

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות של חמש שאלות לבחירתך — $20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

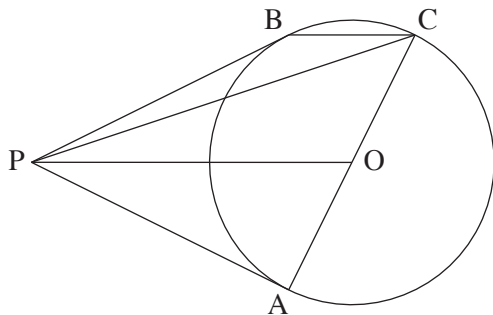
שים לב: אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. יואב ואודי רכבו על אופניים מיישוב A ליישוב B, באותה הדרך. יואב יצא מיישוב A, וכעבור 3 שעות הגיע ליישוב B. זמן מה לאחר יציאתו של יואב מיישוב A, יצא גם אודי מיישוב A והגיע ליישוב B רבע שעה לפני יואב. יואב ואודי נפגשו בדרך ליישוב B כעבור שעה וחצי מרגע יציאתו של אודי מיישוב A. מהירות הרכיבה של יואב ומהירות הרכיבה של אודי היו קבועות.
 - א. מצא כמה זמן עבר מרגע יציאתו של יואב מיישוב A ועד רגע יציאתו של אודי מיישוב A (מצא את שתי האפשרויות).
 - ב. נתון: יואב ואודי נפגשו במרחק 12 ק"מ מיישוב B. מהירות הרכיבה של אודי גדולה מ-20 קמ"ש. מצא מהי מהירות הרכיבה של יואב ומהי מהירות הרכיבה של אודי.
2. נתונה סדרה הנדסית איך־סופית יורדת: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ סכום כל איברי הסדרה בלי האיבר הראשון הוא 4. מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה, ומתקבלת סדרה הנדסית חדשה: $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots$ סכום כל איברי הסדרה החדשה בלי האיבר הראשון הוא -2.4 .
 - א. מצא את האיבר הראשון ואת המנה של הסדרה a_n (הסדרה המקורית). מן האיברים של הסדרה הנתונה בנו סדרה שלישית: $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_4}{a_3}, \dots, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \dots$ נסמן את הסדרה השלישית ב- c_n .
 - ב. הוכח כי הסדרה c_n היא סדרה הנדסית, מצא את המנה שלה ואת c_1 .
 - ג. נתון כי הסכום $c_{k+1} + c_{k+2} + \dots + c_{3k}$ גדול פי 4,096 מסכום $2k$ האיברים הראשונים בסדרה c_n . מצא את k .

3. בחברת תקשורת גדולה נבדקו הרגלי הצפייה של הלקוחות.
- נמצא כי מספר הלקוחות שצופים בערוצי מוזיקה גדול פי 1.5 ממספר הלקוחות שאינם צופים בהם.
- $\frac{2}{3}$ מן הלקוחות שצופים בערוצי ספורט, צופים בערוצי מוזיקה.
- 40% מן הלקוחות שאינם צופים בערוצי ספורט, צופים בערוצי מוזיקה.
- בוחרים באקראי לקוח מן הלקוחות של החברה.
- א. מהי ההסתברות שהלקוח שנבחר צופה גם בערוצי ספורט וגם בערוצי מוזיקה?
- ב. נמצא שהלקוח שנבחר צופה בערוצי מוזיקה או בערוצי ספורט. מהי ההסתברות שהוא אינו צופה בערוצי מוזיקה?
- ג. מן הלקוחות שאינם צופים בערוצי ספורט, בחרו באקראי 4 לקוחות. מהי ההסתברות שלפחות 2 מהם צופים בערוצי מוזיקה?

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. הנקודות A ו-B נמצאות על מעגל שמרכזו O.
 המשיקים למעגל בנקודות A ו-B נפגשים בנקודה P.
 ההמשך של AO חותך את המעגל בנקודה C (ראה סרטוט).
 א. הוכח: $PO \parallel BC$.
 נסמן: $k = \frac{PO}{BC}$.
 ב. הבע באמצעות k את היחס בין שטח המשולש PBC ובין שטח המשולש OPC.
 ג. נסמן ב-S את שטח המשולש PAO.
 הבע באמצעות S ו-k את שטח המרובע PACB.

5. ABCD הוא טרפז חסום במעגל ($AB \parallel DC$).
 נתון: $AB = a$, $CD = b$ ($a < b$).
 $\angle BCD = 60^\circ$.
 א. הבע את האורך של שוקי הטרפז, BC ו-AD, באמצעות a ו-b.
 נתון: $a = 6$, אורך האלכסון BD הוא $6\sqrt{7}$.
 ב. חשב את b.
 ג. (1) הוא רדיוס המעגל החוסם את הטרפז. מצא את R.
 (2) הסבר מדוע אפשר לחסום מעגל בטרפז ABCD.
 (3) הוא רדיוס המעגל החסום בטרפז. מצא את r.

**פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות
ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax}{\sqrt{x^2 - 16}}$, $a \neq 0$ הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ענה על סעיפים ב-ד בעבור $a > 0$.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש צורך, הבע באמצעות a).

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בעבור $a < 0$.

נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ המוגדרת בתחום שבו מוגדרות הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$.

נתון: $a = 1$.

ו. (1) מצא את תחום השליליות של הפונקציה $g(x)$.

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, הישר $x = 5$, הישר $x = 6$, וציר ה- x .

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 4$.

ענה על סעיפים א-ה בעבור התחום $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x .
 ב. הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.
 ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ה. נתונה הפונקציה $g(x) = -f(-x) + b$. b הוא פרמטר.
 נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- x .
 מצא את b .
 ו. מצא בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

8. נתונה הפונקציה $f(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$, ואת האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
 (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ב. העבירו ישר המקביל לציר ה- x .
 הישר חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A ואת הישר $y = \frac{1}{2}x$ בנקודה B.
 נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
 נתון: $t < -1$.
 מצא את הערך של t שבעבורו האורך של הקטע AB הוא מינימלי.

בהצלחה!