פתרון הבחינה

במתמטיקה

מועד חורף מאוחר תשפ"א, 2021, שאלון: 35582

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע" :

1. נתון: נקודה K נמצאת על הפרבולה $y^2 = 4px$ $(p > 0)$.

שיעור ה־ y של נקודה K הוא 12 .

המרחק בין נקודה K ובין מוקד הפרבולה הוא 20 .

א. מצא את p (מצא את שתי האפשרויות).

נסמן את הערכים של p שמצאת בסעיף **א** ב־ p_1 ו־ p_2 . $p_1 < p_2$.

ישר מן הצורה $y = mx$ $(m \neq 0)$ חותך את הפרבולה $y^2 = 4p_1x$ בראשית הצירים ובנקודה נוספת, A ,

ואת הפרבולה $y^2 = 4p_2x$ בראשית הצירים ובנקודה נוספת, B .

הצב את הערכים p_1 ו־ p_2 שמצאת, וענה על סעיפים **ב-ג**.

ב. הבע את שיעורי נקודה A , ואת שיעורי נקודה B באמצעות m .

בעבור כל ישר $y = mx$ $(m \neq 0)$, נסמן ב־ M את אמצע הקטע AB הנוצר באופן המתואר.

ג. מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות הנקודות M האלה (ללא m).

פתרון:

א. נמצא את שיעור x של נקודה K:

$12^2 = 4px \longrightarrow x = \frac{36}{p}$

המרחק מהמוקד שווה למרחק מהמדריך.

מדריך הפרבולה הוא $x = -p$, ולכן:

$\frac{36}{p} - (-p) = 20$

$36 + p^2 = 20p$

$p^2 - 20p + 36 = 0$

$\boxed{p = 2}$ $\boxed{p = 18}$

ב. נתון: $P_1=2$, $P_2=18$

הפרבולה $y^2=4P_1x$ תהיה $y^2=8x$

והפרבולה $y^2=4P_2x$ תהיה $y^2=72x$

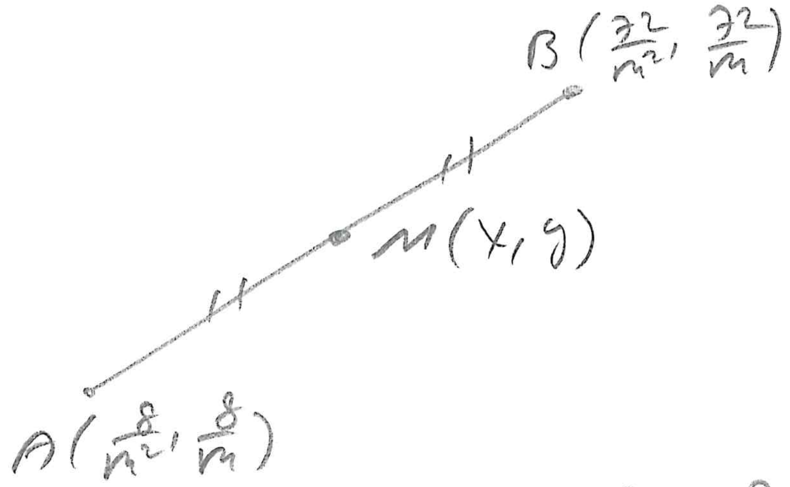
נמצא את נקודה A:

$$(mx)^2=8x$$
$$m^2x^2=8x$$
$$x=0 \qquad x=\frac{8}{m^2}$$
$$\downarrow$$
$$y=\frac{8}{m}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{A\left(\frac{8}{m^2},\frac{8}{m}\right)}$$

נמצא את נקודה B:

$$(mx)^2=72x$$
$$m^2x^2=72x$$
$$x=0 \qquad x=\frac{72}{m^2}$$
$$\downarrow$$
$$y=\frac{72}{m}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{B\left(\frac{72}{m^2},\frac{72}{m}\right)}$$

ג. נתבונן בקטע AB:



נשתמש בנוסחת אמצע קטע:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\frac{8}{m^2}+\frac{32}{m^2}}{2} \\ y = \dfrac{\frac{8}{m}+\frac{32}{m}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{20}{m^2} \\ y = \dfrac{20}{m} \rightarrow m = \dfrac{20}{y} \end{cases}$$

נציב:

$$x = \frac{20}{\left(\frac{20}{y}\right)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y^2 = 20x}$$

2. נתונה התיבה $ABCDA'B'C'D'$.

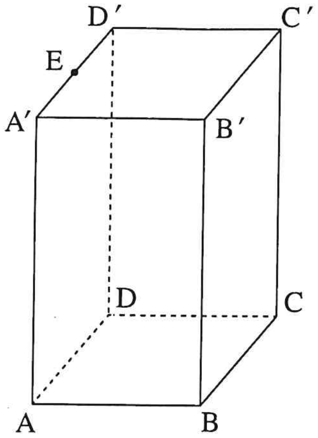
הנקודה K נמצאת על המקצוע CC' .

הנקודה E היא אמצע המקצוע $A'D'$ (ראה סרטוט).

נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$; $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$; $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$; $\overrightarrow{CK} = t \cdot \overrightarrow{CC'}$ ($t > 0$ הוא סקלר).

נתון: $|\underline{w}| = 6\sqrt{2}$; $|\underline{v}| = 6$; $|\underline{u}| = 3\sqrt{2}$,

$\sphericalangle EKB = 90^o$.



א. מצא את t .

נסמן ב־ π את המישור $CDA'B'$.

ב. **(1)** הוכח כי הישר BK מאונך למישור π .

(2) הסבר מדוע הישר EK מקביל למישור π .

נתון: $B(-1, 0, 1)$; $K(4, 5, -1)$,

$\underline{w} = (2, 2, -8)$.

ג. מצא את משוואת המישור π .

פתרון:

א. נחשב את 6 המכפלות:

מקצועות תיבה מאונכים: $\underline{u}\cdot\underline{v} = \underline{u}\cdot\underline{w} = \underline{v}\cdot\underline{w} = 0$

$\underline{u}\cdot\underline{u} = |\underline{u}|^2 = 18$

$\underline{v}\cdot\underline{v} = |\underline{v}|^2 = 36$

$\underline{w}\cdot\underline{w} = |\underline{w}|^2 = 72$

נתון: $\sphericalangle EKB = 90^o$

$\Downarrow$

$\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{BK} = 0$

נביע את הוקטורים:

$$\vec{EK}=\vec{ED'}+\vec{D'C'}+\vec{C'K}=\tfrac{1}{2}\underline{v}+\underline{u}-(1-t)\underline{w}$$

$$\vec{BK}=\vec{BC}+\vec{CK}=\underline{v}+t\underline{w}$$

נציב במכפלה:

$$\left(\tfrac{1}{2}\underline{v}+\underline{u}-(1-t)\underline{w}\right)\cdot\left(\underline{v}+t\underline{w}\right)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\tfrac{1}{2}\underline{v}\cdot\underline{v}-t(1-t)\underline{w}\cdot\underline{w}=0$$

$$18-72t(1-t)=0$$

$$1-4t+4t^2=0$$

$$(2t-1)^2=0$$

$$\boxed{t=\tfrac{1}{2}}$$

ד. (1) מתקיים:

$$\vec{BK}=\underline{v}+\tfrac{1}{2}\underline{w}$$

BK מוכל בפאה $BCC'B'$ ולכן $\vec{CD}\perp\vec{BK}$

כמו כן:

$$\vec{B'C}=-\underline{w}+\underline{v}$$

$$\vec{B'C}\cdot\vec{BK}=(-\underline{w}+\underline{v})\cdot\left(\underline{v}+\tfrac{1}{2}\underline{w}\right)=-\tfrac{1}{2}\underline{w}\cdot\underline{w}+\underline{v}\cdot\underline{v}$$

$$=-\tfrac{1}{2}\cdot 72+36=0\rightarrow \vec{B'C}\perp\vec{BK}$$

הישר BK מאונך לשני וקטורים שונים

תלויים לינארית ומוכלים במישור $CDA'B'$

ולכן הישר BK מאונך למישור $CDA'B'$.

ב) נתון כי $\overrightarrow{EK} \perp \overrightarrow{BK}$

הוכחנו כי המישור $CDA'B'$

מאונך לישר BK.

מכיוון שהישר EK מקביל למישור

$CDA'B'$ משום ששניהם מאונכים

לאותו ישר ונקודה K איננה מוכלת

במישור $CDA'B'$

ג. נתון: $B(-1,0,1)$, $K(4,5,-1)$, $\underline{u}=(2,2,-8)$

הווקטור $\overrightarrow{BK}$ הוא הנורמל של המישור:

$$\overrightarrow{BK}=K-B=(4,5,-1)-(-1,0,1)=(5,5,-2)$$

כלומר משוואת המישור היא $5x+5y-2z+d=0$

נמצא נקודה על המישור:

$\underline{u}=\overrightarrow{BB'}$

דוגמה ד:

$(2,2,-8)=B'-B$

$(2,2,-8)=B'-(-1,0,1)$

$\Downarrow$

$B'=(1,2,-7)$

נציב במשוואת המישור:

$5\cdot 1+5\cdot 2-2\cdot(-7)+d=0 \rightarrow d=-29$

ונקבל:

$\pi: \boxed{5x+5y-2z-29=0}$

3. **א.** פתור את המשוואה: $z^2 - (1+i)z + 2i + 2 = 0$.

אחד הפתרונות של המשוואה שפתרת נמצא ברביע הרביעי והוא מיוצג על ידי הנקודה A במישור גאוס.

הפתרון השני מיוצג על ידי הנקודה B במישור גאוס.

דרך הנקודה B עובר מעגל שמרכזו בראשית הצירים — O. הישר AO חותך את המעגל בנקודות C ו־ D .

במעגל חסום מצולע משוכלל בעל n צלעות.

נתון כי הנקודות D , C , B הן קודקודים של המצולע.

ב. מהו ה־ n האפשרי הקטן ביותר? נמק את תשובתך.

ג. בעבור הערך של n שמצאת בסעיף ב:

(1) רשום את המספרים המרוכבים המתאימים לקודקודי המצולע.

(2) כתוב משוואה שפתרונותיה הם כל המספרים המרוכבים המתאימים לקודקודי המצולע.

א) $z^2 - (1+i)z + 2i + 2 = 0$

נעזר בנוסחת השורשים:

$$z_{1,2} = \frac{(1+i) \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4(2i+2)}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{(1+i) \pm \sqrt{1+2i+i^2-8i-8}}{2} = \frac{(1+i) \pm \sqrt{-8-6i}}{2}$$

נטפל בשורש

$$\sqrt{-8-6i} = x+yi \quad /()^2$$

$$-8-6i = x^2 + 2xyi - y^2$$

$$\begin{cases} -8 = x^2 - y^2 \\ -6 = 2xy \end{cases}$$

$$xy = -3$$

$$\boxed{y = \frac{-3}{x}}$$

$$-8 = x^2 - \left(-\frac{3}{x}\right)^2$$

$$-8 = x^2 - \frac{9}{x^2}$$

$-8x^2 = x^4 - 9$

$0 = x^4 + 8x^2 - 9$

$x^2 = t$

$0 = t^2 + 8t - 9$

$t = 1 \qquad t = -9$

$x^2 = 1 \qquad x^2 = -9$

אין פתרון

$x = 1 \qquad x = -1$

$y = -3 \qquad y = 3$

קיבלנו

$\sqrt{-8-6i} = \pm(1-3i)$

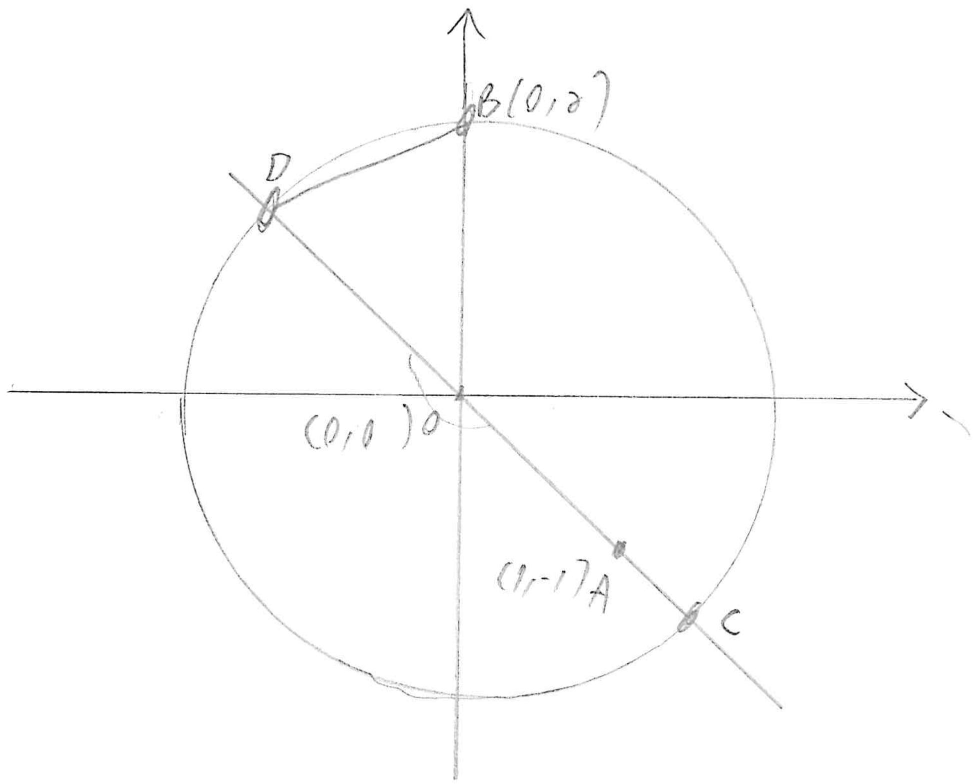
$Z_{1,2} = \frac{(1+i) \pm (1-3i)}{2}$

$\boxed{Z_1 = 1-i}$

$\boxed{Z_2 = 2i}$

בדיקה ודקדוק:

ג)



$z_1 = 1-i$ $\qquad z_2 = 2i =$

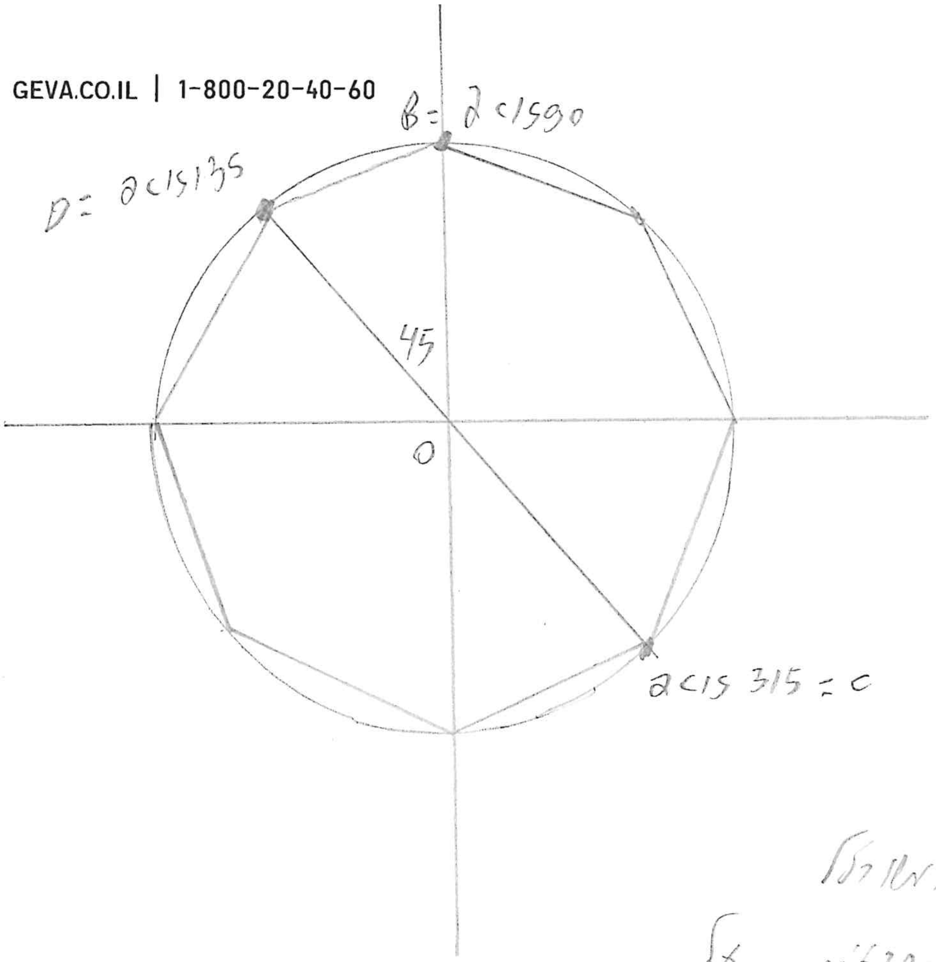
$A(1,-1)$ $\qquad B(0,2)$

$z_1 = \sqrt{2}\,cis\,315$ $\qquad z_2 = 2cis90$ הצורה טריגונומטרית

נק' C על המעגל שרדיוסו 2: ← $\boxed{C = 2cis\,315^\circ}$

נק' D על מעגל שרדיוסו 2, הזווית המתאימה לה קטנה ב-180° מהזווית המתאימה לנק' C.

$\boxed{D = 2cis\,135^\circ}$



מהגרף המשורטט
הזווית המרכזית של
$\measuredangle BOD = 45^\circ \longrightarrow$ כל מיתר היא 45°
(אם מחלקים שלם) ולכן מס' הצלעות
יהיה לפחות $\frac{360^\circ}{45^\circ} = 8$

ה-n הכי קטן יותר הוא $\boxed{8}$.

ג (1)

$2cis0^\circ, 2cis45^\circ, 2cis90, 2cis135, 2cis180, 2cis225, 2cis270, 2cis315$

אלגברית:

$(2,0), (\sqrt{2},\sqrt{2}), (0,2), (-\sqrt{2},\sqrt{2})$

$(-2,0), (-\sqrt{2},-\sqrt{2}), (0,-2), (\sqrt{2},-\sqrt{2})$

4) (2) נמצא משוואה בעלת 8 פתרונות
המהווים קודקודים של מתומן משוכלל.

$$z^8 = \boxed{?}$$

נציב את אחד הפתרונות:

$$(2cis90^\circ)^8 = ?$$

$$\boxed{256 = ?}$$

המשוואה היא

$$\boxed{z^8 = 256}$$

4. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת וגזירה לכל x. הגרף שלה חותך את ציר ה־ x בראשית הצירים <u>בלבד</u>.

נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ הן $(1\,,1)$ ו־ $(-1\,,-1)$ <u>בלבד</u>.

הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ מתאפסת בעבור $x=1$ ו־ $x=-1$ <u>בלבד</u>.

ציר ה־ x הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $g(x)$ בעבור x שואף לאינסוף ובעבור x שואף למינוס אינסוף.

א. **(1)** סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) רשום את תחומי החיוביות והשליליות של $g'(x)$ (פונקציית הנגזרת של $g(x)$).

נתונה הפונקציה $f(x)=e^{g(x)}-g(x)$.

ב. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

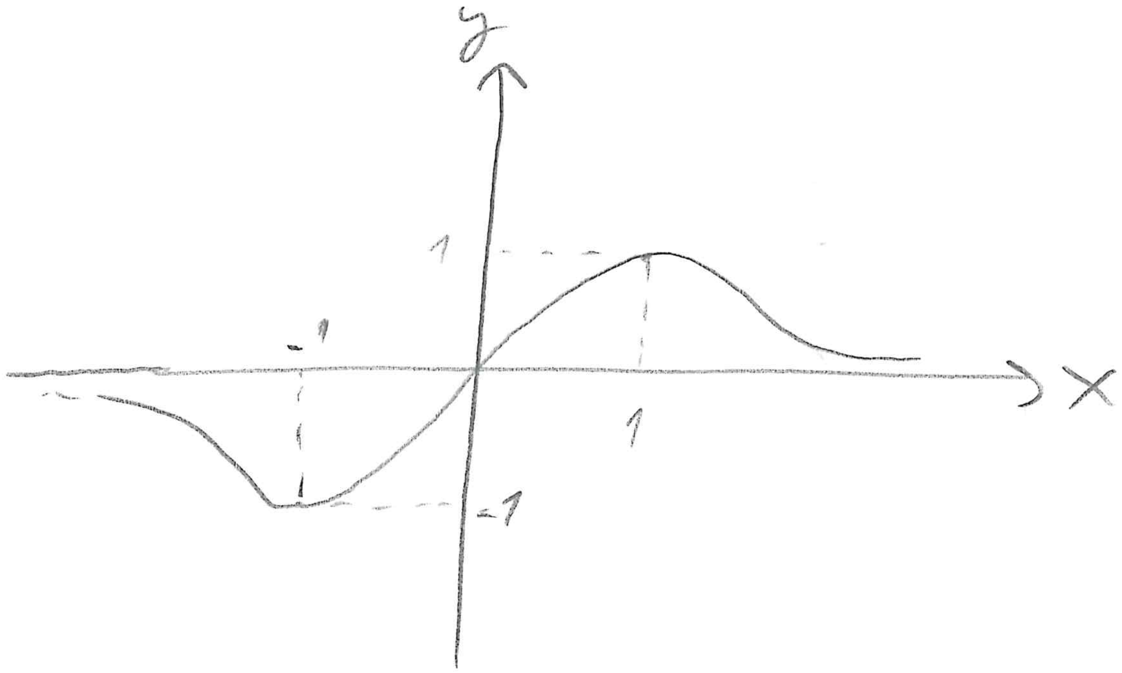
(2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

<u>פתרון:</u>

א. (1)



(2) הנגזרת חיובית כשהפונקציה עולה, והיא שלילית כשהפונקציה יורדת:

<u>חיובית:</u> $-1<x<1$

<u>שלילית:</u> $1<x$ או $x<-1$

ב.

$$f(x)=e^{g(x)}-g(x)$$

(1) תחום הגדרה הוא: $\boxed{\text{כל } x}$.

(2) $x\to\infty \quad f(x)=e^0-0=1 \to y=1$

$x\to-\infty \quad f(x)=e^0-0=1 \to y=1$

האסימפטוטה האופקית היא $\boxed{y=1}$

(3) $$f'(x)=g'(x)\cdot e^{g(x)}-g'(x)$$

$$g'(x)e^{g(x)}-g'(x)=0$$

$$g'(x)\left(e^{g(x)}-1\right)=0$$

$g'(x)=0$ → $x=1$, $x=-1$

$e^{g(x)}=1$ → $g(x)=0$ → $x=0$

$f(0)=e^{g(0)}-g(0)=1 \to (0,1)$

$f(1)=e^{g(1)}-g(1)=e-1 \to (1,e-1)$

$f(-1)=e^{g(-1)}-g(-1)=\frac{1}{e}+1 \to (-1,\frac{1}{e}+1)$

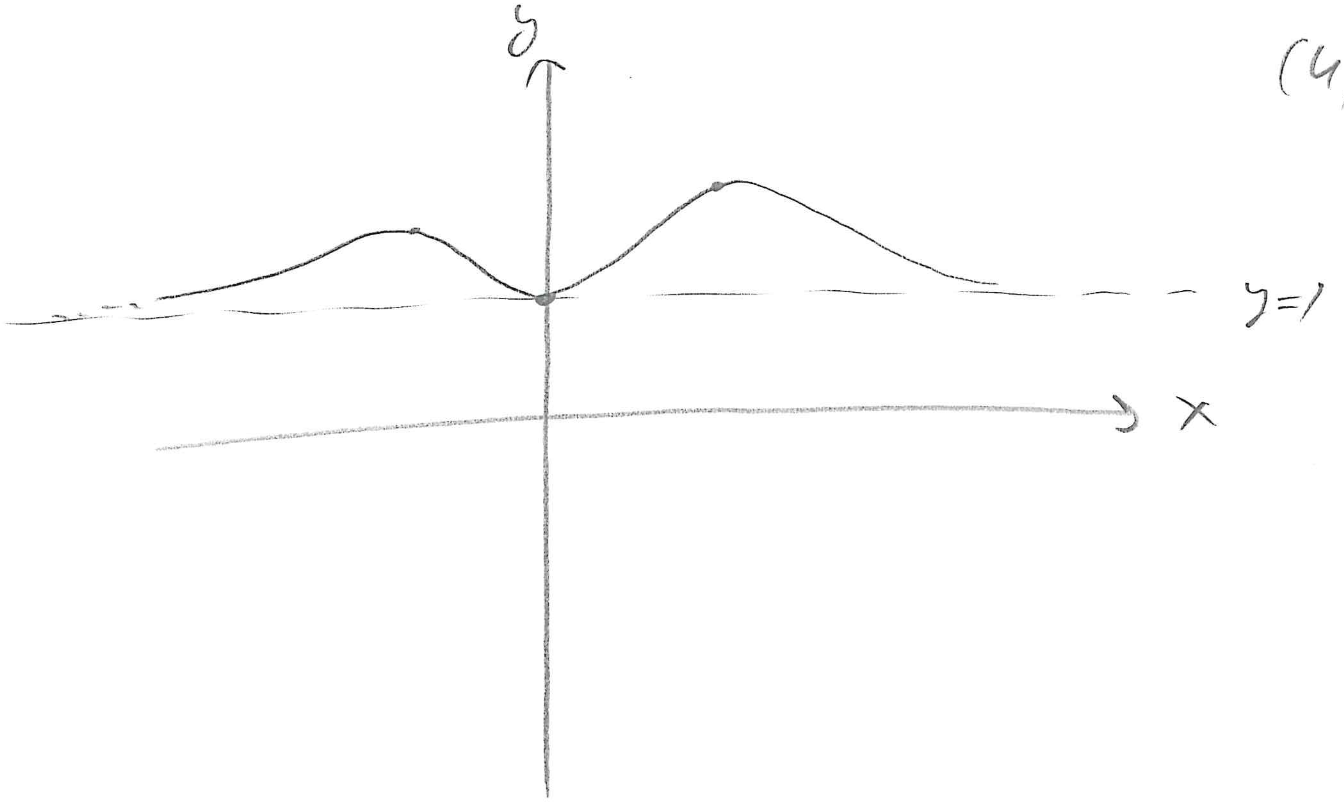
הערה ד' לפי ערכי y ניתן להסיק כי:

$(1, e-1)$ מקסימום

$(0, 1)$ מינימום

$(-1, \frac{1}{e}+1)$ מקסימום

(4)



5. נתונה משפחת הפונקציות $f(x) = ax - \ell n\left(\frac{x}{a}\right)$, $a \neq 0$ הוא פרמטר.

ענה על סעיפים **א-ג** בעבור $a > 0$ ובעבור $a < 0$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הבע באמצעות a את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה־ x בשתי נקודות שונות.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = f'(x)$ (נגזרת הפונקציה $f(x)$) המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

נתון: $a > 0$.

ד. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, הישר $x = \frac{2}{a}$ וציר ה־ x ,

והוכח כי השטח אינו תלוי ב־ a .

פתרון:

$$f(x) = ax - \ln\left(\frac{x}{a}\right)$$

א.

$0<a$

$0<\frac{x}{a}$

$\boxed{0<x}$

$a<0$

$0<\frac{x}{a}$

$\boxed{x<0}$

ב. נגזרת:

$$f'(x) = a - \frac{1}{x}$$

$$\downarrow$$

$$a - \frac{1}{x} = 0$$

$$\downarrow$$

$$x = \frac{1}{a}$$

$$\downarrow$$

$$y = a \cdot \frac{1}{a} - \ln\left(\frac{\frac{1}{a}}{a}\right) = 1 - \ln\left(\frac{1}{a^2}\right) = 1 + \ln a^2$$

$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \rightarrow$ מינימום

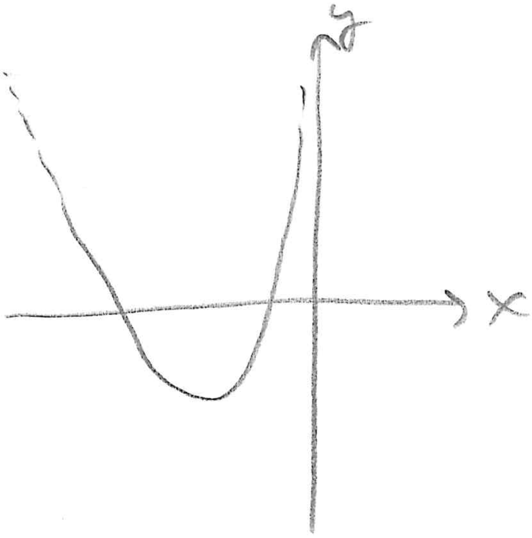
מכיוון שלפונקציה יש נקודת מינימום

עבור $(\frac{1}{a}, 1+\ln a^2)$ עבור $0<a$ ועבור $a<0$

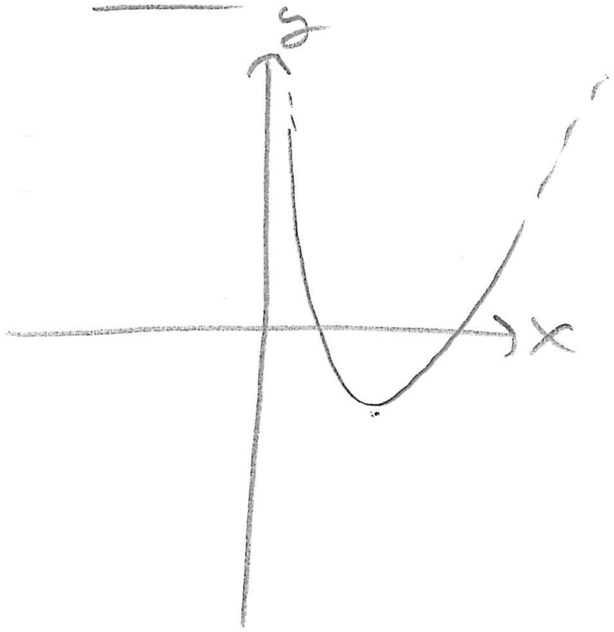
לסיכום $\boxed{\text{מינימום } (\frac{1}{a}, 1+\ln a^2)}$

ג.

$a<0$



$0<a$



3. נתון: $0<a$, $g(x) = f'(x)$

$\Downarrow$

$g(x) = a - \frac{1}{x}$

חיתוך עם ציר x: $a-\frac{1}{x}=0 \to x=\frac{1}{a}$

מכיון שהשטח המוגבל ע"י $x=\frac{1}{a}$, $x=\frac{2}{a}$

נחשב אותו בעזרת האינטגרל הבא:

$$S=\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{2}{a}}\left(a-\frac{1}{x}\right)dx=\left[ax-\ln x\right]_{\frac{1}{a}}^{\frac{2}{a}}=$$

$$S=\left[a\cdot\frac{2}{a}-\ln\frac{2}{a}\right]-\left[a\cdot\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}\right]=$$

$$S=2-\ln\frac{2}{a}-1+\ln\frac{1}{a}=1+\ln\frac{\left(\frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{2}{a}\right)}=$$

$$S=1+\ln\frac{1}{2}$$

$$\boxed{S=1-\ln 2}$$