

פתרון הבחינה

במתמטיקה

חורף תשפ"א, 2021, שאלון: 35482

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע":

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. נתונות שתי סדרות: $b_n = 9 - 2n$, $a_n = 4n + 1$.
- א. (1) מצא את a_1 ואת b_1 .
(2) הוכח כי שתי הסדרות הן סדרות חשבוניות, ומצא את הפרשיהן.
- ב. סכום k האיברים הראשונים בסדרה a_n הוא 860.
(1) מצא את k .
(2) מצא את סכום k האיברים הראשונים בסדרה b_n .
- ג. נתונה סדרה חדשה המקיימת לכל n $c_n = a_n - b_n$.
האם c_n היא סדרה חשבונית? הוכח את תשובתך.
- ד. מהו סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה c_n ? הסבר את תשובתך.

פתרון

1) (א) $a_n = 4n + 1$

$b_n = 9 - 2n$

$n=1: a_1 = 4 \cdot 1 + 1$

$n=1: b_1 = 9 - 2 \cdot 1$

$a_1 = 5$

$b_1 = 7$

(2) $a_n = 4n + 1$

$n \rightarrow n+1: a_{n+1} = 4(n+1) + 1 = 4n + 4 + 1 = 4n + 5$

$a_{n+1} - a_n = (4n + 5) - (4n + 1) = 4n + 5 - 4n - 1 = 4$

ק"כ נ"ו:

$a_{n+1} - a_n = 4$

לסיכום: a_n סדרה חשבונית ש.נ.ה. 4



$$1720 = k(10 + 4k - 4)$$

$$1720 = k(4k + 6)$$

$$1720 = 4k^2 + 6k$$

$$4k^2 + 6k - 1720 > 0$$

$$k_1 = 20$$

$$k_2 = -21.5$$

נסת (א-ה) 674

k=20 : עיקרי

(2) : סדרה

$$b_1 = 7$$

$$d = -2$$

$$n = k = 20$$

$$S_{20} = ?$$

סדרה חשבונית

$$S_n = \frac{n(2b_1 + (n-1)d)}{2}$$

↓

$$S_{20} = \frac{20[2 \cdot 7 + (20-1)(-2)]}{2}$$



$$S_{20} = -210$$

$$S_{20} = -210 \quad \text{מש' קו:}$$

$$C_n = a_n - b_n \quad \text{מינין:}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad C_n &= a_n - b_n = \\ &= (4n+1) - (9-2n) = \\ &= 4n+1-9+2n = \\ &= 6n-8 \end{aligned}$$

↓

$$C_n = 6n-8$$

$$n \rightarrow n+1 : C_{n+1} = 6(n+1) - 8 = 6n + 6 - 8 = 6n - 2$$

$$C_{n+1} - C_n = (6n-2) - (6n-8) = 6n-2-6n+8 = 6$$

קבוע:

$$C_{n+1} - C_n = 6$$

$$C_n \text{ סינוי חלקי 6} \quad \text{מש' קו:}$$



ג) קטקני : C_n

$$C_n = 6n - 8$$

$$n=1 : C_1 = 6 \cdot 1 - 8 = -2$$

$$d = 6$$

$$n = 20$$

$$S_{20} = ?$$

נ"ק. קניסיה (ויסני) :

$$S_n = \frac{n [2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

↓

$$S_{20} = \frac{20 [2 \cdot (-2) + (20-1) \cdot 6]}{2} = 1100$$

$$S_{20} = 1100 \quad \underline{\text{תשקיה}}$$

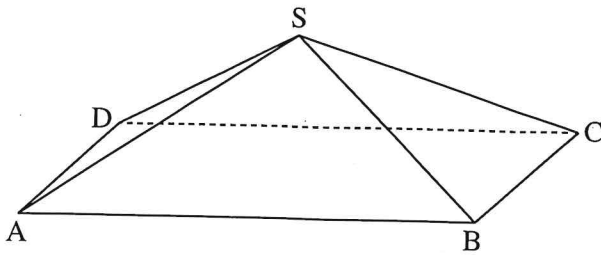
$$C_n = a_n - b_n \quad \text{נתיין} \quad \underline{\text{ויטפיה}}$$

↓

$$S_{20}^{C_n} = S_{20}^{a_n} - S_{20}^{b_n} = 860 - (-240) = 1100$$



טריגונומטריה במרחב



2. $SABCD$ היא פירמידה ישרה שבסיסה מלבן.
נתון: $SC = 4$, $AB = 6$, $BC = 2$.
- א. חשב את האורך של אלכסון הבסיס של הפירמידה.
 - ב. (1) מצא את הזווית בין מקצוע צדדי בפירמידה ובין בסיס הפירמידה.
(2) מצא את שטח המשולש ASC .
 - ג. (1) מצא את זוויות הראש של כל הפאות הצדדיות של הפירמידה.
(2) חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.

פתרון:

א. נשתמש במשפט פיתגורס במלבן הבסיס $ABCD$:

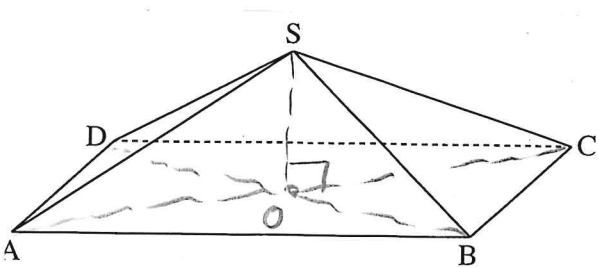
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\Downarrow$$

$$AC^2 = 6^2 + 2^2$$

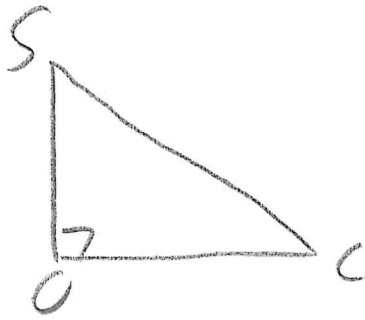
$$\Downarrow$$

$$AC = \sqrt{40}$$



ב. (1) נסמן את המשטח האנכסוניק של הבסיס $K-O$.
זוהי הסיומטריה של הפירמידה ישרה ומכאן האנכסוניק הוא מרכז המעגל החוסם את הבסיס הצולע המלבני. הוא למעשה צולע SCO .





נתון במשולש SOC:

$$SC = 4$$

$$SO = \frac{1}{2} AC = \sqrt{10}$$

$$\cos \angle SCO = \frac{OC}{SO} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

~ (א) ✓

$$\angle SCO = 37.76^\circ$$

(2) נתון כי SO הוא גובה במשולש SOC:

$$\sin \angle SCO = \frac{SO}{SC}$$

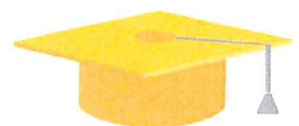
$$\sin 37.76^\circ = \frac{SO}{4}$$

$$SO = 2.45$$

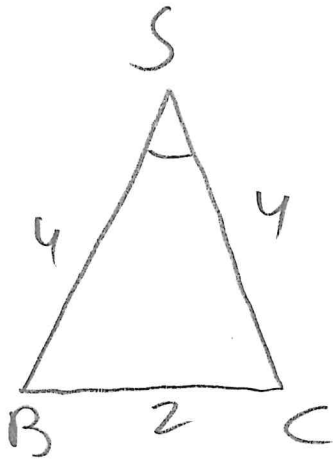
מכאן, לפי נוסחה שטח משולש:

$$S_{ASC} = \frac{AC \cdot SO}{2} = \frac{\sqrt{40} \cdot 2.45}{2} = 7.75$$

ד. נתון קבוע BSC - ASD, אכן י' אמת מול האם.



נתבונן במשולש SBC , ונשתמש במשפט הקוסינוסים:



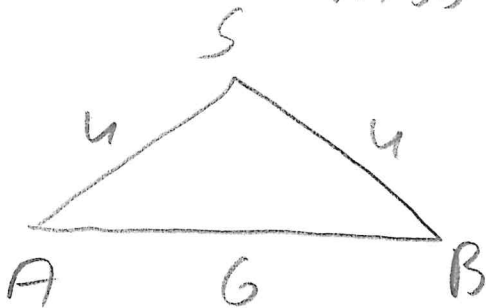
$$2^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos \angle BSC$$

$$4 = 32 - 32 \cos \angle BSC$$

$$\cos \angle BSC = \frac{28}{32}$$

$$\angle BSC = 28.96^\circ$$

דבריה צולמה, גודל $\angle S$ הוא של הפאה CSD
 1- $\triangle ASB$, נתבונן במשולש ASB :



$$6^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos \angle ASB$$

$$36 = 32 - 32 \cos \angle ASB$$

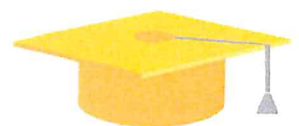
$$\cos \angle ASB = -\frac{4}{32}$$

$$\angle ASB = 97.18^\circ$$

$\angle BSC = \angle ASD = 28.96^\circ$
 $\angle ASB = \angle CSD = 97.18^\circ$

לסינוס, $\angle S$ הוא הן:

(2) שזה המשפט הוא סנוב הסלחני של הפאה של הפיגוריה:



$$M = S_{ASB} + S_{CSA} + S_{ASD} + S_{CSB} =$$

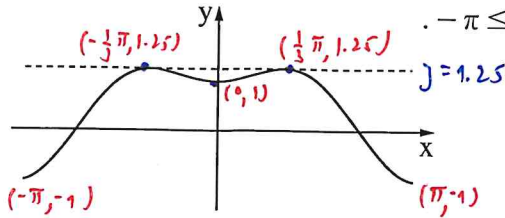
$$M = 2 \cdot S_{ASB} + 2 \cdot S_{ASD} =$$

$$M = 2 \cdot \frac{AS \cdot BS \cdot \sin 97.18^\circ}{2} + 2 \cdot \frac{AS \cdot DS \cdot \sin 28.96^\circ}{2}$$

$$M = 16 \sin 97.18^\circ + 16 \cdot \sin 28.96^\circ$$

$$M = 23.62$$





3. בסרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$. נתון: $f(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) + \cos x + c$. c הוא פרמטר.

א. מצא את שיעורי ה- x של כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$. קבע את סוגן בעזרת גרף הפונקציה.

נתון כי הישר $y = 1.25$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות המקסימום של הפונקציה (ראה סרטוט).

ב. (1) מצא את c .

(2) רשום את שיעורי נקודות המינימום של הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + b$ (b הוא פרמטר).

ג. מצא את הערך של b שעבורו הפונקציה $g(x)$ משיקה לישר $y = 0.25$ (מצא את שלוש האפשרויות).

פתרון:

א.)

צוינה נינין בני-טג.

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) + \cos x + c$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2 + (-\sin x) \cdot 1$$

$$f'(x) = \sin 2x - \sin x$$

$$\sin 2x - \sin x = 0$$

$$\sin 2x - \sin x = 0 \quad \text{נינין טג}$$

$$\sin 2x = \sin x$$

↓

$$\text{I} \quad 2x = x + 2\pi k$$

$$\underline{x = 2\pi k}$$

$$\text{II} \quad 2x = (\pi - x) + 2\pi k$$

$$3x = \pi + 2\pi k \quad / : 3$$

$$\underline{x = \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi k}$$



$$-\pi \leq x \leq \pi$$

$$x = 2\pi k$$

k	0
x	0 ✓

$$x = \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi k$$

k	0	1	-1	-2
x	$\frac{1}{3}\pi$ ✓	π ↑	$-\frac{1}{3}\pi$ ✓	$-\pi$ ↑

ע"מ (נ) ע"מ (נ)

ש"ד (נ) : $x = -\frac{1}{3}\pi, x = \frac{1}{3}\pi, x = 0$

נ"י (נ) :

$$\sin 2x - \sin x > 0$$

ניסוח > 0 למה :

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

↓

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

ניקח :

$$2\sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x (2\cos x - 1) = 0$$

↓

↓

$$\sin x = 0$$

$$2\cos x - 1 = 0$$



נניח: $n = 1.25$ משך הזמן הכולל הכולל $f(x)$ גרונד
היט, סימול te הנהי.

2) $c = ?$

8) כי הימין (נט) אילת:

$$\max(-\frac{1}{3}\pi, 1.25), \max(\frac{1}{3}\pi, 1.25)$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}cx(2x) + cx + c$$

$$(-\frac{1}{3}\pi, 1.25) \xrightarrow{\text{היט}} 1.25 = -\frac{1}{2}c(2 \cdot (-\frac{1}{3}\pi)) + c(-\frac{1}{3}\pi) + c$$

$$1.25 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + c$$

$$c = \frac{1}{2}$$



$$(2) \quad f(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) + \cos x + \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \rightarrow f(0) = -\frac{1}{2} \cos(2 \cdot 0) + \cos(0) + \frac{1}{2} = 1$$

$\min(0, 1)$

$$x = -\pi \rightarrow f(-\pi) = -\frac{1}{2} \cos(2 \cdot (-\pi)) + \cos(-\pi) + \frac{1}{2} = -1$$

$\min(-\pi, -1)$

$$x = \pi \rightarrow f(\pi) = -\frac{1}{2} \cos(2 \cdot \pi) + \cos(\pi) + \frac{1}{2} = -1$$

$\min(\pi, -1)$

$$g(x) = f(x) + b$$

ג)

$f(x)$ היא קדחה, היכזה זיכנה של $f(x)$

היכזה זיכנה של יחידה שלה סכניטה, $b = -1$

לג $0.25 = \frac{1}{4}$ יש 1 זיכנה של $f(x)$ $>$ שלה זיכנה של $f(x)$
 $(\frac{1}{3}\pi, 0.25)$ $(-\frac{1}{3}\pi, 0.25)$



$b = 0.75$, היצגה יוקרה של 0.75 וחינה לבני גלה,
ואין צרכים נוספים (אם > קנייה מנייה (0.75, 0.75)).

$b = 1.25$, היצגה יוקרה של 1.25 וחינה לבני גלה,
ואין צרכים נוספים (אם > קנייה השקיעה (0.75, π) | (0.75, $-\pi$)).

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.**



4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{a \cdot e^x}{e^x - a}$, $a > 0$, הוא פרמטר.

א. (1) הבע באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ ואת משוואת האסימפטוטה האנכית של הפונקציה $f(x)$.

(2) הבע באמצעות a את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ב. הבע באמצעות a את תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-y היא $(0, -2)$.

ג. מצא את a .

לפונקציה $f(x)$ יש שתי אסימפטוטות אופקיות: $y = 2$ בעבור $x \rightarrow \infty$ ו- $y = 0$ בעבור $x \rightarrow -\infty$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = |f(x)|$.

מה הם שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה-y?

פתרון:

(1) 10

נקודת האילו ציני x
הימניק ישלנס.

$$e^x - a > 0$$

$$e^x = a$$

↓

$$x = \ln a$$

$a = a$ ישלנס ולא הימניק (ולא ולא הימניק) ישלנס: $x \neq \ln a$

אסימיל ארנסר: $x = \ln a$



(2) $f(x) = \frac{a \cdot e^x}{e^x - a}$

$x=0 \rightarrow f(0) = \frac{a \cdot e^0}{e^0 - a} = \frac{a \cdot 1}{1 - a} = \frac{a}{1 - a}$

$(0, \frac{a}{1-a})$

$f(x) = 0 \rightarrow 0 = \frac{a e^x}{e^x - a}$

$0 = a e^x \quad (a \neq 0)$

$0 = e^x$

אין פתרון
(ג) כי גזירי ג'א תמיד חיובי

אין פתרון: אכן תמיד חיובי: אכן חיובי.



2) $f(x) = \frac{a \cdot e^x}{e^x - a}$
 $\rightarrow a \cdot e^x \cdot 1 = a e^x$
 $\rightarrow e^x \cdot 1 = e^x$

ניגודי גורמים (על ידי טורח)

$$f'(x) = \frac{a e^x \cdot (e^x - a) - a e^x \cdot e^x}{(e^x - a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{a e^{2x} - a^2 e^x - a e^{2x}}{(e^x - a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-a^2 e^x}{(e^x - a)^2}$$

$$\frac{-a^2 e^x}{(e^x - a)^2} = 0$$

$$-a^2 e^x = 0 \quad /: (-a^2) \quad (a \neq 0)$$

$$e^x = 0$$

אין פתרון

אין פתרון



2) $f(x) = \frac{a \cdot e^x}{e^x - a} \rightarrow a \cdot e^x \cdot 1 = a e^x$
 $e^x - a \rightarrow e^x \cdot 1 = e^x$

ניגזו דג'יטור נקלמה מיני.

$$f'(x) = \frac{a e^x (e^x - a) - a e^x \cdot e^x}{(e^x - a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{a e^{2x} - a^2 e^x - a e^{2x}}{(e^x - a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-a^2 \cdot e^x}{(e^x - a)^2}$$

היטענה היולי א ל x דג'יטור היינקנוה,

e^x היולי (דג'יטור) געזינע געני היינקוה,

$-a^2$ געזי (גרא)

מיני, געזי:

$$f'(x) = \frac{\text{געזי} \cdot \text{היולי}}{\text{היולי}} = \frac{\text{געזי}}{\text{היולי}} = \text{געזי}$$

איגור $f'(x)$ געזי א ל x דג'יטור היינקנוה.

ג'יטור היינקנוה געזי $f'(x)$: געזי א ל x in געזי



נתון: קוטר הנחתך של $f(x)$ זה $(1-x)$ הוא $(0, -2)$.

$$2) \quad f(x) = \frac{a e^x}{e^x - a}$$

$$(0, -2) \xrightarrow{\text{הקצ'}}$$

$$-2 = \frac{a \cdot e^0}{e^0 - a}$$

$$-2 = \frac{a \cdot 1}{1 - a}$$

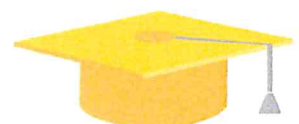
$$\frac{(1-a) \cdot}{-2} = \frac{1 \cdot}{a} \quad / \cdot (1-a)$$

$$-2(1-a) = a$$

$$-2 + 2a = a$$

$$2a - a = 2$$

$$a = 2$$



ה)

הינה ה נק' $g(x) = |f(x)|$

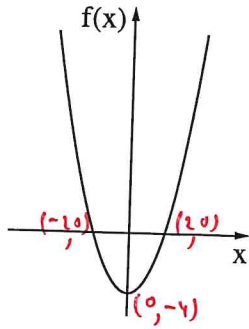
נהי רק שיערי עינה היתמך. על זל הנתן $g(x)$
זל ניו הי-נ.

$g(x) = |f(x)|$; $(0, -2)$ ניינב $f(x)$ $\rightarrow f(0) = -2$

$x=0 \rightarrow g(0) = |f(0)| = |-2| = 2$

נקודה: $(0, 2)$





5. לפניך גרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 4$, המוגדרת לכל x .
- א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
 - (2) מה הם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$?
- נתונה הפונקציה $g(x) = \ln(f(x))$.
- ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
 - (2) מצא את משוואות האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $g(x)$.
 - (3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .
תוכל להשאיר שורש בתשובתך.
 - (4) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$?
 - (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

פתרון

ii) (1) $f(x) = x^2 - 4$

$x=0 \rightarrow f(0) = 0^2 - 4 = -4$

$(0, -4)$

$f(x)=0 \rightarrow 0 = x^2 - 4$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2, x_2 = -2$

$(2, 0), (-2, 0)$

(2)

תחומי חיוביות: $x < -2$ או $x > 2$

תחומי שליליות: $-2 < x < 2$



$$g(x) = \ln(f(x))$$

↓

$$g(x) = \ln(x^2 - 4)$$

2) (1)

יש למצוא את האינז'ון של x

$$\text{למצוא: } x^2 - 4 > 0$$

אני סתם הו (2) ניקח

$$x^2 - 4 > 0 \text{ גשר } x < -2 \text{ או } x > 2$$

תשיקה:

$$x < -2 \text{ או } x > 2$$

ניי. נוסטה:

$$x^2 - 4 > 0$$

נכנס. מהי...

נמצא את האינז'ון של $x^2 - 4 > 0$

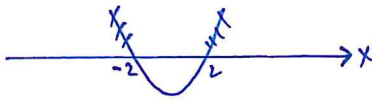
$$x^2 - 4 > 0$$

$$x^2 - 4 > 0$$

$$x_1 = 2, x_2 = -2$$

נניי את האינז'ון של $x^2 - 4 > 0$ סימן ניותר
אניננה ו.אנס של:





למשל: תחילת היקף.

תחילת: $x < -2$ או $x > 2$

סיום, תחילת ו-היקף: $x < -2$ או $x > 2$

(2)

אם יש אזורי מספרים שליליים $x < -1$

טובים יותר ה-1 וה-2 הם

באזורי שליליים $x < -2$ או $x > 2$

אם יש אזורי שליליים: $x < -2$ או $x > 2$

(3)

$$g(x) = \ln(x^2 - 4)$$

$$g(x) = 0 \rightarrow 0 = \ln(x^2 - 4)$$

$$\ln(x^2 - 4) = 0$$

$$\log_e(x^2 - 4) = 0$$

$$x^2 - 4 = e^0$$

$$x^2 - 4 = 1$$



$$x^2 = 5$$

$$x = \pm\sqrt{5}$$

$$x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5}$$

$$(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$$

$$(4) \quad f(x) = (x^2 - 4)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

$$\frac{2x}{x^2 - 4} > 0$$

$$2x > 0$$

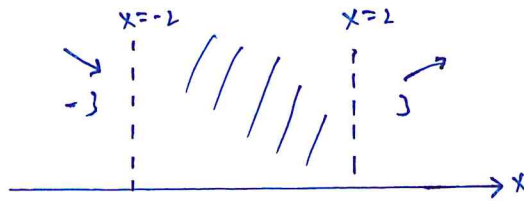
$$x > 0$$

פנימי, לפי דחמק (היה נרי)



אין צינור יזין





$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

$$f'(3) = \frac{2 \cdot 3}{3^2 - 4} = \frac{6}{5} \quad \begin{matrix} \text{תחום} \\ \text{ז'יג} \end{matrix}$$

$$f'(-3) = \frac{2 \cdot (-3)}{(-3)^2 - 4} = \frac{-6}{5} \quad \begin{matrix} \text{תחום} \\ \text{ז'יג} \end{matrix}$$

תחום ז'יג: $x > 2$

תחום ז'יג: $x < -2$

(5)

