פתרון הבחינה
במתמטיקה

מועד נבצרים מרץ חורף תשפ"א, 2021, שאלון: 35582

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע" :

582

.1 $A(x_1,y_1)$ ו־ $B(x_2,y_2)$ הן שתי נקודות שונות הנמצאות על הפרבולה $y^2=36x$ ברביע הראשון.

א. **(1)** הראה כי שיפוע המיתר AB הוא $m=\frac{36}{y_2+y_1}$.

(2) הנקודה $(x,7\frac{1}{2})$ היא אמצע המיתר AB.

מצא את m.

ב. נתון: המרחק של כל נקודה על הפרבולה הנתונה מן הישר $x=a$ שווה למרחק של נקודה זו מן הנקודה $(9,0)$.

מרחק הנקודה A מן הישר $x=0.75a$ הוא 7.

(1) מהו הערך של a? נמק.

(2) מצא את משוואת הישר AB.

משוואת הפרבולה היא $y^2=36X$. ניתן להסיק
ש $p=18$, מוקד הפרבולה הוא $(9,0)$ והמדריך הוא $X=-9$.
הנקודות A ו B נמצאות על הפרבולה ולכן מקיימות את
משוואתה

$$\text{I}\quad y_1^2=36X_1 \rightarrow X_1=\frac{y_1^2}{36}$$

$$\text{II}\quad y_2^2=36X_2 \rightarrow X_2=\frac{y_2^2}{36}$$

א 1 שיפוע הישר AB הוא:

$$m=\frac{y_2-y_1}{X_2-X_1}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{36}-\frac{y_1^2}{36}}=\frac{36(y_2-y_1)}{y_2^2-y_1^2}=\frac{36(y_2-y_1)}{(y_2-y_1)(y_2+y_1)}=\frac{36}{y_2+y_1}$$

א 2 אם הנקודה $(X,7.5)$ היא אמצע הקטע AB
ניתן להשתמש בנוסחת אמצע קטע על שיעורי ה-y.

$$\frac{y_1+y_2}{2}=7.5 \rightarrow y_1+y_2=15$$

כעת נציב את סכום שיעורי ה-y במכנה של
הביטוי מסעיף קודם:

$$\boxed{m=\frac{36}{15}=2.4}$$

ב כדי שמרחק כל נקודה שנמצאת על הפרבולה
מהנקודה (9,0), שהיא המוקד של הפרבולה, יהיה
שווה למרחק מהישר האנכי $x=a$, על הישר האנכי
להיות מדריך הפרבולה. מסקנה: $a=-9$

נתון שמרחק הנקודה A מהישר $x=0.75\cdot(-9)$ הוא 7.
הנתון הנ"ל מאפשר לחשב את x_1

$$x_1-(-6.75)=7$$

$$x_1=0.25$$

כעת נציב את x_1 במשוואת הפרבולה כדי למצוא את y_1

$$y_1^2=36\cdot0.25$$

$\boxed{y_1=3}$ $A(0.25,3)$

ג עכשיו נמצא את משוואת הישר AB

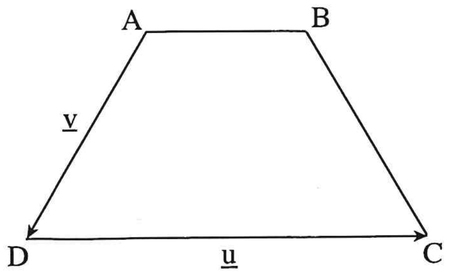
$$y-3=2.4(x-0.25)$$

$$\boxed{y=2.4x+2.4}$$

2. נתון טרפז שווה־שוקיים $ABCD$ ($AB \parallel DC$) (ראה סרטוט).

נתון: $\sphericalangle DAB = 120^o$.

נסמן: $\overrightarrow{DC} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = t\underline{u}$ (t הוא סקלר).



א. **(1)** הבע את t באמצעות $|\underline{u}|$ ו־ $|\underline{v}|$.

(2) הבע את הווקטור $\overrightarrow{BC}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $|\underline{u}|$ ו־ $|\underline{v}|$.

נתון: $\underline{u} = (8, 6, -10)$, $\underline{v} = (-1, y, 0)$.

ב. **(1)** מצא את שיעור ה־ y של הווקטור $\underline{v}$ (מצא את שני הערכים).

(2) עבור איזה ערך משני הערכים של y שמצאת בתת־סעיף ב(1), הבסיס DC הוא קוטר במעגל שהטרפז חסום בו? נמק.

א(1) נתון שהטרפז שווה שוקיים.

נדרוש ש: $|\overline{AD}| = |\overline{BC}|$

$\overline{AD} = \underline{v}$

$|\overline{AD}| = |\underline{v}|$

$\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AD} + \overline{DC} = -t\underline{u} + \underline{v} + \underline{u} = (1-t)\underline{u} + \underline{v}$

$|\overline{BC}| = \sqrt{((1-t)\underline{u}+\underline{v})((1-t)\underline{u}+\underline{v})} = \sqrt{(1-t)^2|\underline{u}|^2 + 2(1-t)\underline{u}\cdot\underline{v} + |\underline{v}|^2}$

$|\overline{BC}| = \sqrt{(1-t)^2|\underline{u}|^2 + 2(1-t)|\underline{u}||\underline{v}|\cos(120) + |\underline{v}|^2} = \sqrt{(1-t)^2|\underline{u}|^2 - (1-t)|\underline{u}||\underline{v}| + |\underline{v}|^2}$

כעת נשווה גדלים

$\sqrt{(1-t)^2|\underline{u}|^2 - (1-t)|\underline{u}||\underline{v}| + |\underline{v}|^2} = |\underline{v}| \quad /()^2$

$(1-t)^2|\underline{u}|^2 - (1-t)|\underline{u}||\underline{v}| + |\underline{v}|^2 = |\underline{v}|^2$

$(1-t)^2|\underline{u}|^2 = (1-t)|\underline{u}||\underline{v}| \quad /:|\underline{u}| \quad /:(1-t)$

$t \neq 1$
מאחר וכטרפז הבסיסים שונים בגודל

$(1-t)|\underline{u}| = |\underline{v}|$

$1-t = \frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|}$

$\boxed{t = 1 - \frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|}}$

א(2) נציב את t בתיאור הוקטור $\overline{BC}$:

$$\overline{BC} = \frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|}\cdot \underline{u} + \underline{v}$$

ב(1) נתון:

$\underline{u} = (8, 6, -10)$ $\quad$ $\underline{v} = (-1, y, 0)$

נשתמש בהגדרת המכפלה הסקלרית

$$\underline{v}\cdot\underline{u} = |\underline{v}||\underline{u}|\cos(120)$$

$$(-1,y,0)(8,6,-10) = \sqrt{(-1)^2+y^2}\sqrt{8^2+6^2+(-10)^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$-8+6y = -5\sqrt{2}\sqrt{1+y^2} \quad /\cdot(-1)$$

$$8-6y = 5\sqrt{2}\sqrt{1+y^2} \quad /(\ )^2$$

$$64-96y+36y^2 = 25\cdot 2(1+y^2)$$

$$0 = 14y^2+96y-14$$

$$\boxed{y_1 = \frac{1}{7} \quad y_2 = -7}$$

ב(2) נדרוש זווית בת $90°$ בין וקטור $\overline{AD}$ ל $\overline{AC}$ (מאחר וזווית היקפית שנשענת על קוטר בת $90°$)

$$\overline{AC} = \underline{v}+\underline{u} = (7, 6+y, -10)$$

$$\overline{AD} = \underline{v} = (-1, y, 0)$$

$$\overline{AD}\cdot\overline{AC} = -7+6y+y^2 = 0$$

$$y = -7, 1$$

תשובה: $y=-7$ הוא שיעור ה- y עבורו DC מהווה קוטר במעגל החוסם את הטרפז.

3. **א.** נתון מספר מרוכב $z = r \cdot [\cos\theta + i \cdot \sin\theta]$.

הסבר מדוע מתקיים: $r \cdot [\cos(180^\circ + \theta) + i \cdot \sin(180^\circ + \theta)] = -z$.

z_1 , z_2 ו־ z_3 הם שלושה מספרים מרוכבים שונים. הנקודות המייצגות אותם במישור גאוס נמצאות על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים.

הנקודות המייצגות את z_1 ו־ z_2 נמצאות ברביע הראשון, והנקודה המייצגת את z_3 נמצאת ברביע השלישי.

נסמן $z_1 = r_1(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$.

ב. הוכח כי המנה $\frac{z_2 + z_3}{z_1 - z_3}$ היא מספר ממשי.

נתון גם כי הנקודות במישור גאוס המייצגות את המספרים z_1 ו־ z_3 נמצאות על מעגל היחידה, ו־ $\frac{z_2 + z_3}{z_1 - z_3} = \frac{5}{4}$.

ג. חשב את הערך המוחלט של z_2 .

ד. z_4 הוא הצמוד של z_3 .

הבע באמצעות α את שטח המשולש הנוצר על ידי הנקודות במישור גאוס המייצגות את המספרים z_2 , z_3 , z_4 .

(א) נתון $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,

כלומר $z = r\,cis\,\theta$

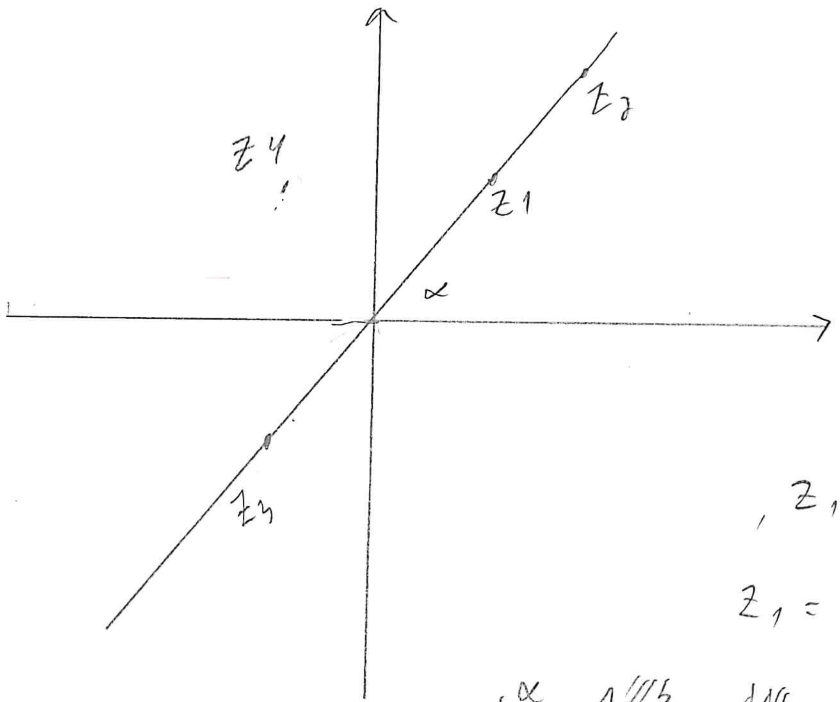
הביטוי $r[\cos(180^\circ+\alpha) + i\sin(180^\circ+\alpha)]$

שווה לביטוי $r[cis(180^\circ+\alpha)]$

נפתח אותו לפי הנוסחה $cis(\alpha+\beta) = cis\alpha \cdot cis\beta$

$r[cis(180^\circ+\alpha)] = r \cdot cis180^\circ \cdot cis\alpha =$

$\underbrace{r\,cis\alpha}_{z} \cdot \underbrace{cis180^\circ}_{-1} = -z$



נתון: $z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$,

כלומר $z_1 = r_1 \text{cis}\alpha$

ל- z_1 ו- z_2 אותה זווית α,

הזווית של z_3 היא $\alpha+180$.

נסמן: $z_2 = r_2 \text{cis}\alpha$

$z_3 = r_3 \text{cis}(\alpha+180^\circ)$

נוכיח את המבוקש, קודם נציין דבר שהוכחנו בסעיף א',

ורשום $r_3 \text{cis}(\alpha+180^\circ)$ כמו $-r_3\text{cis}\alpha$

$$\frac{z_2+z_3}{z_1-z_3} = \frac{r_2\text{cis}\alpha + r_3\text{cis}(\alpha+180^\circ)}{r_1\text{cis}\alpha - r_3\text{cis}(\alpha+180^\circ)} = \frac{r_2\text{cis}\alpha - r_3\text{cis}\alpha}{r_1\text{cis}\alpha + r_3\text{cis}\alpha}$$

$$= \frac{\text{cis}\alpha(r_2-r_3)}{\text{cis}\alpha(r_1+r_3)} = \frac{r_2-r_3}{r_1+r_3} = \text{ממשי}$$

ג) z_1 ו- z_3 על מעגל היחידה,
לכן $r_1=1$ ו- $r_3=1$.

נתון:
$$\frac{z_2+z_3}{z_1-z_3}=\frac{5}{4}$$

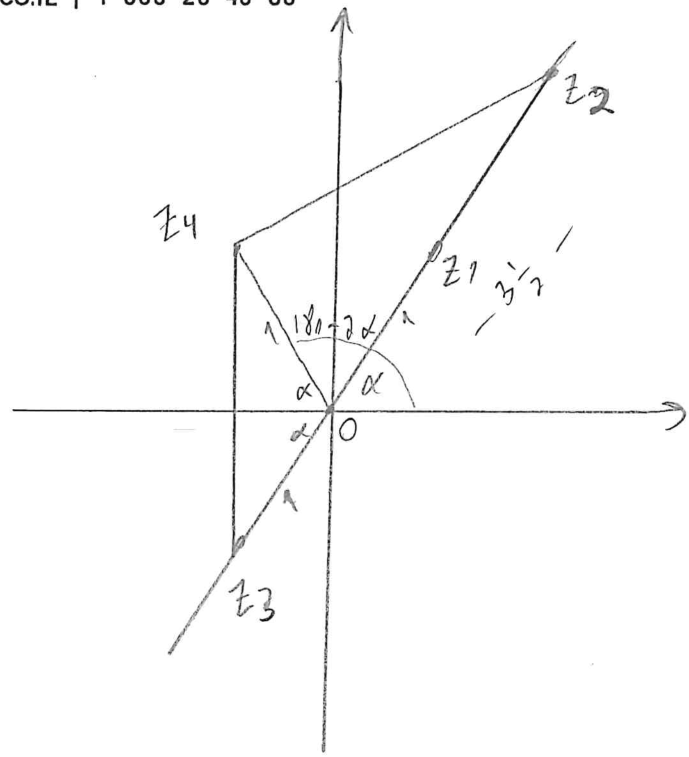
נציב עפ׳ סעיף ב׳:
$$\frac{r_2-r_3}{r_1+r_3}=\frac{5}{4}$$

נציב $r_1=1$
$r_3=1$
$$\frac{r_2-1}{1+1}=\frac{5}{4}$$

$$\boxed{r_2=3\tfrac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{|z_2|=3\tfrac{1}{2}}$$

ד) ראינו כי $z_3=r_3\,cis(\alpha+180^\circ)$
$$\Downarrow$$
$$z_3=1\,cis(\alpha+180^\circ)$$

z_4 צמוד של z_3, נמקם את z_4 בשרטוט.
(הצמוד של מספר מרוכב מתקבל ע״י שיקוף של המספר לעומת ציר הממשי.)
נקבל את z_4 (למרות שמספיק למקם אותו ולא ממש חייבים להציג אותו).



דרך א'

אם $Z_3 = 1cis(\alpha+180°)$

אז $Z_4 = 1cis(180°-\alpha)$

דרך ב'

על פי הכלל:

אם $Z = Rcis\alpha$

אז $\bar{Z} = Rcis(-\alpha)$

בדרך זו נקבל:

$$Z_4 = \bar{Z_3} = \overline{cis(\alpha+180°)} =$$

$$Z_4 = 1cis(-\alpha-180°)$$

נוסיף $360°$ ונקבל $Z_4 = 1cis(180°-\alpha)$

נחשב את השטח כחיבור שטח שני משולשים

ונעזר בנוסחת לשטח משולש: $\frac{a\cdot b\cdot \sin\text{זווית}}{2}$, 0- זווית הבדים.

$$S_\triangle Z_2Z_3Z_4 = S_\triangle Z_2OZ_4 + S_\triangle Z_3OZ_4 = \frac{1\times1\times\sin2\alpha}{2} + \frac{1\times3\frac{1}{2}\cdot\sin(180°-2\alpha)}{2}$$

$$= \frac{\sin2\alpha}{2} + \frac{3\frac{1}{2}\sin2\alpha}{2} = \frac{4\frac{1}{2}\sin2\alpha}{2} = \boxed{2.25\sin2\alpha}$$

4. נתונה הפונקציה $f(x)=4e^{\sqrt{x}}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציות: $h(x)=f(x^2)$, $g(x)=2\cdot f'(x)$ בתחום $x>0$.

ב. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, קבע את סוגה,
והראה כי הנקודה הזאת נמצאת על גרף הפונקציה $h(x)$.

נתון: הגרפים של שתי הפונקציות $g(x)$ ו־ $h(x)$ נפגשים בנקודה אחת בלבד (הנקודה שמצאת בסעיף ב).

ג. סרטט את הגרפים של שתי הפונקציות $g(x)$ ו־ $h(x)$ באותה מערכת צירים.

ד. נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, גרף הפונקציה $h(x)$ ועל ידי הישר $x=a$, $a>1$,
שווה ל־ $e^4+4e-2\cdot f(a)$.
מצא את הערך של a . תוכל להשאיר $\ln$ בתשובתך.

פתרון:

א. התוכן של $\sqrt{x}$ אי שלילי: $\boxed{0\le x}$

ב. $h(x)=f(x^2)=4e^{\sqrt{x^2}}=4e^x$

$g(x)=2\cdot f'(x)=2\cdot 4e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{4e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

נמצא את נקודת הקיצון של $g(x)$:

$g'(x)=4\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$

$g'(x)=2\cdot\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{x\sqrt{x}}$

נשווה לאפס ונפתור: $e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)=0$

$e^{\sqrt{x}} = 0$
ϕ

$\sqrt{x} - 1 = 0$
$\Downarrow$
$x = 1$

שיעור y:

$g(1) = \frac{4e^{\sqrt{1}}}{\sqrt{1}} = 4e$

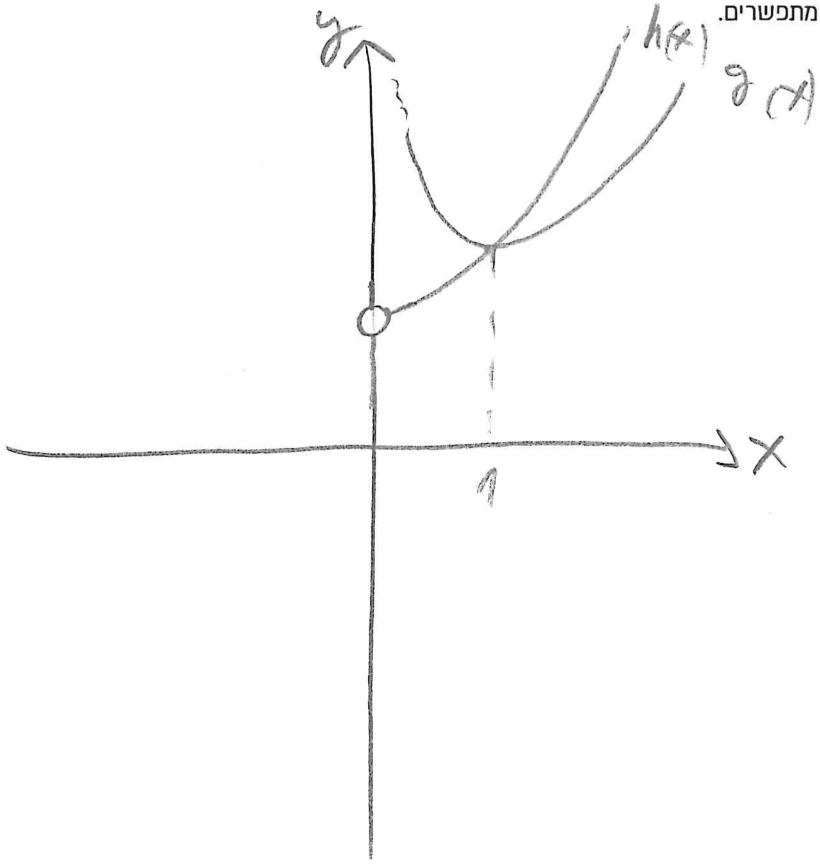
x	0	1/4	1	4
$g'(x)$	/	$-$	0	$+$
$g(x)$	/	↘	.	↗

$\boxed{(1, 4e) \text{ מינימום}}$

נראה שהתקודה על הגרף של $h(x)$:

$h(1) = 4e^1 = 4e$

ג. לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אנכית $x=0$ - ?,
ויש לה נקודת מינימום אחת.
הפונקציה $h(x)$ עולה בכל התחום, ונזכור
כי נתון $0<x$:



3. נתון $1<a$. בתחום $1<x<a$ מתקיים $g(x) < h(x)$, לכן השטח הנתון יחושב על ידי האינטגרל הבא:

$$S = \int_1^a \left(4e^x - \frac{4e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)dx$$

האינטגרל של החלק הראשון מיידי.
האינטגרל של החלק השני ניתן לחישוב ע"י

הנוסחה $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}$

או ע"פ ההגדרה של $g(x)$ והקשר שלה לנגזרת של $f(x)$. בכל מקרה, נקבל:

$$S = \left[4e^{x} - 8e^{\sqrt{x}}\right]_1^a$$

$$S = \left[4e^{a} - 8e^{\sqrt{a}}\right] - \left[4e - 8e\right]$$

$$S = 4e^{a} - 8e^{\sqrt{a}} + 4e$$

נשווה לשטח הנתון:

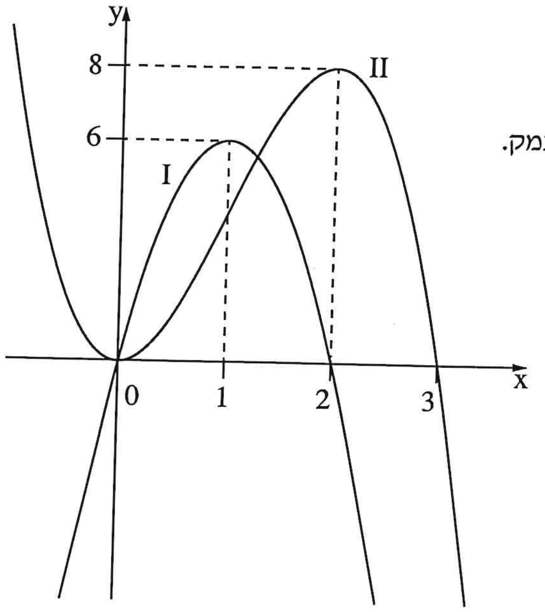
$$4e^{a} - 8e^{\sqrt{a}} + 4e = e^{4} + 4e - 8e^{\sqrt{a}}$$

$$4e^{a} = e^{4}$$

$$e^{a} = \frac{e^{4}}{4}$$

$$a = \ln\left(\frac{e^{4}}{4}\right) = \boxed{4 - \ln 4}$$

. הגרפים I , II שבסרטוט שלפניך מתארים שתי פונקציות המוגדרות בתחום $-1 \le x \le 4$.



אחד הגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$,

והאחר הוא של פונקציית הנגזרת שלה, $f'(x)$.

א. קבע מי מבין הגרפים I ו־ II הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$. נמק.

הסתמך על הסרטוט וענה על סעיף ב.

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \ln(f(x))$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מה הן האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לציר ה־ x ?

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(5) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

פתרון:

א. לפי תחומי עלייה וירידה, ולפי נקודת הקיצון של גרף II שמתאימה לנקודת החיתוך עם ציר x של גרף I:

$\boxed{\begin{array}{l} \text{II גרף} - f(x) \\ \text{I גרף} - f'(x) \end{array}}$

ב. נתון $g(x)=\ln(f(x))$

(1) תחום הגדרה $0<f(x)$.

לפי גרף II: $\boxed{-1\le x<0 \ , \ 0<x<3}$

(2) אסימפטוטה אנכית: $x=0$, $x=3$

אין אסימפטוטה אופקית.

(3) נגזור: $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$

נשווה לאפס $f'(x)=0$

לפי הגרף נקבל: $x=2$, $x=0$

$x=0$ לא בתחום הגדרה, ולכן $x=2$

לפי גרף II שיעור g הוא $\ln 8$

ולכן הנקודה היא $(2,\ln 8)$

הנגזרת שלילית מימין וחיובית משמאל לנקודה

ולכן $\boxed{(2,\ln 8) \text{ מקסימום}}$.

(4) g עולה כאשר ל- $f(x)$ ול- $f'(x)$ יש אותו סימן, והיא יורדת כאשר יש להן סימנים הפוכים.

לפי הגרפים נקבל:

תחום עלייה: $0<x<2$

תחומי ירידה: $-1<x<0$, $2<x<3$

(5) הפונקציה $g(x)$ שווה לאפס כאשר הפונקציה $f(x)$ שווה ל-1. יש 3 נקודות כאלו לפי גרף II, לכן: