצא באיזה תחום נמצא הפרמטר  $k$ , כדי שלפונקציה  $f(x)$  :  
 (1) יש שתי נקודות קיצון.  
 (2) יש נקודת קיצון אחת.  
 (3) אין נקודות קיצון.

13. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^4 - 4x + 4}$ .

נסמן:  $g(x) = x^4 - 4x + 4$ .

- א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ ?  
 (2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ , והסבר מדוע לכל  $x$  מתקיים:  $g(x) \geq 1$ .  
 ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ ? נמק.

14. נתונות שלוש פונקציות:

$$h(x) = \frac{x^2 - 1}{x}, \quad g(x) = \frac{x^2}{x - 6}, \quad f(x) = \frac{x - 6}{x^2}$$

קבע איזו פונקציה משיקה לציר ה- $x$ . נמק.

הערה: לא חובה לגזור את הפונקציה.

15. א. רשום תבנית אלגברית של פונקציה שיש לה שני ערכי  $x$  שבהם היא אינה מוגדרת, שתי אסימפטוטות אנכיות ואסימפטוטה אופקית אחת.  
 ב. רשום תבנית אלגברית של פונקציה שיש לה שני ערכי  $x$  שבהם היא אינה מוגדרת, אסימפטוטה אנכית אחת ואסימפטוטה אופקית אחת.

16. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$ .

הפונקציה  $g(x)$  מקיימת:  $g(x) = f(2x)$ . נתון:  $g(x) = \frac{kx}{x^2 + m}$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $k$  ו- $m$ .

17. לפניך שתי טענות.

קבע עבור כל אחת מהן האם היא נכונה או לא נכונה. נמק את תשובתך.

- (1) אם לפונקציה  $f(x)$  המוגדרת עבור  $x > 0$  וגזירה בכל התחום יש נקודת מקסימום ב- $(3; 6)$  ואסימפטוטה אופקית שמשוואתה  $y = 2$ , אז לפונקציה יש לפחות נקודת פיתול אחת.  
 (2) אם לפונקציה  $f(x)$  המוגדרת עבור  $x > 0$  וגזירה בכל התחום יש נקודת מינימום ב- $(3; 6)$  ואסימפטוטה אופקית שמשוואתה  $y = 2$ , אז לפונקציה יש לפחות שתי נקודות פיתול.

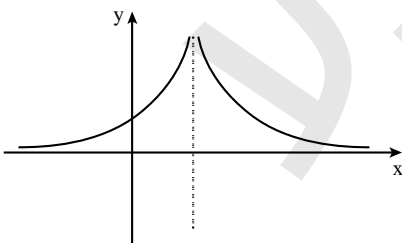
18. הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  מקיימות:  $f(x) = \frac{x^2}{g(x)}$ . נתון:  $f(x_1) = 288$ ,  $g'(x_1) = 0$ ,  $f'(x_1) = 354$ .  
 חשב את הערך של  $x_1$ .

19. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2 - x}$ .

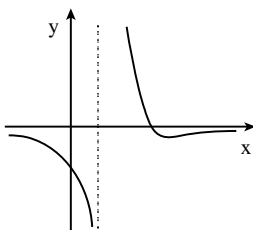
- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים.  
 (3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .  
 ב. נתונה הפונקציה  $g(x)$  המקיימת:  $g(x) = f(x) - 2$ .  
 הסתמך על סעיף א, וענה על התת-סעיפים שלפניך.  
 (1) מה הן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה  $g(x)$ ?  
 (2) מה הם השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ ?  
 (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .  
 ג. הפונקציה  $h(x)$  מקיימת:  $h(x) = f(x) + k$ . מצא את הערך של  $k$  עבורו שיעור ה- $y$  של נקודת הקיצון של הפונקציה  $h(x)$  הוא 4.

20. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{9x - 18}{x^2 - 9x + 18}$ .

- א. מצא: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה.  
 ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ג. הפונקציה  $g(x)$  מקיימת  $g(x) = f(x) + k$ .  
 הגרף של הפונקציה  $g(x)$  משיק לציר ה- $x$ .  
 (1) מצא את הערכים האפשריים של  $k$ .  
 (2) מבין שני ערכי  $k$  שמצאת, הצב את הערך הגדול יותר של  $k$ , ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .



21. א. לפניך גרף של פונקציה רציונלית  $f(x)$ , המוגדרת בתחום  $x \neq 1$ .  
 נגדיר  $g(x) = -f(x)$ .  
 שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$  באותו התחום.

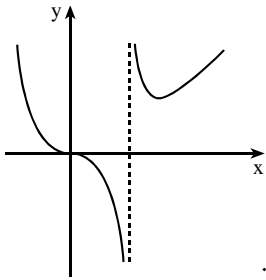


- ב. לפניך גרף של פונקציה רציונלית  $h(x)$ , המוגדרת בתחום  $x \neq 1$ .  
 נגדיר  $k(x) = -h(x)$ .  
 שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $k(x)$  באותו התחום.

22. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2x+5}{x-4}$ .

- א. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה.  
 (4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.  
 ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ג. נתונה הפונקציה  $g(x) = -\frac{2x+5}{x-4}$ .  
 (1) מה הן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה  $g(x)$ ?  
 (2) היעזר בסעיפים קודמים ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

23. לפניך גרף של פונקציה רציונלית  $f(x)$ , המוגדרת כאשר  $x \neq 2$ .



- גרף הפונקציה נפגש עם הצירים רק בראשית, ונקודת הקיצון היחידה של הגרף היא (3;27) מינימום, ראה ציור.  
 הפונקציה  $g(x)$  מקיימת  $g(x) = f(x-2)$ .  
 א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ .  
 ב. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של גרף הפונקציה  $g(x)$ .  
 ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .  
 ד. נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x+a)$  נמצאת על ציר ה- $y$ . מצא את הערך של הפרמטר  $a$ .

24. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$ .

- א. חקור את הפונקציה ומצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.  
 ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ג. כופלים פי 4 את שיעור ה- $y$  של כל הנקודות הנמצאות על הגרף של  $f(x)$  מבלי לשנות את שיעור ה- $x$  שלהם, כך שהתקבלה פונקציה  $h(x)$ .  
 (1) בטא את הפונקציה  $h(x)$  באמצעות  $f(x)$ .  
 (2) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה  $h(x)$  וקבע את סוג הקיצון.  
 ד. הפונקציה  $g(x)$  מקיימת  $g(x) = -\frac{1}{2}f(x)$ .  
 מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה  $g(x)$  וקבע את סוג הקיצון.

25. א. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2+4x+6}{x^2+4x+5}$ .

- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.  
 ב. נגדיר:  $g(x) = f(2x)$ . מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה  $g(x)$  וקבע את סוג הקיצון. היעזר בסעיף א.  
 ג. נגדיר:  $h(x) = f(-x)$ . מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה  $h(x)$  וקבע את סוג הקיצון. היעזר בסעיף א.

26. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2x^2 + 6x}{x^2 - 7x + 10}$ .

- א. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, אסימפטוטות מקבילות לצירים.  
 ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ג. הפונקציה  $g(x)$  מקיימת:  $g(x) = (f(x))^n$ ,  $n$  הוא מספר זוגי.  
 (1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ .  
 היעזר ב- $n$  במידת הצורך.  
 תוכל להיעזר בסעיפים קודמים.  
 (2) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

27. לפניך שתי טענות.

- קבע עבור כל אחת מהן האם היא נכונה או לא נכונה.  
 נמק את תשובתך. אם הטענה אינה נכונה, הצג דוגמה נגדית.  
 (1) גרף של פונקציה אינו חותך את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.  
 (2) גרף של פונקציה תמיד חותך את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.

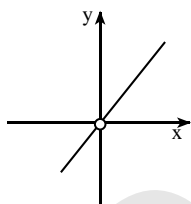
### תשובות:

1.  $f(x)$ . 2. (1) לא נכונה. (2) לא נכונה. (3) לא נכונה.

3. א.  $x \neq -5, x \neq -4$ . ב.  $x = -5, y = 1$ . ג.  $A(-4; 4)$ .

4.  $m = -10, k = 3$ .

5. א.  $x \neq 0$ . ג.



6. א.  $a > 0.25$ . ב. כל  $x$ . ג.  $x \neq \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$ .

7. א.  $k > -6$ . ב.  $k = 10$ .

8. א.  $k < 4$ . ב. לא. 9. א.  $k = 9$ . ב. (1)  $x = -3, x = 3$ . (2)  $0 < k < 9$ .

10. א.  $x \neq 0$ . ב. (1)  $m < 0$ .

(2)  $(\sqrt{-m}; m + 2\sqrt{-m})$  מינימום,  $(-\sqrt{-m}; m - 2\sqrt{-m})$  מקסימום. ג.  $(1; 1)$ .

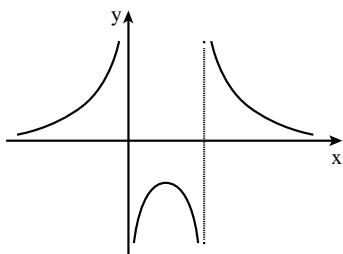
11.  $a > 0$ , שתי נקודות קיצון.

12. א. (1)  $k < 4$ . (2)  $k = 4$ . (3)  $k > 4$ . ב. (1)  $k > 0, k \neq 4$ . (2)  $k = 4$ . (3)  $k \leq 0$ .

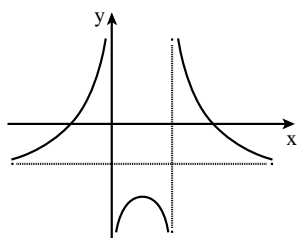
13. א. (1) כל  $x$ . (2)  $(1; 1)$  מינימום. ב. כל  $x$ . 14.  $g(x)$ .

15. א. לדוגמה:  $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x+2)}$ . ב. לדוגמה:  $g(x) = \frac{x(x+4)}{(x-3)(x+4)}$ .

16.  $m = \frac{1}{4}, k = 1\frac{1}{2}$ . 17. (1) נכונה. (2) נכונה. 18.  $1\frac{37}{59}$ .

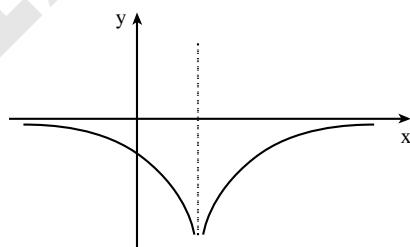
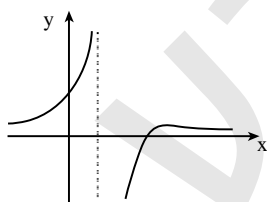
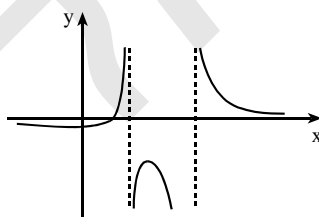
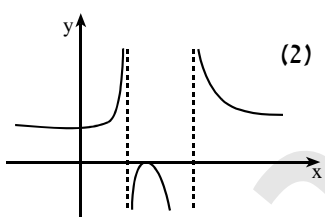


- (4) 19. א.  $x \neq 1, x \neq 0$  (1)  
 ב.  $y = 0, x = 1, x = 0$  (2)  
 ג. מקסימום  $(\frac{1}{2}; -8)$  (3)

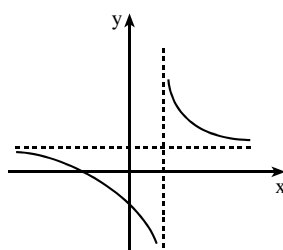
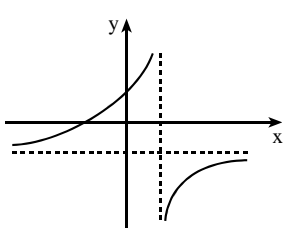


- (3) ב.  $y = -2, x = 1, x = 0$  (1)  
 ג.  $k = 12$  (2)  
 ג.  $k = 12$

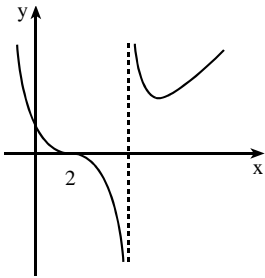
20. א. תחום הגדרה:  $x \neq 6, x \neq 3$ . נקודות חיתוך:  $(2; 0), (0; -1)$ .  
 אסימפטוטות:  $y = 0, x = 6, x = 3$ .  
 נקודות קיצון:  $(4; -9)$  מקסימום,  $(0; -1)$  מינימום.  
 עלייה:  $3 < x < 4$  או  $0 < x < 3$ . ירידה:  $x > 6$  או  $4 < x < 6$  או  $x < 0$ .  
 ג.  $k = 1$  או  $k = 9$  (1) ג.



21. א.  $x \neq 4$  (1) א.  $x \neq 4$  (1) א.  $x \neq 4$  (1) א.  $x \neq 4$  (1)  
 ב.  $y = -2, x = 4$  (1) ג.  $y = 2, x = 4$  (5) ד.  $(-2.5; 0), (0; -1.25)$  (4)





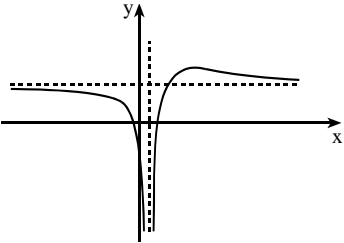


ג.

23. א.  $x \neq 4$

ב. מינימום (5;27)

ד.  $a = 3$



ב.

24. א. (1)  $x \neq 1$ , (2)  $(5; 1\frac{1}{8})$  מקסימום.

(3) עלייה:  $1 < x < 5$ , ירידה:  $x < 1$  או  $x > 5$

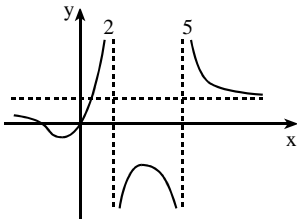
(4)  $(-1; 0)$ ,  $(2; 0)$ ,  $(0; -2)$

(5)  $y = 1$ ,  $x = 1$

ג. (1)  $h(x) = 4f(x)$ , (2)  $(5; 4.5)$  מקסימום.

ד. מינימום  $(5; -\frac{9}{16})$

25. א.  $(-2; 2)$  מקסימום. ב.  $(-1; 2)$  מקסימום. ג.  $(2; 2)$  מקסימום.



26. א. תחום הגדרה:  $x \neq 2$ ,  $x \neq 5$

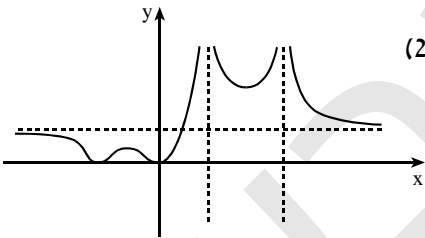
נקודות חיתוך:  $(-3; 0)$ ,  $(0; 0)$

עלייה:  $-1 < x < 2$  או  $2 < x < 3$

ירידה:  $x < -1$  או  $3 < x < 5$  או  $x > 5$

מינימום  $(-1; -\frac{2}{9})$ , מקסימום  $(3; -18)$

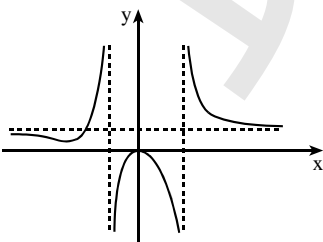
אסימפטוטות:  $y = 2$ ,  $x = 5$ ,  $x = 2$



ג. (1)  $(3; 18^n)$  מינימום,  $(0; 0)$  מינימום, (2)

$(-1; (\frac{2}{9})^n)$  מקסימום,

$(-3; 0)$  מינימום.

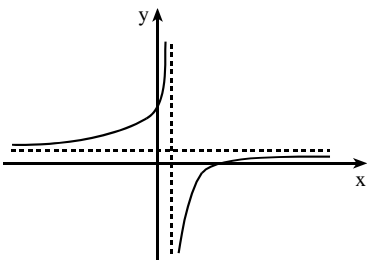


27. (1) לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$$

חותכת את האסימפטוטה האופקית

שלה בנקודה  $(-2; 1)$ .



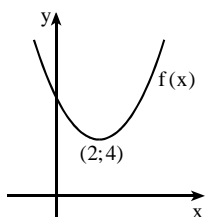
(2) לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$f(x) = \frac{x-5}{x-1}$$

אינה חותכת את האסימפטוטה

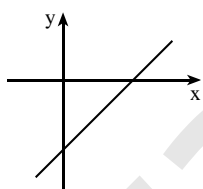
האופקית שלה.

# הקשר בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין הגרף של $\frac{1}{f(x)}$



28. בציור נתונה פונקציה ריבועית  $f(x)$ .  
 לפונקציה יש נקודת מינימום ב-  $(2;4)$   
 והיא חיובית לכל ערך של  $x$ .  
 נסמן:  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ .  
 מצא עבור הפונקציה  $g(x)$ :  
 א. תחום הגדרה. ב. תחומי חיוביות ושליליות.  
 ג. נקודת קיצון. ד. תחומי עלייה וירידה.  
 ה. שרטט את הגרפים של  $f(x)$  ו-  $g(x)$  באותה מערכת צירים.

29. א. נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ .  
 א. מצא עבור  $f(x)$ :  
 (1) נקודת קיצון וקבע את סוגה.  
 (2) נקודות חיתוך עם הצירים.  
 (3) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ב. נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ .  
 היעזר בסעיף א' ומצא עבור פונקציה זו:  
 (1) אסימפטוטות אנכיות. (2) נקודת קיצון.  
 (3) תחומי עלייה וירידה. (4) תחומי חיוביות ושליליות.  
 ג. שרטט את גרף הפונקציה  $g(x)$  באותה מערכת צירים.



30. בציור שלפניך מתוארת פונקציה קווית  $f(x)$ ,  
 החותכת את ציר ה- $x$  בנקודה  $(3;0)$ .  
 נסמן:  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ . מצא עבור  $g(x)$ :  
 א. אסימפטוטה אנכית.  
 ב. תחומי חיוביות ושליליות.  
 ג. הסבר מדוע אין לפונקציה  $g(x)$  נקודות קיצון.  
 ד. הראה שהפונקציה  $g(x)$  יורדת בכל תחום הגדרתה.  
 ה. שרטט במערכת צירים אחת את הגרף של  $f(x)$  ואת הגרף של  $g(x)$ .

31. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$ .  
 מצא עבור הפונקציה  $f(x)$ :  
 א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון.  
 ג. נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ .  
 בהסתמך בין היתר על סעיפים קודמים מצא עבור  $g(x)$ :  
 (1) תחום הגדרה.  
 (2) אסימפטוטות מאונכות לצירים.  
 (3) נקודות קיצון.

32.  $f(x)$  היא פונקציה המוגדרת לכל  $x$ .

הוכח שאם הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $\frac{1}{f(x)}$  נפגשים זה עם זה, אז נקודת המפגש נמצאת על הישר  $y=1$  או על הישר  $y=-1$ .

33. נתונה פונקציה  $f(x)$ , המוגדרת לכל ערך של  $x$ .

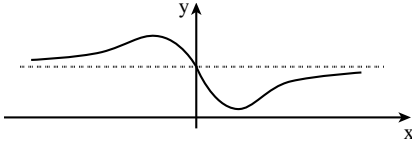
הפונקציה חיובית בכל התחום.

נקודות הקיצון של הפונקציה הן

$$\left(\frac{2}{3}; a\right) \text{ מינימום, } \left(-\frac{2}{3}; b\right) \text{ מקסימום.}$$

לפונקציה אסימפטוטה אופקית

שמשוואתה  $y=1$ , ראה ציור.



$$\text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

א. (1) הסבר מדוע הפונקציה  $g(x)$  מוגדרת לכל  $x$ .

(2) מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ , ומה סוגן?

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $g(x)$ .

(4) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $g(x)$  המאונכות לצירים (אם יש כאלה). נמק את תשובתך.

(5) כמה נקודות מפגש יש בין הגרפים של  $f(x)$  ו- $g(x)$ ? נמק.

ב. הוסף לסרטוט של גרף הפונקציה  $f(x)$

סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

34. א. נתונה פונקציה  $f(x)$ . ידוע כי  $x_1$  היא נקודת מינימום (מקומי)

של הפונקציה  $f(x)$ . כמו כן,  $f'(x_1) = 0$ ,  $f''(x_1) \neq 0$ ,  $f(x_1) \neq 0$ .

$$\text{הפונקציה } g(x) \text{ מקיימת: } g(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

הוכח:  $x_1$  היא נקודת מקסימום (מקומי) של הפונקציה  $g(x)$ .

$$\text{ב. נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}.$$

מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

$$\text{ג. נגדיר: } g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}. \text{ מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה } g(x)$$

וקבע את סוגה. היעזר בסעיפים קודמים.

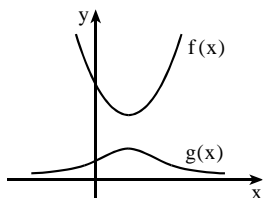
35.  $f(x)$  היא פונקציה גזירה המוגדרת לכל  $x$ , כך ש-  $f(x) \neq 0$  לכל  $x$ .

הוכח שאם הפונקציה  $f(x)$  עולה בקטע מסוים, אז הפונקציה  $\frac{1}{f(x)}$

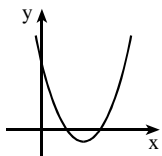
יורדת באותו הקטע; ואם הפונקציה  $f(x)$  יורדת בקטע מסוים,

אז הפונקציה  $\frac{1}{f(x)}$  עולה באותו הקטע.

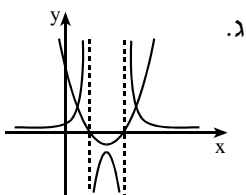
**תשובות:**



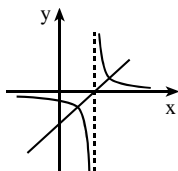
28. א. כל  $x$ .  
 ב. חיוביות: כל  $x$ , שליליות: אף  $x$ .  
 ג.  $(2; \frac{1}{4})$  מקסימום.  
 ד. עלייה:  $x < 2$ , ירידה:  $x > 2$ .



29. א. (1)  $(1.5; -0.25)$  מינימום. (2)  $(0; 2)$ ,  $(2; 0)$ ,  $(1; 0)$ . (3)

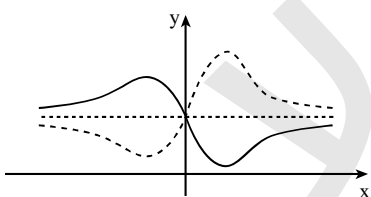


- ב. (1)  $x = 1, x = 2$  מקסימום. (2)  $(1.5; -4)$  מקסימום.  
 ג. (3) עלייה:  $1 < x < 1.5$  או  $x < 1$ .  
 ירידה:  $x > 2$  או  $1.5 < x < 2$ .  
 (4) חיוביות:  $x > 2$  או  $x < 1$ , שליליות:  $1 < x < 2$ .



30. א.  $x = 3$ .  
 ב. חיוביות:  $x > 3$ ; שליליות:  $x < 3$ .

31. א.  $x \neq 3$ . ב.  $(5; 8)$  מינימום,  $(1; 0)$  מקסימום.  
 ג. (1)  $x \neq 1, x \neq 3$ . (2)  $x = 1, y = 0$ . (3)  $(5; \frac{1}{8})$  מקסימום.



33. א. (2)  $(\frac{2}{3}; \frac{1}{a})$  מקסימום,  $(-\frac{2}{3}; \frac{1}{b})$  מינימום. ב.

- (3) עלייה:  $-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$ ;  
 ירידה:  $x < -\frac{2}{3}$  או  $x > \frac{2}{3}$ .  
 (4)  $y = 1$  נקודה אחת.

34. א.  $(0; \frac{1}{2})$  מינימום. ב.  $(0; 2)$  מקסימום. ג.