

הקשר בין גרף של פונקציה לגרף הנגזרת שלה – שאלון 581

בקובץ זה שאלות הכוללות את הקשר בין גרף של פונקציה לגרף הנגזרת שלה .

השאלות כוללות פונקציות פולינום, פונקציות רציונליות ובעיקר פונקציות ללא תבנית אלגברית.

רוב השאלות קצרות יחסית ואינן ארוכות כשאלות בחינה, אלא מדגישות רעיון מסוים.

הדגשנו בעיקר : מעבר מגרף של פונקציה לגרף של הנגזרת הראשונה והשנייה שלה, ולהיפך.

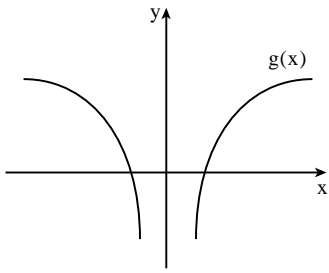
זיהוי ואבחנה בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת הראשונה והשנייה. תכונות מיוחדות של גרף הנגזרת כאשר הפונקציה היא פונקציה זוגית או פונקציה אי-זוגית.

שאלות הכוללות גרף של נגזרת ומשלבות הזזות, מתיחות וטרנספורמציות של פונקציות.

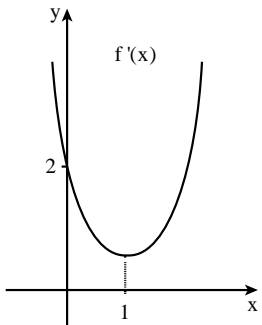
ברצוננו להודות מקרב לב לעפר ילין על היוזמה, הייעוץ הפדגוגי לשאלות, על בדיקת השאלות, על ההערות וההארות המצוינות ועל תמיכה בלתי מסויגת.

מורה המעוניין להציע תיקונים מוזמן לשלוח מייל לכתובת
arikdej@gmail.com

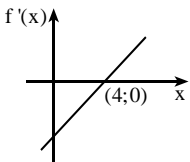
יואל גבע אריק דז'לדטי



1. בשרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה $g(x)$.
 הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$ מוגדרת לכל x השונה מ-0, ואין להן נקודות קיצון או נקודות פיתול. הישר $x=0$ הוא האסימפטוטה האנכית לכל אחד מן הגרפים של הפונקציות האלה.
 א. שרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$. נמק את שיקולך.
 ב. שרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת השנייה $g''(x)$. נמק את שיקולך.
 ג. נתון כי $g(x)$ היא פונקציה זוגית. הוכח כי $g''(x)$ היא פונקציה זוגית. נמק את שיקולך.

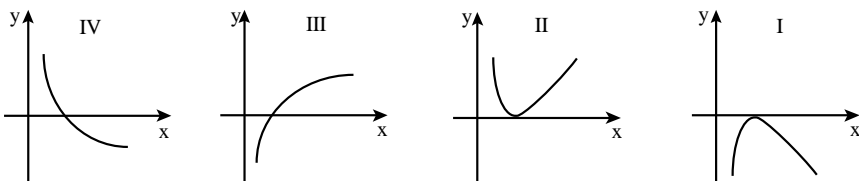


2. נתונה פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x .
 בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, המוגדרת לכל x .
 א. על פי הגרף של $f'(x)$:
 (1) מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה $f(x)$.
 ב. נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בחלקו החיובי. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ג. נתון כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא $f'(x) = x^2 - kx + m$. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f'(x)$.



3. נתונה פונקציה $f(x)$. לפניך הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נתון כי $f'(x)$ היא פונקציה קווית וכי יש פתרון אחד בלבד למשוואה $f'(x) = 2$.
 א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוג הקיצון.
 ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x) = 1 - f(x+1)$ וקבע את סוג הקיצון.
 ג. מהם תחומי השליליות של הפונקציה $h(x)$ המקיימת $h(x) = f'(x-2)$?

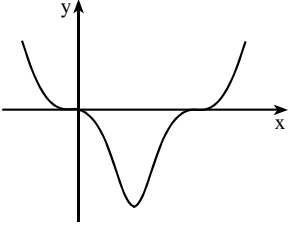
4. נתונה הפונקציה $f(x)$, המוגדרת כאשר $x > 0$. לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד. נקודת הקיצון היא מסוג מקסימום.
 א. איזה מבין הגרפים I, II, III, IV שלפניך לגרף פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$? נמק.



- ב. נתון כי שיפוע המשיק בנקודת הפיתול של $f(x)$ שווה ל-0. שרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם ישנם).

5. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 + \frac{27}{x} + 60$.

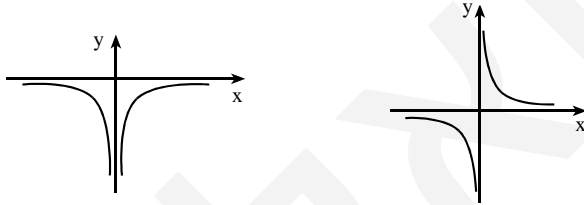
מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה $2 \cdot f'(x)$, והראה כי נקודה זו נמצאת על גרף הפונקציה $f(x^2)$.



6. לפניך גרף הפונקציה $f(x) = (x^2 - cx)^3$.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ מקבלת את כל הערכים $y \geq -729$ ורק אותם.
 א. מצא את ערך הפרמטר c .
 ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x+2)$ עם ציר ה- x .
 ג. באיזה תחום מתקיים $f(x+2) \cdot f'(x+2) > 0$?

7. לפניך גרפים של הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$, המוגדרות עבור $x \neq 0$.



א. קבע עבור כל אחת מהטענות הבאות האם היא נכונה:

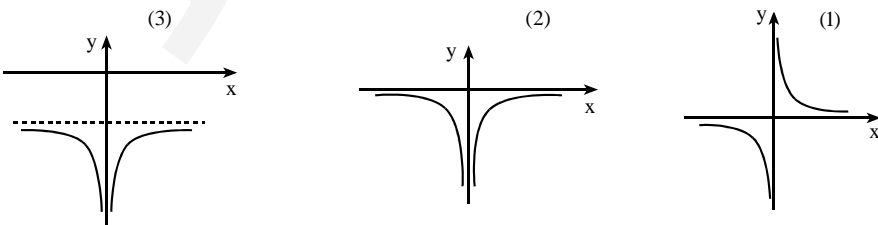
- (1) הגרף הימני יכול להתאים ל- $f(x)$ והשמאלי ל- $f'(x)$.
 (2) הגרף השמאלי יכול להתאים ל- $f(x)$ והימני ל- $f'(x)$.

ב. נתון כי משוואת הפונקציה $f(x)$ היא $f(x) = \frac{a}{x}$, a הוא פרמטר.

- (1) איזה מבין שני הגרפים מתאים ל- $f(x)$?
 (2) מהו תחום הערכים המתאים לפרמטר a ?

8. לפניך גרפים של פונקציה רציונלית $f(x)$,

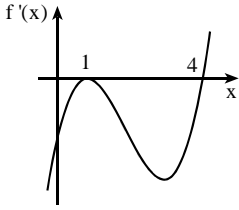
של נגזרתה $f'(x)$ ושל נגזרתה השנייה $f''(x)$. הישר $y=0$ הוא אסימפטוטה אופקית לגרפים (1) ו-(2). האסימפטוטה האופקית לגרף (3) היא הישר המקווקו, המקביל לציר ה- x ונמצא מתחתיו.



א. מבין שלושת הגרפים הבאים, זהה איזה גרף מתאים לכל פונקציה.
 ב. נתון כי משוואת הפונקציה $f(x)$ היא $f(x) = \frac{a}{x^2} + k$, a ו- k פרמטרים.

- (1) מהו תחום הערכים המתאים לפרמטר a ?
 (2) מהו תחום הערכים המתאים לפרמטר k ?

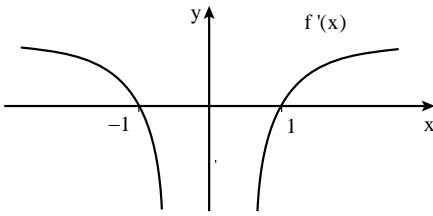
9. ביצור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ בתחום $-1 < x < 5$.



- א. לפניך שלוש טענות. אחת מהן נכונה.
 בחר מביניהן את הטענה הנכונה:
 (1) לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת ונקודת פיתול אחת.
 (2) לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת ושתי נקודות פיתול.
 (3) לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון ונקודת פיתול אחת.

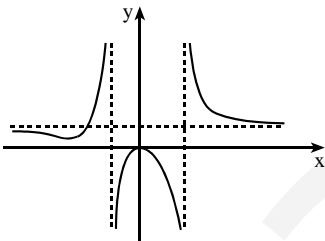
- משוואת הפונקציה $f(x)$ היא $f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 + cx$.
 ב. מצא את ערכי הפרמטרים a, b, c .
 ג. מצא את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ יורדת וקעורה כלפי מטה.

10. ביצור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ האסימפטוטית היחידה



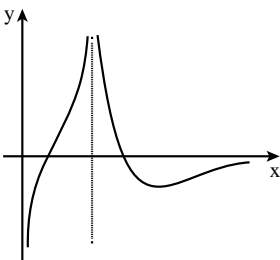
- של הפונקציה $f(x)$ היא $x = 0$. נתון כי יש פתרון אחד בלבד למשוואה $f(x) = 4$ ופתרון אחד בלבד למשוואה $f(x) = -4$.
 א. שרטט סקיצה של הפונקציה $f(x)$.
 ב. כמה פתרונות יש למשוואה $|f(x)| = 6$?

11. לפניך גרף של פונקציה רציונלית $f(x)$.



- משוואות האסימפטוטות של הפונקציה הן $x = 2$, $x = -1$, $y = 1$. נקודות הקיצון של הפונקציה הן $(0; 0)$ מקסימום, $(-4; \frac{8}{9})$ מינימום.
 לפונקציה יש נקודת פיתול אחת בלבד.
 א. על פי הגרף של הפונקציה $f(x)$, מצא את התחום שבו מתקיים: פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חיובית ופונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית. נמק.

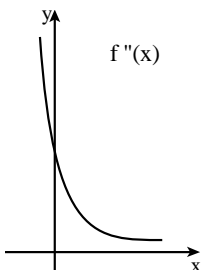
- ב. הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של פונקציה $g(x)$, כלומר $g'(x) = f(x)$. תחום ההגדרה של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ זהה:
 (1) האם לפונקציה $g(x)$ יש נקודות קיצון?
 (2) מצא תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה $g(x)$.



12. נתונה פונקציה $f(x)$, המוגדרת בתחום $x > 0$. לפניך גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המוגדרת אף היא בתחום $x > 0$. האסימפטוטות האנכיות של $f'(x)$ הן $x = 0$ ו- $x = 3$, ראה ציור. ידוע כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש גם אסימפטוטה אופקית, $y = 0$. נקודות החיתוך של $f'(x)$ עם הצירים הן $(1; 0)$ ו- $(5; 0)$.

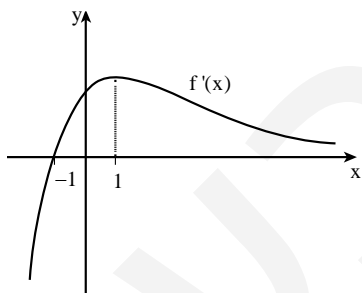
- א. האם ישנן נקודות על הגרף של $f(x)$ שבהן שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ הוא 0.25? אם כן, כמה נקודות כאלה קיימות?
 ב. היעזר בציור ורשום את התחומים שבהם הפונקציה $f(x)$ עולה, ואת התחומים שבהם היא יורדת.
 ג. הישר $y = -4$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x > 3$.
 (1) מצא את השיעורים של נקודת ההשקה. נמק.
 (2) הסבר מדוע $f(10) < -4$.

13. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{k}{(x+1)^4}$ בתחום $x > -1$.



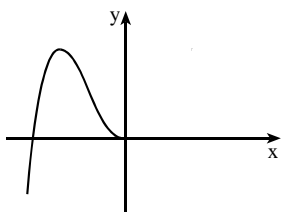
- k הוא פרמטר.
 בציור שלפניך נתון הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ בתחום $x > -1$.
 הגרף של $f''(x)$ אינו חותך את ציר ה- x .
 $f''(x)$ יורדת בכל התחום.
 א. האם הפרמטר k הוא חיובי או שלילי?
 ב. (1) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 הבע באמצעות k במידת הצורך.
 (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה) בתחום הנתון.
 (3) האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות פיתול? נמק.
 (4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ג. האם לפונקציית הנגזרת הראשונה $f'(x)$ יש נקודות פיתול בתחום הנתון? נמק.

14. נתונה פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל ערך של x .
 בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



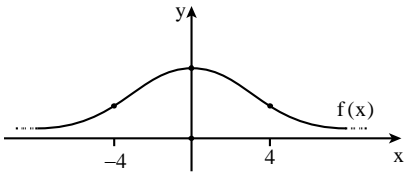
- א. היעזר בנתונים הרשומים בגרף, ומצא:
 (1) ערך מספרי עבור שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.
 (2) ערך מספרי עבור שיעור ה- x של נקודת הפיתול של הפונקציה $f(x)$.
 (3) את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה $f(x)$.
 ב. נתון: $f(0) < 0$.
 שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע שהישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $f(x)$ רק כאשר $x \rightarrow \infty$.

15. א. קבע האם הטענה הבאה נכונה: אם פונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית, אז פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא פונקציה זוגית.



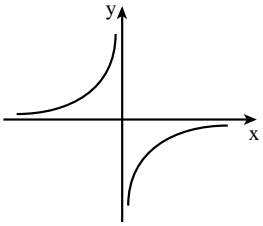
- ב. נתונה פונקציה אי-זוגית $f(x)$.
 בשרטוט שמשמאל מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ בתחום $x \leq 0$.
 (1) השלם את הגרף גם עבור $x > 0$.
 (2) הסבר מדוע הפונקציה $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

16. א. קבע האם הטענה הבאה נכונה: אם פונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית, אז פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.



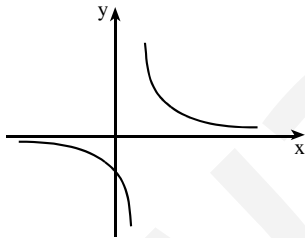
- ב. לפניך גרף של פונקציה זוגית $f(x)$.
 על הגרף מסומנות נקודות הפיתול של הפונקציה.
 (1) שרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
 (2) נתונה הפונקציה $h(x) = f'(x) \cdot f''(x)$. מהו התחום שבו הפונקציה $h(x)$ חיובית?

17. בצויר שמשמאל מתואר גרף של פונקציה אי-זוגית $f(x)$.
 א. הסבר מדוע פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא פונקציה זוגית.

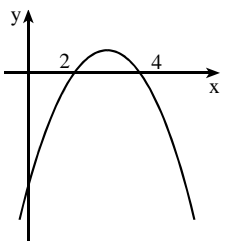


- ב. העבירו ישר l_1 המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $(-1; 2)$, והעבירו ישר אחר l_2 המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה אחרת, T . שני המשיקים מקבילים זה לזה. (היא הנקודה היחידה על גרף הפונקציה $f(x)$ שבה המשיק מקביל ל- l_1). מצא את השיעורים של הנקודה T . נמק.

18. נתונה פונקציה רציונלית אי-זוגית $f(x)$, המוגדרת עבור $x \neq 0$. הגרף של $f(x)$ הוזה ב- a יחידות ימינה כך שהתקבלה הפונקציה $g(x)$.

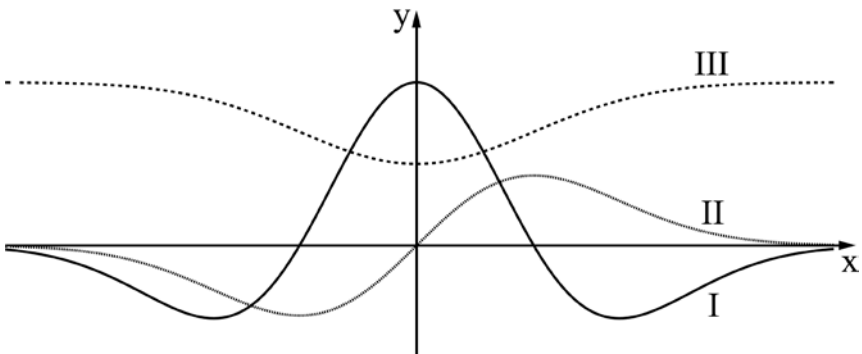


- לפניך סקיצה של הפונקציה $g(x)$.
 א. הבע באמצעות a את משוואת האסימפטוטה האנכית של הפונקציה $g(x)$.
 ב. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=3$, והעבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=0$. המשיקים מקבילים זה לזה. מצא את הערך של a .



19. נתונה הפונקציה $f(x) = kx^3 + 18x^2 + mx + 1$.
 בשרטוט שלפניך מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.
 א. מצא את ערכי הפרמטרים k ו- m .
 ב. נגדיר פונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = f'(x+3)$.
 (1) הוכח שהפונקציה $g(x)$ היא פונקציה זוגית.
 (2) הוכח שהפונקציה $g'(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

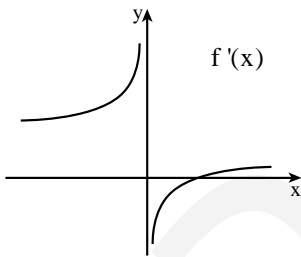
לפניך שרטוט המתאר את הגרפים של הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, המוגדרות לכל x .
 הגרף III נמצא כולו מעל הגרף II.



א. התאם כל אחד מן הגרפים I, II, III לפונקציות $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$.
 נמק את קביעתך.

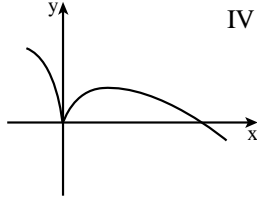
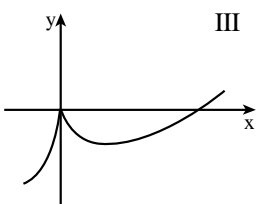
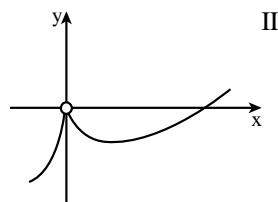
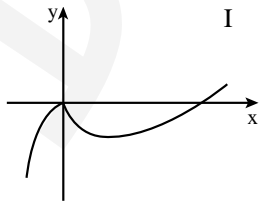
ב. נתון כי גרף II מייצג פונקציה אי-זוגית. האם הנגזרת השלישית $f'''(x)$ היא פונקציה זוגית, פונקציה אי-זוגית, או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמק את שיקולך.

נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x .

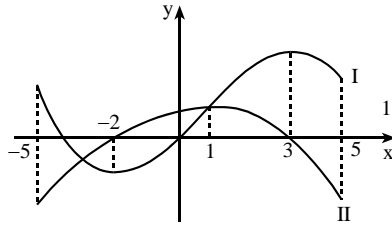


בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, המוגדרת עבור $x \neq 0$.

לפניך ארבעה גרפים I-IV. איזה גרף עשוי לתאר את הפונקציה $f(x)$? נמק.

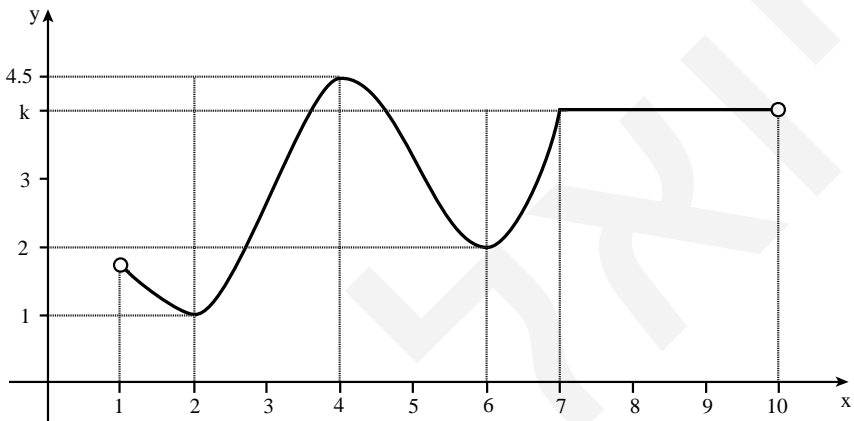


22. בציור שלפניך מתוארים, הגרפים I ו-II בתחום $-5 \leq x \leq 5$.
 אחד הגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$ והאחר של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

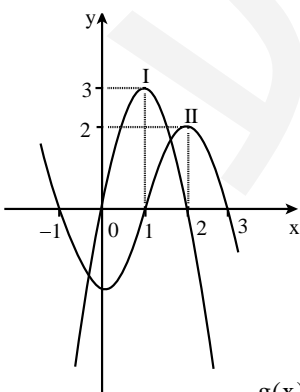


- א. איזה מהגרפים הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$? נמק.
 ב. מהו שיעור ה- x של הנקודה שבה שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ הוא מקסימלי?

23. בציור שלפניך מוצג גרף של הפונקציה $f(x)$ בתחום $1 < x < 10$.



- הסתמך על הגרף של $f(x)$ ועל הערכים הרשומים על הצירים, וענה על הסעיפים הבאים:
 א. מצא עבור אילו ערכים של x השונים מ-7 מתקיים:
 (1) $f'(x) < 0$. נמק. (2) $f'(x) > 0$. נמק. (3) $f'(x) = 0$. נמק.
 ב. לפונקציה $f(x)$ יש נקודות פיתול כאשר $x = 3$ ו- $x = 5$.
 מצא את התחום שבו מתקיים $f'(x) \cdot f''(x) > 0$.



24. בציור שלפניך מוצגים שני גרפים I ו-II, של פונקציות המוגדרות בתחום $-1.1 \leq x \leq 3.1$.
 אחד הגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$ והאחר הוא של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
 א. קבע איזה מבין הגרפים I ו-II הוא של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

- (1) מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון הפנימיות של $g(x)$, וקבע את סוגן.

- (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $h(x) = -\frac{1}{f(x)}$

- מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון הפנימיות של $h(x)$, וקבע את סוגן.

25. בטבלה שלפניך מוצגים ערכים מסוימים של הפונקציה $f(x)$ בקטע $1 < x < 2$.

x	1.1	1.2	1.3	1.4
f(x)	1.19	1.3	1.42	1.55

הפונקציה $f(x)$ חיובית בקטע הנתון, ואין לה נקודות קיצון פנימיות בקטע זה. נתון כי פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית בקטע הנתון.

- א. קבע מהו הסימן של $f'(1.2)$. נמק.
 ב. קבע אם הטענה $f'(1.3) < f'(1.2) < f'(1.1)$ נכונה. נמק.

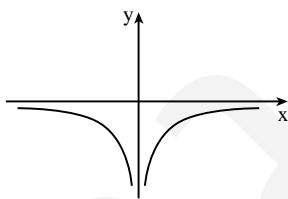
ג. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ בקטע $1 < x < 2$.

בקטע הנתון מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

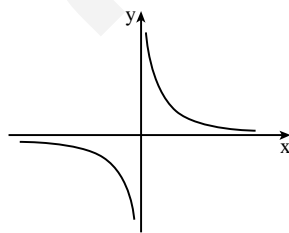
ד. נתונה הפונקציה $h(x) = \frac{k}{f(x)}$ בקטע $1 < x < 2$.

מצא מהו התחום של הפרמטר k אם נתון שהפונקציה $h(x)$ יורדת בכל התחום.

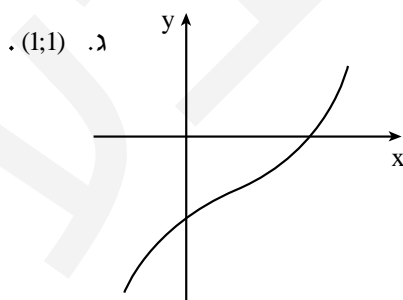
תשובות:



ב.



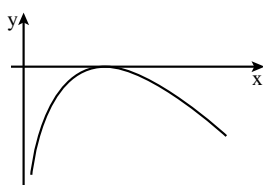
א. 1.



ג. (1;1).

2. א. (1) עלייה: כל x ; ב. ירידה: אין.
 (2) $x > 1$: \cup ; $x < 1$: \cap .

3. א. (4;2) מינימום. ב. (3;-1) מקסימום. ג. $x < 6$.



4. א. גרף IV. ב. עלייה: אין. ג. ירידה: $x > 0$.

5. (3; -18) מקסימום.

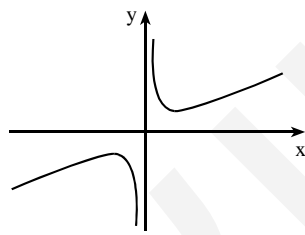
6. א. $c=6$. ב. $(-2; 0)$, $(4; 0)$. ג. $-2 < x < 1$ או $x > 4$.

7. א. (1) נכונה. (2) נכונה. ב. (1) הגרף הימני. (2) $a > 0$.

8. א. $f(x)$ - (3), $f'(x)$ - (1), $f''(x)$ - (2). ב. (1) $a < 0$. (2) $k < 0$.

9. א. טענה (2). ב. $a=8$, $b=18$, $c=-16$. ג. $1 < x < 3$.

ב. ארבעה.



10. א.

11. א. $-4 < x < -1$. ב. (1) לא. (2) $-1 < x < 0$ או $-4 < x < -1$;

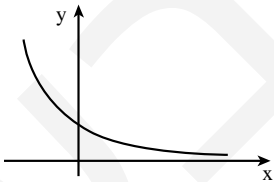
$x > 2$ או $0 < x < 2$ או $x < -4$.

12. א. כן, שתי נקודות.

ב. עולה: $3 < x < 5$ או $1 < x < 3$; יורדת: $x > 5$ או $0 < x < 1$.

ג. (1) $(5; -4)$.

(4)



13. א. חיובי. ב. (1) $(0; k)$.

(2) עלייה: אין; ירידה: $x > -1$.

(3) לא.

ג. לא.

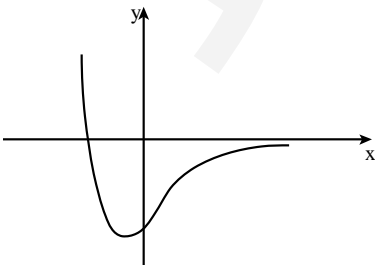
ב.

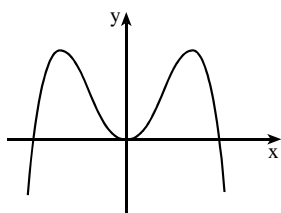
14. א. (1) $x = -1$, מינימום.

(2) $x = 1$.

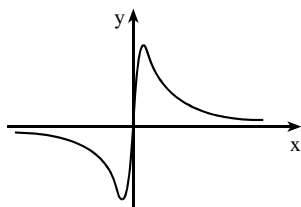
(3) $x < 1$;

$x > 1$;





15. א. הטענה נכונה. ב. (1)



16. א. הטענה נכונה. ב. (1)

ב. (2) $0 < x < 4$ או $x < -4$.

17. ב. $(-2;1)$.

18. א. $x=a$, ב. $a=1.5$.

19. א. $m=-48$, $k=-2$.

20. א. III - $f(x)$, II - $f'(x)$, I - $f''(x)$. ב. אי-זוגית.

21. גרף III.

22. א. גרף I. ב. $x=1$.

23. א. (1) $4 < x < 6$ או $1 < x < 2$. (2) $6 < x < 7$ או $2 < x < 4$.

(3) $7 < x < 10$ או $x=6$ או $x=4$ או $x=2$.

ב. $6 < x < 7$ או $4 < x < 5$ או $2 < x < 3$.

24. א. גרף II הוא של $f(x)$.

ב. (1) $x=0$ מקסימום, $x=2$ מינימום,

(2) עלייה: $3 < x < 3.1$ או $2 < x < 3$ או $-1 < x < 0$ או $-1.1 < x < -1$;

ירידה: $1 < x < 2$ או $0 < x < 1$.

ג. $x=0$ מינימום, $x=2$ מקסימום.

25. א. הסימן הוא חיובי. ב. הטענה אינה נכונה.

ג. עלייה: אין; ירידה: $1 < x < 2$.

ד. $k > 0$.