

שאלון 35572 מועד חורף נבצרים תשפ"א

מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי
התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:

שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35572 מועד
חורף נבצרים תשפ"א.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. (1) הנקודה $A(x_1, y_1)$ נמצאת על הפרבולה $y^2 = 36x$ ולכן שיעוריה $A(\frac{y_1^2}{36}, y_1)$.

בצורה דומה, שיעורי הנקודה $B(x_2, y_2)$ שעל הפרבולה הם $B(\frac{y_2^2}{36}, y_2)$.

נחשב את שיפוע המיתר AB :

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2}{36} - \frac{y_1^2}{36}} = \frac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2 - y_1^2}{36}} = \frac{36(y_2 - y_1)}{(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)} = \frac{36}{y_2 + y_1}$$

תשובה: הוכח.

(2) הנקודה $(x, 7.5)$ היא אמצע המיתר AB, לכן על פי נוסחת אמצע קטע $7.5 = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow y_1 + y_2 = 15$.

$$m_{AB} = \frac{36}{y_2 + y_1} = \frac{36}{15} = 2.4$$

תשובה: $m_{AB} = 2.4$.

ב. (1) נתון כי מרחק של כל נקודה על הפרבולה $y^2 = 36x$ מן הישר $x = a$ שווה למרחק מהנקודה $(9, 0)$.

הפרמטר של הפרבולה $y^2 = 36x$ הוא 18 ולכן המוקד שלה הוא $F(9, 0)$ ומשוואת המדריך $x = -9$.

מרחק נקודה שעל הפרבולה מהמוקד שווה למרחק מהמדריך, לכן $a = -9$.

תשובה: $a = -9$.

(2) מרחק הנקודה $A(\frac{y_1^2}{4}, y_1)$ שברביע הראשון, מהישר $x = -6.75 \rightarrow x = 0.75a = 0.75 \cdot (-9)$ הוא 7.

$$\frac{y_1^2}{36} - (-6.75) = 7 \rightarrow y_1^2 = 9 \rightarrow y_1 = 3 \rightarrow \boxed{A(0.25, 3)}$$

נמצא את משוואת המיתר AB שעובר בנקודה $A(0.25, 3)$ ושיפועו $m_{AB} = 2.4$.

$$y - 3 = 2.4(x - 0.25)$$

$$y - 3 = 2.4x - 0.6$$

$$\boxed{y = 2.4x + 2.4}$$

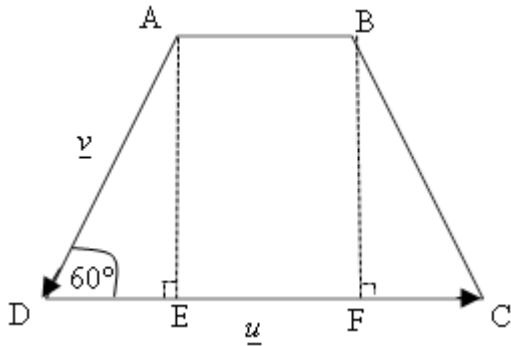
תשובה: משוואת המיתר AB היא $y = 2.4x + 2.4$.

בגרות פא מארס 21 מועד חורף נבצרים שאלון 35572
דומה לבגרות סט מאי 09 מועד קיץ א שאלון 35807

א. (1) $\angle ADC = 60^\circ$ (זווית חד צדדיות בין ישרים מקבילים משלימות ל- 180°)

נוריד שני אנכים AE, BF לבסיס CD,

היוצרים שני משולשים החופפים זה לזה ($\triangle ADE \cong \triangle BCF$)



$$DE = \frac{|u| - t|u|}{2} = \frac{(1-t)|u|}{2}$$

$\triangle ADE$

$$\cos 60^\circ = \frac{DE}{AD}$$

$$0.5 = \frac{(1-t)|u|}{2|v|}$$

$$|v| = |u| - t|u|$$

$$t = \frac{|u| - |v|}{|u|}$$

$$t = \frac{|u| - |v|}{|u|} \text{ תשובה:}$$

(2) נביע את הווקטור $\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{BC} = -t\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$\overrightarrow{BC} = (1-t)\mathbf{u} + \mathbf{v}$$

$$\overrightarrow{BC} = \left(1 - \frac{|u| - |v|}{|u|}\right)\mathbf{u} + \mathbf{v}$$

$$\overrightarrow{BC} = \left(\frac{|u| - |u| + |v|}{|u|}\right)\mathbf{u} + \mathbf{v}$$

$$\overrightarrow{BC} = \left(\frac{|v|}{|u|}\right)\mathbf{u} + \mathbf{v}$$

$$\overrightarrow{BC} = \left(\frac{|v|}{|u|}\right)\mathbf{u} + \mathbf{v} \text{ תשובה:}$$

ב. (1) נתון: $\underline{v} = (-1, y, 0)$, $\underline{u} = (8, 6, -10)$

נשים לב שהזווית בין הווקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ היא 120°

(ראש - ראש, זנב - זנב)

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| |\underline{v}| \cos 120^\circ$$

$$(8, 6, -10) \cdot (-1, y, 0) = |(8, 6, -10)| |(-1, y, 0)| \cos 120^\circ$$

$$-8 + 6y + 0 = \sqrt{8^2 + 6^2 + (-10)^2} \sqrt{(-1)^2 + y^2 + 0^2} \cdot (-0.5)$$

$$16 - 12y = \sqrt{200} \sqrt{1 + y^2} \quad (*)^2$$

$$256 - 384y + 144y^2 = 200(1 + y^2)$$

$$56y^2 + 384y - 56 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-384 \pm 400}{112} \rightarrow y_1 = \frac{1}{7}, \quad y_2 = -7$$

$$16 - 12 \cdot \frac{1}{7} = \sqrt{200} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{7}\right)^2} \rightarrow 14 \frac{2}{7} = 14 \frac{2}{7} \quad o.k.$$

$$16 - 12 \cdot (-7) = \sqrt{200} \sqrt{1 + (-7)^2} \rightarrow 100 = 100 \quad o.k.$$

תשובה: $y = -7$, $y = \frac{1}{7}$

(2) כאשר DC קוטר במעגל שהטרפז חסום בו,

הרי ש- $\angle CAD = 90^\circ$ (זווית היקפית הנשענת על קוטר)

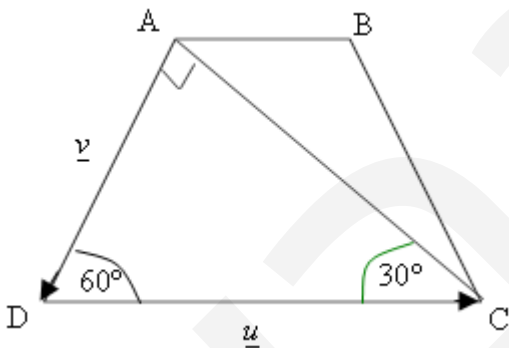
ו- $\triangle CAD$ הוא משולש $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ו- $|\underline{u}| = 2|\underline{v}|$

$$|\underline{u}| = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{7}\right)^2} \neq \frac{10\sqrt{2}}{2} : y = \frac{1}{7} \quad \text{עבור}$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{1 + (-7)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = \frac{10\sqrt{2}}{2} : y = -7 \quad \text{עבור}$$

תשובה: $y = -7$



בגרות פא מארס 21 מועד חורף נבצרים שאלון 35572

דומה לבגרות עא ינואר 11 מועד חורף שאלון 35007

$$z = r \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad \text{א.}$$

נשתמש בזהויות $\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin \alpha$, $\cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos \alpha$

$$\begin{aligned} r \cdot (\cos(180^\circ + \alpha) + i \sin(180^\circ + \alpha)) &= \\ r \cdot (-\cos \alpha - i \sin \alpha) &= \\ -(\cos \alpha + i \sin \alpha) &= -z \end{aligned}$$

פתרון חלופי: $r \cdot (\cos(180^\circ + \alpha) + i \sin(180^\circ + \alpha)) = r \cdot \text{cis}(180^\circ + \alpha) = r \cdot \text{cis}(180^\circ) \cdot \text{cis} \alpha = r(-1) \cdot \text{cis} \alpha = -z$
תשובה: הוכח.

ב. z_1 , z_2 ו- z_3 הם שלושה מספרים מרוכבים שונים הנמצאים על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים.

z_1 ו- z_2 נמצאים ברביע הראשון, ו- z_3 נמצא ברביע השלישי.

$$\text{נסמן } z_1 = r_1(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

כיוון ש- z_1 , z_2 ברביע הראשון ונמצאים על ישר העובר בראשית הצירים, הרי שהארגומנטים שלהם שווים,

אך הרדיוסים (הערכים המוחלטים) שונים, כי נתון שהם מספרים שונים. בהתאם: $z_2 = r_2(\cos \alpha + i \sin \alpha)$.

z_3 נמצא ברביע השלישי, על אותו ישר העובר בראשית הצירים, לכן $z_3 = r_3(\cos(\alpha + 180^\circ) + i \sin(\alpha + 180^\circ))$,

כאשר ייתכן כי הרדיוס של z_3 שווה לזה של z_1 או z_2 .

$$\text{על פי סעיף א, } z_3 = -r_3(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$\frac{z_2 + z_3}{z_1 - z_3} = \frac{r_2(\cos \alpha + i \sin \alpha) - r_3(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{r_1(\cos \alpha + i \sin \alpha) + r_3(\cos \alpha + i \sin \alpha)}$$

$$\frac{z_2 + z_3}{z_1 - z_3} = \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)(r_2 - r_3)}{(\cos \alpha + i \sin \alpha)(r_1 + r_3)}$$

$$\frac{z_2 + z_3}{z_1 - z_3} = \frac{r_2 - r_3}{r_1 + r_3}$$

רדיוס הוא מספר ממשי, לכן המנה היא מספר ממשי.

$$\text{תשובה: המנה } \frac{z_2 + z_3}{z_1 - z_3} \text{ היא מספר ממשי.}$$

ב. נתון גם כי z_1 ו- z_3 נמצאים על מעגל היחידה, כלומר $r_1 = r_3 = 1$, ו- $\frac{z_2 + z_3}{z_2 - z_3} = \frac{5}{4}$.

$$\frac{z_2 + z_3}{z_2 - z_3} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{r_2 - r_1}{2r_1} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{r_2 - 1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$4r_2 - 4 = 10$$

$$r_2 = 3.5$$

$$|z_2| = 3.5$$

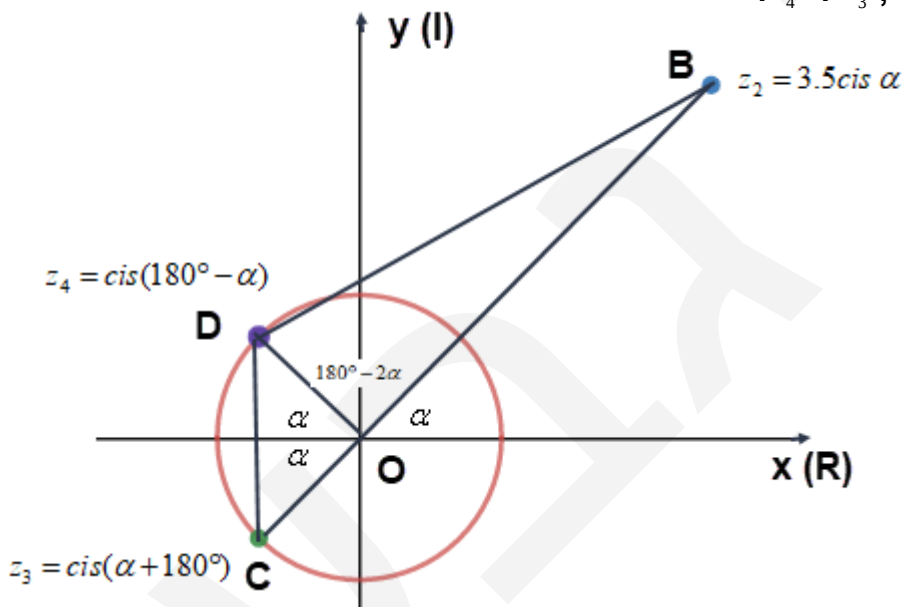
תשובה: $r_2 = |z_2| = 3.5$

ג. $z_2 = 3.5 \operatorname{cis} \alpha$

עפ"י סעיף א הנתון, גם z_3 על מעגל היחידה, ולכן $z_3 = \operatorname{cis}(\alpha + 180^\circ)$

z_4 הוא הצמוד של z_3 , כלומר $z_4 = \operatorname{cis}(180^\circ - \alpha) \rightarrow z_4 = \operatorname{cis}(-(\alpha + 180^\circ)) = \operatorname{cis}(360^\circ - \alpha - 180^\circ)$

נצייר את המשולש הנוצר על ידי הנקודות z_2 , z_3 ו- z_4 .



$$S = S_{\triangle BOD} + S_{\triangle COD}$$

$$S = \frac{3.5 \cdot 1 \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha)}{2} + \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin 2\alpha}{2}$$

$$S = \frac{3.5 \sin 2\alpha + \sin 2\alpha}{2}$$

$$S = \frac{4.5 \sin 2\alpha}{2}$$

$$S = 2.25 \sin 2\alpha$$

תשובה: שטח המשולש הנוצר על ידי הנקודות z_2 , z_3 ו- z_4 הוא $2.25 \sin 2\alpha$ יח"ר.

א. נתונה הפונקציה $f(x) = 4e^{\sqrt{x}}$.

הביטוי בתוך השורש צריך להיות אי-שלילי.

תשובה: $x \geq 0$.

ב נתונות הפונקציה $h(x) = f(x^2) = 4e^x$ ($x > 0$) והפונקציה $g(x) = 2 \cdot f'(x)$.

נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x) = 2 \cdot f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{4e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(x) = \frac{2e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = 2 \cdot \frac{\frac{e^{\sqrt{x}} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}{x} = 2 \cdot \frac{e^{\sqrt{x}} \sqrt{x} - e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x} x}$$

$$g'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{x\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x} - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} g'(0.5) = \frac{(+)(-)}{+} < 0 \\ g'(2) = \frac{(+)(+)}{+} > 0 \end{array} \right\} x = 1, \min$$

$$g(1) = 2f'(1) = 4 \cdot \frac{2e^{\sqrt{1}}}{\sqrt{1}} = 4e \rightarrow (1, 4e)$$

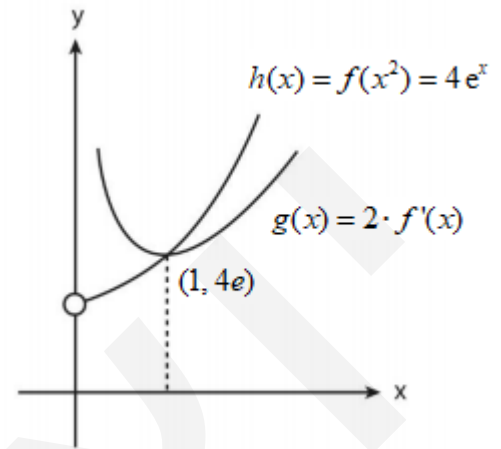
נציב $x = 1$, בפונקציה $h(x)$ ונקבל $h(1) = 4e^1 = 4e$, ולכן הנקודה $(1, 4e)$ נמצאת גם על הפונקציה $h(x)$.

תשובה: $(1, 4e)$ מינימום.

ג. נשרטט את הגרפים של שתי הפונקציות, באותה מערכת צירים, בתחום $x > 0$

על פי הנתון הפונקציה $h(x) = f(x^2) = 4e^x$ ($x > 0$) והפונקציה $g(x) = 2 \cdot f'(x)$ נפגשות רק בנקודה $(1, 4e)$.

$h(x) = f(x^2) = 4e^x$ פונקציה עולה לכל x , ולכן מגיעה בעלייה לנקודת המינימום של $g(x)$.



תשובה: הסרטוט מעל.

ד. בתחום $x > 1$ - $h(x) = f(x^2) = 4e^x$ היא הפונקציה העליונה.

נחשב את השטח, שגודלו נתון $e^4 + 4e - 2 \cdot f(a)$, בין שתי הפונקציות והישר $x = a$ ($a > 1$).

$$S = \int_1^a (4e^x - 2 \cdot f'(x)) dx$$

$$S = 4e^x - 2f(x) \Big|_1^a$$

$$S = (4e^a - 2 \cdot f(a)) - (4e^1 - 2 \cdot 4e^{\sqrt{1}})$$

$$\boxed{S = 4e^a - 2 \cdot f(a) + 4e}$$

$$4e^a - 2 \cdot f(a) + 4e = e^4 + 4e - 2 \cdot f(a)$$

$$4e^a = e^4$$

$$4 = e^{4-a}$$

$$\ln 4 = 4 - a$$

$$\boxed{a = 4 - \ln 4}$$

תשובה: $a = 4 - \ln 4$.

בגרות פא מארס 21 מועד חורף נבצרים שאלון 35572
דומה לבגרות עד אוגוסט 14 מועד קיץ ג שאלון 35807

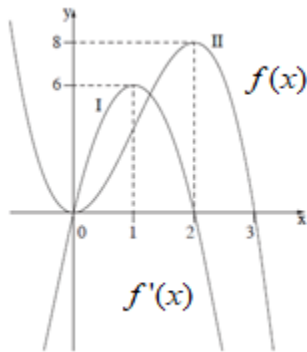
א. שתי הפונקציות, המתוארות על ידי הגרפים, מוגדרות בתחום $-1 \leq x \leq 4$.

תחומי החיוביות והשליליות של גרף I הם: חיובי: $0 < x < 2$, שלילי: $2 < x \leq 4$ או $-1 \leq x < 0$.

תחומים אלו תואמים את תחומי העלייה והירידה של גרף II (למעט סימני השוויון),

ולכן גרף II הוא הגרף של $f(x)$, בעוד שגרף I מתאר את $f'(x)$.

תשובה: גרף II הוא הגרף של $f(x)$.



ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \ln(f(x))$

(1) הפונקציה $\ln(f(x))$ מוגדרת עבור מספרים חיוביים,

כלומר כאשר $f(x)$ חיובית, ועל פי הציור עבור $0 < x < 3$ או $-1 \leq x < 0$.

תשובה: תחום ההגדרה של $g(x) = \ln(f(x))$ הוא $0 < x < 3$ או $-1 \leq x < 0$.

(2) האסימפטוטות האנכיות הן $x=3$, $x=1$ ו- $x=-1$, כי (הנימוק לא נדרש בבחינת הבגרות):

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \ln(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \ln(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(0^+) = -\infty$$

בסקיצה שנצייר בתת סעיף (5) נביא לידי ביטוי שהגרף שואף לאסימפטוטות כאשר $g(x) \rightarrow -\infty$.

תשובה: האסימפטוטות האנכיות הן $x=3$ ו- $x=0$.

(3) נמצא את נקודת הקיצון הפנימית של $g(x) = \ln(f(x))$.

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$f'(x)$ מתאפס, על פי גרף I, עבור $x=0$, שאינו בתחום ההגדרה של $g(x)$, או $x=2$.

עבור $x=2$ הוא עובר מחיובית לשליליות ולכן $x=2$ הוא מקסימום.

על פי הסימונים בסרטוט הנתון, $g(2) = \ln(f(2)) = \ln 8$.

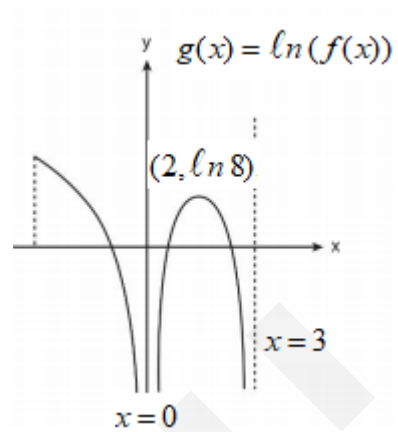
תשובה: $\max(2, \ln 8)$.

(4) תחומי החיוביות והשליליות של $g'(x)$, הם כמו של $f'(x)$ במגבלות תחום ההגדרה.

חיובי: $0 < x < 2$, שלילי: $2 < x < 3$ או $-1 < x < 0$, ובהתאם אלו תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

תשובה: $g(x)$ עולה בתחום $0 < x < 2$, ויורדת בתחום $2 < x < 3$ או $-1 < x < 0$.

(5) סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.



תשובה: הסרטוט מעל.