

# פונקציות טריגונומטריות –

## שאלון 581

קובץ זה כולל שאלות עם פונקציות טריגונומטריות המתאימות לשאלון 581.

רוב השאלות קצרות יחסית ואינן באורך של שאלת בחינת בגרות, אלא מדגישות רעיון מסוים. הדגשנו בעיקר:

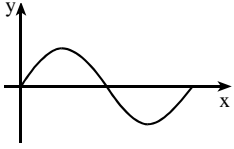
הכרת הפונקציות הטריגונומטריות הבסיסיות והגרפים שלהן, ובהסתמך על כך שרטוט של פונקציות המתקבלות מהזזה, מתיחה או טרנספורמציה אחרת של פונקציות אלה, כולל ההשפעה של הזזות או מתיחות על השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לציר ה-x. פתרון או הוכחה של אי שוויונות טריגונומטריים. אסימפטוטות אנכיות ואופקיות, "חור" בגרף, פתרון באמצעות התבוננות בגרף הפונקציה. משמעות הקבוע c, המשמעות של האינטגרל המסוים. מומלץ לפתור שאלות מהקובץ תוך כדי לימוד הנושא ובעיקר לקראת סיום הנושא.

ברצוננו להודות מקרב לב לעפר ילין על היוזמה, הייעוץ הפדגוגי לשאלות, על בדיקת השאלות, על ההערות וההארות המצוינות ועל תמיכה בלתי מסויגת.

מורה המעוניין להציע תיקונים מוזמן לשלוח מייל לכתובת  
publish@geva.co.il

יואל גבע אריק דז'לדטי

1. א. מצא, ללא שימוש בנגזרת, את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .  
 הדרכה: היעזר בהזזה של גרף הפונקציה  $y = \sin x$ .  
 ב. מצא, ללא שימוש בנגזרת, את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה  $y = \cos\left(x + \frac{1}{2}\right)$  בתחום  $0 \leq x \leq 3$ .  
 הדרכה: היעזר בהזזה של גרף הפונקציה  $y = \cos x$ .



2. בשרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = \sin x$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ . היעזר בשרטוט ומצא:  
 א. את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה  $g(x)$  המקיימת  $g(x) = f(2x)$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .  
 ב. את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה  $y = 2 + \sin 2x$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .

3. נתונה הפונקציה  $f(x) = 1 + \cos 3x$  בתחום  $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ .  
 א. מצא, ללא שימוש בנגזרת, את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  וקבע את סוגן.  
 ב. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון.  
 נתונה הפונקציה  $g(x) = f(x) - 2$ .  
 ג. שרטט את גרף הפונקציה  $g(x)$  בתחום  $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ .

4. מצא, ללא שימוש בנגזרת, את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה  $y = -3\cos\frac{x}{3} + 1$  בתחום  $2\pi \leq x \leq 5\pi$ .

5. א. מצא, ללא שימוש בנגזרת, את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה  $y = \sin^2 x$  בתחום  $-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ .  
 הדרכה: היעזר בגרף הפונקציה  $y = \sin x$ .  
 ב. היעזר בסעיף א' ובזהויות טריגונומטריות ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $y = 2 - \cos^2 x$ .

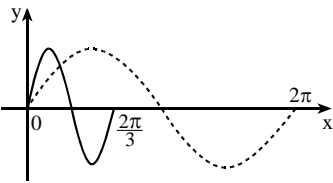
6. מצא, ללא שימוש בנגזרת, את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה  $y = \frac{1}{\cos x}$  בתחום  $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ .  
 הדרכה: היעזר בגרף הפונקציה  $y = \cos x$ .

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = \sin x$ .  
 א. הזיזו את הפונקציה  $f(x)$  ב- $\frac{\pi}{2}$  יחידות שמאלה.  
 יונתן טוען שהגרף שהתקבל מתלכד עם הגרף של  $g(x) = \cos x$ . האם יונתן צודק? נמק.  
 ב. הזיזו את הפונקציה  $g(x)$  ב- $\pi$  יחידות שמאלה.  
 (1) רועי טוען שהגרף שהתקבל מתלכד עם הגרף של  $h(x) = \cos(-x)$ . האם רועי צודק? נמק.  
 (2) אריאל טוען שהגרף שהתקבל מתלכד עם הגרף של  $k(x) = -\cos x$ . האם אריאל צודק? נמק.

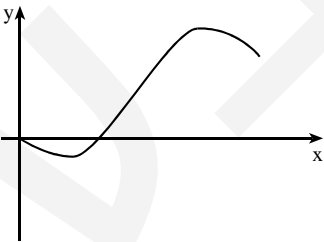
8. לפניך מספר טענות.  
 קבע עבור כל אחת מהן האם היא נכונה או לא נכונה. נמק את תשובתך.  
 א. הגרף של  $f(x) = \sin x$  הוא הזזה של הגרף של  $g(x) = \cos x$  ימינה ב- $\frac{\pi}{2}$ .  
 ב. הגרף של  $h(x) = \sin(x - \pi)$  מתלכד עם הגרף של  $k(x) = \sin(-x)$ .

9. נתונה הפונקציה  $f(x) = \cos 2x$ .  
 א. הוכח כי:  $f(x - \pi) = f(x)$ .  
 ב. ינאי מסתמך על סעיף א' וטוען כי אם נזיז את גרף הפונקציה  $f(x)$   $\pi$  יחידות ימינה, הגרף המתקבל מתלכד עם הגרף של  $f(x)$ . האם ינאי צודק? נמק.  
 ב. אסתי טוענת כי אם נזיז  $\pi$  יחידות שמאלה את גרף הפונקציה  $f(x)$ . הגרף המתקבל מתלכד עם הגרף של  $f(x)$ . האם אסתי צודקת? נמק.

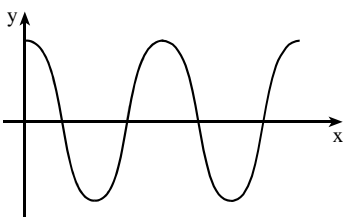
10. נתונה פונקציה  $f(x)$ .  
 יואב הזיז את גרף הפונקציה  $2\pi$  יחידות ימינה.  
 עידו הזיז את גרף הפונקציה  $\pi$  יחידות שמאלה.  
 הם קיבלו גרפים זהים זה לזה. לפניך ארבע פונקציות.  
 (1)  $y = 3\cos x$  (2)  $y = \sin 3x$  (3)  $y = \tan x$  (4)  $y = \cos 6x$   
 קבע אילו מהפונקציות הבאות יכולות להיות  $f(x)$ . נמקו.



11. במערכת הצירים שמשמאל מתוארים  
 גרף הפונקציה  $f(x) = \sin x$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$   
 (הגרף המקוקו) וגרף הפונקציה  $y = \sin kx$   
 בתחום  $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ .  
 א. מצא את הערך של  $k$ .  
 ב. לכל אחת מהפונקציות הנתונות יש שתי נקודות קיצון פנימיות. מחברים את ארבע הנקודות הנ"ל ומקבלים מרובע. חשב את שטח המרובע.



12. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x$ .  
 בציור מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .  
 כמה פתרונות יש למשוואה  $\frac{x}{\sin x} = 2$  בתחום הנתון? נמק.



13. לפניך גרף הפונקציה  $f(x) = \cos ax$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .  
 $a$  הוא פרמטר.  
 א. קבע מהו הערך של הפרמטר  $a$ .  
 ב. הסבר מדוע מתקיים  $f(x) = f(x - \frac{\pi}{2})$ .  
 ג. כמה פתרונות בתחום יש למשוואה  $f^2(x) = f(x)$ .  
 ד. כמה פתרונות בתחום יש למשוואה  $|f(x)| = 0.5$ .

14. נתונה הפונקציה  $f(x) = \sin^3 x + 5\sin x - 7$ .  
 א. הסבר מדוע גרף הפונקציה  $f(x)$  אינו חותך את ציר ה- $x$ .  
 ב. האם גרף הפונקציה  $f(x-2) - 1$  חותך את ציר ה- $x$ ?

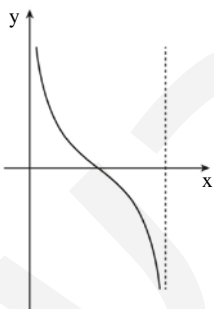
15. א. פתור את אי השוויון  $\sin x > \frac{1}{2}$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .  
 ב. פתור את אי השוויון  $2\cos^2 x - 1 < 0$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .  
 ג. פתור את אי השוויון  $\tan x < 1$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

16. א. נתונה הפונקציה  $f(x) = 2\cos x + 1$ . מצא את תחומי השלילות של הפונקציה בתחום  $\pi \leq x \leq 2\pi$ .  
 ב. נתונה הפונקציה  $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ . מצא את התחום שבו מתקיים  $f(x) > 0$ .

17. א. נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{\sin 2x + \cos x}$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ . מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ב. נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{3 - 2\cos x}$ . הסבר מדוע הפונקציה מוגדרת לכל ערך של  $x$ .

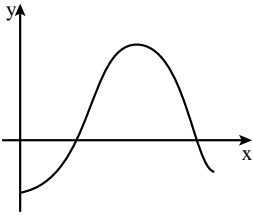
18. א. הוכח את אי השוויון  $-1 \leq \sin^2 x - \cos^2 x \leq 1$ .  
 ב. הוכח את אי השוויון  $-1 \leq \sin^4 x - \cos^4 x \leq 1$ .  
 פתור בשתי דרכים:  
 (1) היעזר בסעיף א' ובנוסחאות הכפל המקוצר.  
 (2) היעזר בתכונות של הפונקציות סינוס וקוסינוס במעגל היחידה.

19. נתונות הפונקציות  $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ ,  $g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ .



- א. הסבר מדוע הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בכל התחום  $0 < x < \pi$ .  
 ב. בשרטוט שמשמאל מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $0 < x < \pi$ .  
 (1) הוכח כי מתקיים:  $g(x) = -f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ .  
 (2) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ .  
 היעזר בנתונים ובסעיף א'. אין חובה לחקור את  $g(x)$ .

20. נתונה הפונקציה  $f(x) = \sin x - \cos x$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .  
 א. מצא את נקודת המינימום המוחלט של הפונקציה בתחום הנתון.  
 ב. נתונה הפונקציה  $g(x) = x^2 - 4x + 8$ , בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ . מצא את נקודת המינימום המוחלט של הפונקציה בתחום הנתון.  
 ג. האם קיים פתרון למשוואה  $x^2 - 4x + 8 = \sin x - \cos x$  בתחום הנתון? נמק.



21. נתונה הפונקציה  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$

המוגדרת לכל  $x$  בתחום  $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$ .

בציור מוצג הגרף של הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון.

מצא את השיעורים של נקודת המקסימום של הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון.

22. נתונה הפונקציה  $f(x) = \sin x + 2\cos x + 4x - 2\pi - 1$

א. הראה שהפונקציה נפגשת עם ציר ה- $x$  כאשר  $x = \frac{\pi}{2}$ .

ב. הראה שהפונקציה עולה לכל ערך של  $x$ .

ג. מצא לאילו ערכי  $x$  הפונקציה  $f(x)$  חיובית.

23. נתונה הפונקציה  $f(x) = kx + \cos x$  בתחום  $0 < x < \pi$

מצא באיזה תחום נמצא הפרמטר  $k$ , כך שלפונקציה  $f(x)$ :

(1) אין נקודות קיצון.

(2) יש נקודת קיצון אחת.

(3) יש שתי נקודות קיצון.

24. נתונה הפונקציה  $f(x) = \cos x + \frac{a}{\cos x} - 2$ ,  $|a| > 1$

גרף הפונקציה משיק לציר ה- $x$ . מצא את הערך של  $a$ .

25. נתונה הפונקציה  $f(x) = x + 2\cos x + k$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $k$  הוא פרמטר.

מצא לאילו ערכים של  $k$ , גרף הפונקציה נמצא כולו מעל ציר ה- $x$ .

26. נתונה הפונקציה  $f(x) = \cos 2x + m \cdot \cos^2 x$

א. מצא את הערך של  $m$  שעבורו הפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה קבועה.

ב. מהי משוואת הפונקציה הקבועה?

27. נתונה הפונקציה  $f(x) = x \cos x$

א. הראה ששיעורי ה- $x$  שעבורם  $f'(x) = 0$

מקיימים  $\tan x = \frac{1}{x}$ .

ב. בציור מתואר גרף הפונקציה  $g(x) = \tan x$

בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

(1) מהן האסימפטוטות המקבילות לציר ה- $y$

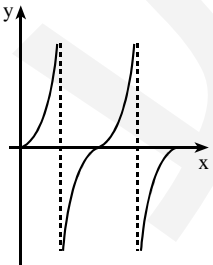
המופיעות בציור?

(2) קבע כמה נקודות בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$  מקיימות  $f'(x) = 0$ .

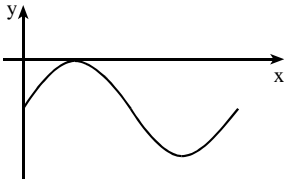
28. נתונה הפונקציה  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ ?

ב. מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה  $f(x)$ .



29. נתונה הפונקציה  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$  בתחום  $x > 0$ .
- א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ . רשום את הפתרון בצורה כללית.
- ב. נסתכל על נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ . לפניך 3 טענות. אחת מהן נכונה. איזו מהן היא הנכונה? נמק.
- (1) ככל שמתקרבים ל- $x = 0$ , המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וקטן.
- (2) המרחק בין כל שתי נקודות חיתוך סמוכות נשאר קבוע.
- (3) ככל שמתקרבים ל- $x = 0$ , המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וגדל.



30. לפניך גרף הפונקציה  $f(x) = \sin x - 1$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .
- א. הסבר מדוע הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$  בתחום הנתון.

- ב. נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{(\sin x - 1)\cos x}{\cos x}$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .
- עבור התחום הנתון:
- (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ .
- (2) בעבור אילו ערכים של  $x$  מתקיים  $f(x) = g(x)$ ?
- (3) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

31. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .
- א. מצא בתחום הנתון: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות אנכיות.
- ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון.

- ג. נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .
- עבור התחום הנתון:
- (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ .
- (2) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

32. נתונה הפונקציה  $y = 2x + \frac{1}{\tan x}$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .
- מצא בתחום הנתון:
- א. את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה.

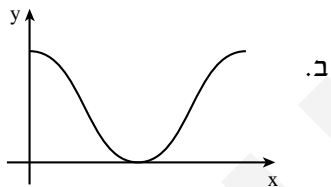
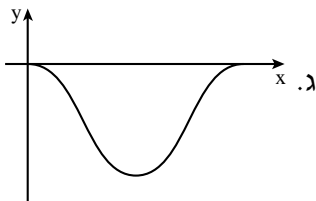
**תשובות:**

1. א.  $(\frac{2\pi}{3}; 1)$  מקסימום. ב.  $(\pi - \frac{1}{2}; -1)$  מינימום.

2. א.  $(\frac{\pi}{4}; 1)$  מקסימום,  $(\frac{3\pi}{4}; -1)$  מינימום.

ב.  $(\frac{\pi}{4}; 3)$  מקסימום,  $(\frac{3\pi}{4}; 1)$  מינימום.

3. א.  $(\frac{2\pi}{3}; 2)$  מקסימום,  $(\frac{\pi}{3}; 0)$  מינימום,  $(0; 2)$  מקסימום.

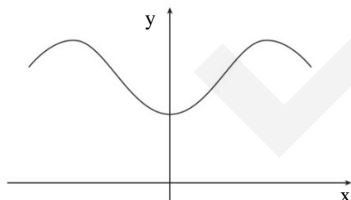


4.  $(3\pi; 4)$  מקסימום.

5. א.  $(0; 0)$  מינימום, ב.

$(\frac{\pi}{2}; 1)$  מקסימום,

$(-\frac{\pi}{2}; 1)$  מקסימום.



6.  $(0; 1)$  מינימום.

7. א. כן. ב. (1) לא. (2) כן.

8. א. נכונה. ב. נכונה.

9. ב. כן. ג. כן. 10. (3) ו- (4).

11. א.  $k=3$ . ב.  $\frac{4\pi}{3}$ . 12. א. פתרון אחד.

13. א.  $a=4$ . ג. 7 פתרונות. ד. 8 פתרונות. 14. ב. לא.

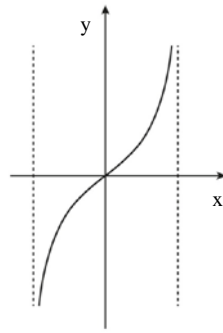
15. א.  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ . ב.  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ .

ג.  $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$  או  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{4}$  או  $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$ .

16. א.  $\pi \leq x < \frac{4\pi}{3}$ . ב.  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  או  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ .

17.  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  או  $\frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$  או  $\frac{11\pi}{6} \leq x \leq 2\pi$ .

19. ב. (2).



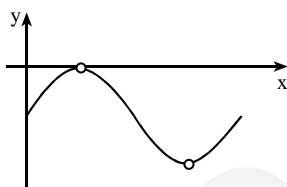
20. א.  $(\frac{3}{4}\pi; \sqrt{2})$  . ב.  $(2; 4)$  . ג. לא . 21.  $(3; 2)$  .

22. ג.  $x > \frac{\pi}{2}$  . 23. (1)  $k \geq 1$  או  $k \leq 0$  . (2)  $k$  אף  $k$  . (3)  $0 < k < 1$  .

24.  $a = -3$  . 25.  $k > -0.886$  . 26.  $m = -2$  . ב.  $y = -1$  .

27. ב. (1)  $x = \frac{\pi}{2}$  ,  $x = \frac{3\pi}{2}$  . (2) שתי נקודות . 28. א.  $x \neq 0$  . ב.  $y = 0$  .

29. א.  $(\frac{1}{k}; 0)$  ,  $k$  מספר טבעי . ב. טענה (1).



30. ב. (1)  $0 \leq x \leq 2\pi$  ,  $x \neq \frac{\pi}{2}$  ,  $x \neq \frac{3\pi}{2}$  . ד.

(2)  $0 \leq x \leq 2\pi$  ,  $x \neq \frac{\pi}{2}$  ,  $x \neq \frac{3\pi}{2}$  .

31. א. (1)  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  ,  $x \neq \frac{\pi}{4}$  .

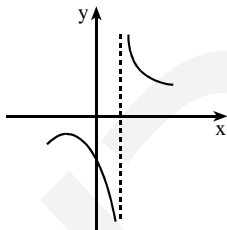
(2) מינימום,  $(-\frac{\pi}{2}; -1)$  , מקסימום,  $(-\frac{\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$  .

(3)  $(\frac{\pi}{2}; 1)$  מינימום.

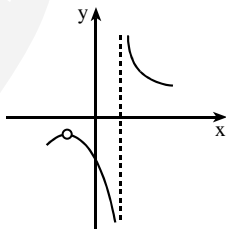
(4) עלייה:  $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4}$  ;

ירידה:  $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$  או  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$  .

(5)  $x = \frac{\pi}{4}$  . (0; -1) .



ג. (1)  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  ,  $x \neq \frac{\pi}{4}$  ,  $x \neq -\frac{\pi}{4}$  . (2)



32. א.  $0 < x < \pi$  ,  $x \neq \frac{\pi}{2}$  . ב.  $x = 0$  ,  $x = \pi$  .



# אינטגרלים של פונקציות טריגונומטריות

1. עידו מצא את הפונקציה הקדומה  $F(x) = \int -4 \sin x \cdot \cos x dx$  בשתי דרכים: דרך א - עידו השתמש בזהות  $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$ . הוא קיבל:

$$F(x) = \int -4 \sin x \cdot \cos x dx = \int -2 \sin 2x dx = -2 \cdot \frac{-\cos 2x}{2} + c = \cos 2x + c$$

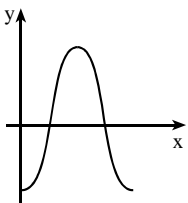
דרך ב - עידו זיהה את הפונקציה  $\sin x$  ואת הנגזרת שלה  $\cos x$

ונעזר באינטגרל על פי זיהוי הנגזרת הפנימית:  $\int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{(f(x))^2}{2} + c$

$$F(x) = \int -4 \sin x \cdot \cos x dx = -4 \cdot \frac{\sin^2 x}{2} + c = -2 \sin^2 x + c$$

עידו בדק וראה כי  $\cos 2x$  שונה מ-  $-2 \sin^2 x$ .

כיצד אפשר להסביר את התוצאות השונות?



2. לפניך גרף הפונקציה  $f(x) = k \cos x$

בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,  $k$  הוא פרמטר.

א. קבע מהו תחום הערכים האפשריים עבור הפרמטר  $k$ . נמק.

ב. מהו תחום הערכים שהפונקציה  $f(x)$  יכולה לקבל? הבע תשובתך באמצעות  $k$ .

ג. קבע ללא חישובים את הערך של האינטגרל  $\int_0^{2\pi} f(x) dx$

3. בציור מוצגים בתחום  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  הגרפים של הפונקציה

העולה  $f(x)$  ושל הפונקציה היורדת  $g(x)$ .

נקודת החיתוך היחידה של שני הגרפים

בתחום הנתון היא  $(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2})$ , ראה ציור.

השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, על ידי ציר ה- $y$  ועל ידי הישר  $x = \frac{\pi}{2}$

(השטח האפור בציור) הוא  $2\sqrt{2} - 2$ .

נתון גם:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) - g(x)] dx = 0$

מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה- $y$  (השטח השמאלי המסומן בציור).

4. א. חשב את האינטגרל המסוים  $\int_0^{\pi} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$ .

ב. היעזר בסעיף א' והסבר מדוע  $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$ .

ג. חשב את האינטגרל המסוים  $\int_0^{\pi} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx$ .

ד. היעזר בסעיפים קודמים וחשב את האינטגרלים המסוימים הבאים:

$$(1) \int_0^{\pi} (\cos^2 x) dx \quad (2) \int_0^{\pi} (\sin^2 x) dx$$

5. מצא את האינטגרלים הבאים.  
יש להיעזר, בין היתר, בזהויות טריגונומטריות.

א.  $\int \cos^2 x dx$       ב.  $\int \sin^3 x dx$       ג.  $\int (\tan^2 x + 1) dx$

6. יואב מצא את הפונקציה הקדומה  $F(x) = \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$  בשתי דרכים.

דרך א - יואב זיהה את הפונקציה  $\tan x$  ואת הנגזרת שלה  $\frac{1}{\cos^2 x}$

ונעזר באינטגרל על פי זיהוי הנגזרת הפנימית:  $\int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{(f(x))^2}{2} + c$

הוא קיבל:  $F(x) = \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \cdot (\tan x)' dx = \frac{\tan^2 x}{2} + c$

דרך ב - יואב השתמש בזהות  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  ואחר כך נעזר באינטגרל

על פי זיהוי הנגזרת הפנימית:  $\int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{(f(x))^2}{2} + c$

הוא קיבל:  $F(x) = \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int (\cos x)^{-3} \cdot \sin x dx$

$F(x) = -\int (\cos x)^{-3} \cdot (-\sin x) dx = -\frac{(\cos x)^{-2}}{-2} = \frac{1}{2 \cos^2 x} + c$

יואב בדק וראה כי  $\frac{\tan^2 x}{2}$  שונה מ-  $\frac{1}{2 \cos^2 x}$ .

כיצד אפשר להסביר את התוצאות השונות?

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = \sin^3 x$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

חשב את השטח המוגבל בתחום הנתון על ידי גרף הנגזרת  $f'(x)$  ועל ידי ציר ה- $x$ .

8. נתונות שתי פונקציות:  $f(x) = 4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \sin(4x)$ .

א. הראה כי  $g'(x) = f(x)$ .

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$

ועל ידי ציר ה- $x$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .

9. נתונה הפונקציה  $f(x) = x - \tan x$ .

א. הוכח כי  $f'(x) = -\tan^2 x$ .

ב. מצא את האינטגרל  $\int (\sin^2 x + \cos^2 x + \tan^2 x) dx$ .

**תשובות:** 1. קבוע האינטגרציה  $c$  שונה בשתי ההצגות,  $c_2 = c_1 + 1$ .

2. א.  $k < 0$ . ב.  $k \leq f(x) \leq -k$ . ג. 0. ד.  $\sqrt{2} - 1$ .

4. א. 0. ג.  $\pi$ . ד. (1)  $\frac{1}{2}\pi$ . (2)  $\frac{1}{2}\pi$ .

5. א.  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$ . ב.  $-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c$ . ג.  $\tan x + c$ .

6. קבוע האינטגרציה  $c$  שונה בשתי ההצגות,  $c_2 = c_1 + \frac{1}{2}$ .

7. 4. 8. ב.  $\frac{\pi}{2}$ . 9. ב.  $\tan x + c$ .