

פתרון הבחינה

במתמטיקה

מועד חורף מאוחר תשפ"א, 2021, שאלון: 35581

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע":

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



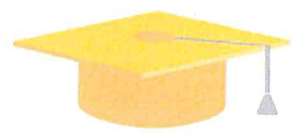
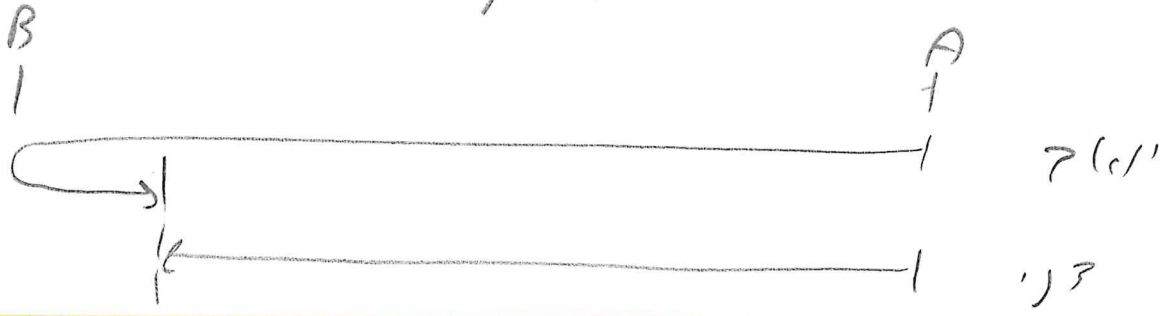
1. יואב ודני יצאו באותו הזמן לרכוב על אופניים. הם רכבו במסלול ישר שהחל בנקודה A והסתיים בנקודה B. לאורך המסלול רכב כל אחד מהם במהירות קבועה. יואב הגיע לנקודה B, ומייד חזר באותו המסלול לנקודה A. כאשר היה יואב בדרכו חזרה מ-B ל-A והגיע לאמצע המסלול AB, הגיע דני לנקודה B.
- א. מהו היחס בין המהירות של יואב ובין המהירות של דני? נמק.
- 40 דקות לאחר שהתחילו לרכוב, כאשר יואב היה בדרכו חזרה מ-B ל-A, נפגשו יואב ודני.
- ב. הבע את אורך המסלול AB באמצעות המהירות של דני.
- 30 דקות לאחר שהתחילו לרכוב, יואב עדיין לא הגיע לנקודה B, והמרחק של דני מן הנקודה A היה גדול ב-5 ק"מ מן המרחק של יואב מן הנקודה B.
- ג. מצא את אורך המסלול AB.
- ד. כמה זמן עבר מרגע יציאתם של יואב ודני מן הנקודה A עד שהמרחק ביניהם היה 2 ק"מ? מצא שתיים מבין שלוש האפשרויות.

פתרון:

א. יואב הספיק לרכוב פעם וחלי אה המסלול בזמן שדני רכב פעם אחת אה המסלול, ולכן יחס המהירות הוא:

$$\frac{v_{יואב}}{v_{דני}} = 1.5$$

ג. נניח אה המרחק:



נניח א - הנדונים בטבלה:

ציר	מתחית	זרם	מאזר התנועה
V	1.5V	$\frac{2}{3}$	יואל גבע מכשיר
$\frac{2}{3}V$	V	$\frac{2}{3}$	פני גבע מכשיר

הציון שרכב יואל גבע אמאל היא V
 והציון שרכב פני גבע אמאל היא $\frac{2}{3}V$
 ביחס הב רכבו נחמה כפול זאכני:

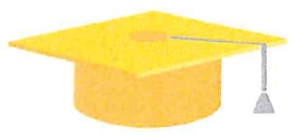
$$2AB = V + \frac{2}{3}V \Rightarrow \boxed{AB = \frac{5}{6}V}$$

ד. ג - סו צדל יואל גודר נחמה טל:

$$\frac{1}{2} \cdot 1.5V = \frac{3}{4}V$$

ג - סו צדל פני גודר נחמה טל: $\frac{1}{2}V$
 להנחה טל יואל נחמה צדל ב הווא:

$$\frac{5}{6}V - \frac{3}{4}V = \frac{1}{12}V$$



הכאן נקבן שוואה:

$$\frac{1}{12}V + 5 = \frac{1}{2}V$$

↓

$$\frac{5}{12}V = 5$$

$$V = 12$$

↓

$$AB = 10$$

3. המהירות של יואל 18 זמ"ס ושל בני 2 זמ"ס

מכאן שאחרי 20 דקה הלמדן ביניהם
היה 2 ד"מ בקצב הולשות.

המהירות השווה שלהם 30 זמ"ס, לכן
הם עוקרין 2 ד"מ - קצב $\frac{60}{15} = 4$ קצב. האורך 4

דקה לפני עכשיו הילד ביניהם 2 ד"מ.

זה דקה אחרי 30 דקה מהלך שילד

(התבטא השלישי יזרה 44 דקה אחרי שילדון)
5 ד"מ

נחידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.

אל תתפשר עליה.



2. הסדרה a_n היא סדרה הנדסית המקיימת לכל n טבעי את הכלל: $3a_{n+2} + 5a_{n+1} - 2a_n = 0$. נתון כי $a_1 \neq 0$.

א. מצא את שני הערכים האפשריים למנת הסדרה a_n .

נסמן את איבריה של הסדרה המקיימת את הכלל ולא מתכנסת ב- b_1, b_2, b_3, \dots .

נסמן את איבריה של הסדרה המקיימת את הכלל ומתכנסת ב- c_1, c_2, c_3, \dots .

ב. הסבר מדוע הסדרה $b_1c_1, b_2c_2, b_3c_3, \dots$ היא סדרה הנדסית מתכנסת.

נתון: $b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + \dots = 15$

$b_1 = c_1 = m$

ג. מצא את m (רשום את שתי האפשרויות).

ענה על סעיף ד בעבור ה- m הקטן מבין שתי האפשרויות שמצאת בסעיף ג.

ד. נתון: $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k = 1,705$

מצא את k .

פתרון:

$$3a_{n+2} + 5a_{n+1} - 2a_n = 0$$

$$3 \cdot a_n \cdot q^2 + 5 \cdot a_n \cdot q - 2a_n = 0$$

$a_n \neq 0$, ולכן (גורם a_n ה-):

גם צורה הנכונה

$$3q^2 + 5q - 2 = 0$$

$$\boxed{q = -2} \quad \boxed{q = \frac{1}{3}}$$

ה. הסדרה b_1, b_2, b_3, \dots

היא סדרה שהגורם שלה הוא -2

הערכים שהיא מקיימת הם $q = -2$ ו- $q = \frac{1}{3}$

הערכים שהיא מקיימת הם $q = -2$ ו- $q = \frac{1}{3}$



הכיוון שהימין היא בין 0 לקיון -1, הסדרה מתכנסת.

$$\left. \begin{array}{l} b_1 = c_1 = m \\ S = 15 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ד. נתון: (1)} \\ \text{(2)} \end{array}$$

$$\frac{m^2}{1 + \frac{2}{3}} = 15 \Rightarrow m^2 = 25 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\boxed{m = 5, m = -5}$$

3. כגון $m = -5$.

$$S_k = 1.705 \quad \text{(נתון)}$$

$$\frac{-5((-2)^k - 1)}{-2 - 1} = 1.705$$

$$(-2)^k - 1 = 1023$$

$$(-2)^k = 1024$$

$$(-2)^k = (-2)^{10}$$

$$\boxed{k = 10}$$



3. בכד יש כדורים בשלושה צבעים בלבד: אדום, צהוב, כחול.

נתון:

ההסתברות להוציא כדור אדום היא $\frac{5}{8}$.

מספר הכדורים הצהובים גדול פי 3 ממספר הכדורים הכחולים.

$\frac{4}{5}$ מן הכדורים האדומים שבכדור $\frac{8}{9}$ מן הכדורים הצהובים שבכדור מחוספסים, וכל שאר הכדורים שבכדור חלקים.

הוציאו באקראי כדור מן הכד והחזירו אותו לכד. את הפעולה הזאת (הוצאה באקראי והחזרה) עשו 8 פעמים.

א. מהי ההסתברות שבדיוק 3 מן הכדורים שהוציאו הם מחוספסים?

ענה על סעיף ב בעבור כד שבו 32 כדורים.

ב. הוציאו באקראי בזה אחר זה 2 כדורים מן הכד (ללא החזרה).

(1) מהי ההסתברות ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים?

(2) ידוע ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים. מהי ההסתברות שהכדור הראשון שהוציאו היה

בצבע אדום?

ענה על סעיף ג בעבור כד שבו n כדורים.

נתון: $50 < n < 100$.

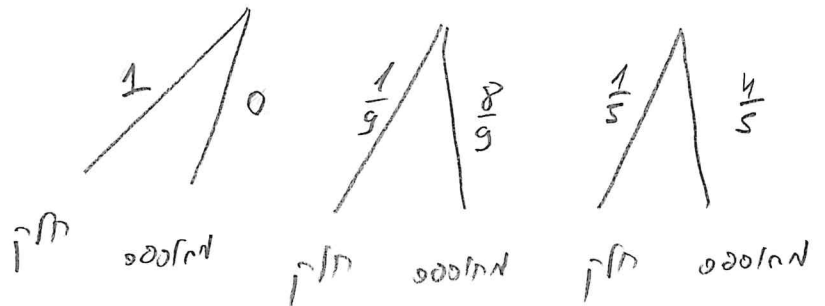
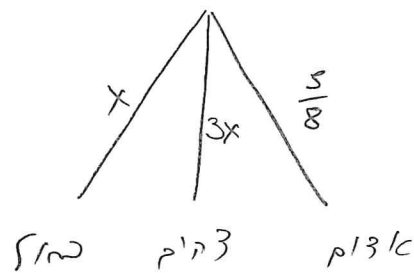
ג. מצא את n (את שתי האפשרויות).

$$P(\text{כחול}) + P(\text{צהוב}) + P(\text{אדום}) = 1$$

$$4x + \frac{5}{8} = 1$$

$$4x = \frac{3}{8}$$

$$x = \frac{3}{32}$$



(חשב את ההסתברות לקבלת כדור מחוספס) $= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{3}{32} \cdot \frac{8}{9}$

$P(\text{כדור מחוספס}) = \frac{3}{4}$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

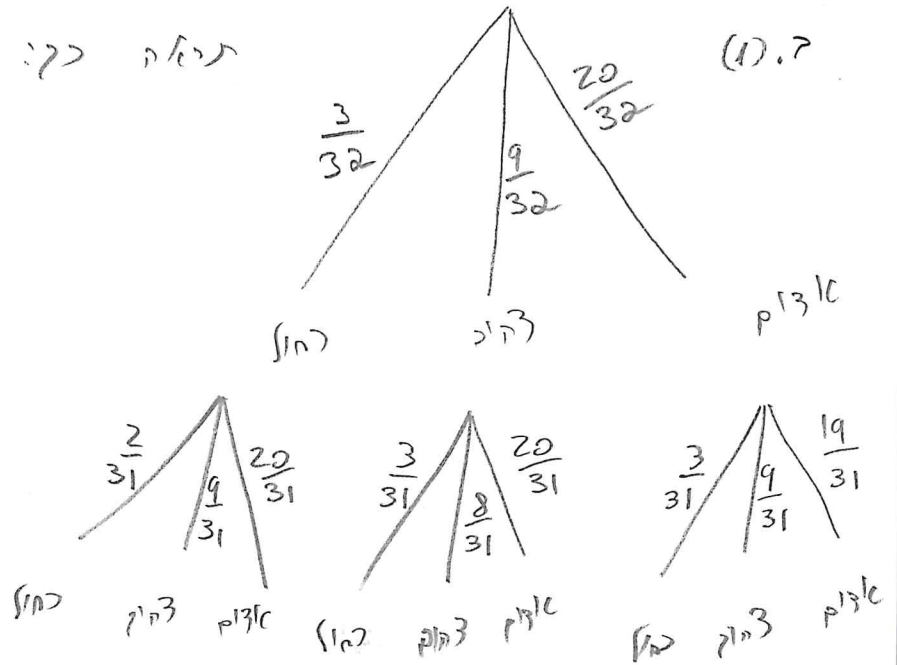
הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



3) (א) ישנם הניסוח הניתני נאמר : $k=8$, $K=3$, $p = \frac{3}{4}$

$$P\left(\binom{7}{3} \text{ מני 8 ניסוחים} \right) = \binom{8}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{189}{8192}$$

העל
גזע/ה 32 כנולים ציטאנה (העל)
ניהק כק:



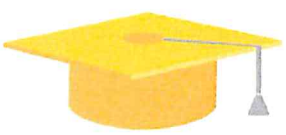
$$P\left(\begin{matrix} \text{שני כנולים} \\ \text{קצרים} \\ \text{שניים} \end{matrix} \right) = 1 - (P(\text{שני ארוכים}) + P(\text{שני בינוניים}) + P(\text{שני הולים}))$$

$$P\left(\begin{matrix} \text{שני כנולים} \\ \text{קצרים} \\ \text{שניים} \end{matrix} \right) = 1 - \frac{20}{32} \cdot \frac{19}{31} - \frac{9}{32} \cdot \frac{8}{31} - \frac{3}{32} \cdot \frac{2}{31} = \frac{267}{496}$$

$$P\left(\begin{matrix} \text{כנול} \\ \text{האמן} \\ \text{ארוך} \end{matrix} / \begin{matrix} \text{שני} \\ \text{כנולים} \\ \text{קצרים} \\ \text{שניים} \end{matrix} \right) = \frac{P\left(\begin{matrix} \text{שני כנולים} \\ \text{קצרים} \\ \text{שניים} \end{matrix} \right)}{P(\text{שני כנולים קצרים שניים})}$$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



$$P\left(\begin{matrix} \text{כזר} \\ \text{כזר} \\ \text{כזר} \end{matrix} / \begin{matrix} \text{כזר} \\ \text{כזר} \\ \text{כזר} \end{matrix}\right) = \frac{\frac{20}{32} \cdot \frac{9}{31} + \frac{20}{32} \cdot \frac{3}{31}}{\frac{267}{496}} = \frac{40}{89} \quad (27)$$

ג. (תבונן) בהסתברות לכזר (כחל) : $P(\text{כזר}) = \frac{3}{32}$

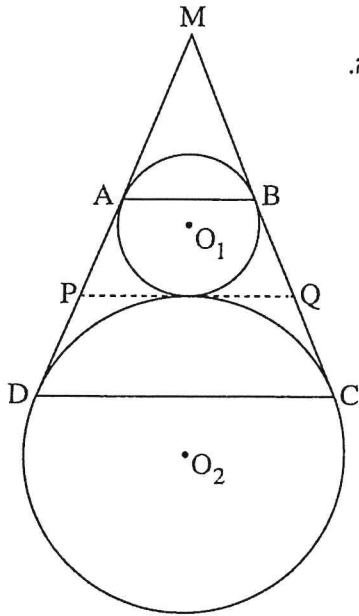
ע"י שהסתברות כללית תתקבל אם הכזרים צריכים להיות כבעיה של

$$32 \quad (32 \text{ לא אפשרי מכיוון } | - 100 < 25) \quad \text{ולכן, } n=64, \lambda=96$$

לשם לבדוק שמספר הכזרים האלו יתאים לחוקי קצורה שלמה

ש $\frac{8}{9}! \frac{8}{9}$, $\frac{4}{5}! \frac{4}{5}$. מתחילת היותו של $\frac{1}{5}!$ מתחשבים את התקיים מהכזרים האלו והצדוקים.





4. בציר שלפניך מתוארים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ. מרכזי המעגלים הם הנקודות O_1 ו- O_2 , והרדיוסים שלהם הם R_1 ו- R_2 בהתאמה. מן הנקודה M , הנמצאת מחוץ לשני המעגלים, יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל O_1 בנקודות A ו- B , ולמעגל O_2 בנקודות D ו- C , כמתואר בציר. המשיק בנקודה המשותפת לשני המעגלים חותך את הישרים MC ו- MD בנקודות P ו- Q בהתאמה.
- הוכח כי המרובע $ABCD$ הוא טרפז שווה שוקיים.
 - הוכח כי PQ שווה לשוק הטרפז $ABCD$.
 - הוכח כי $\angle O_1 Q O_2 = 90^\circ$.
- נתון: $R_1 = 4$, $R_2 = 9$.
- מצא את PQ .

ניתוח

נתון

נתון

שני משפטים אע"פ היוצאים.
למרות נדונה שלוק.

סיסור דלעק שלוק

הוא צלע שלל בשולש
AMB מיונת שלוק שלוק

פתרון:

למש

① $MA = MB$, $MD = MC$ משפטים

למש O_2

② $MA = MB$, $MD = MC$ משפטים

למש O_1

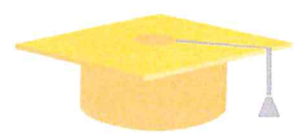
③ $MA = MB$

$MD = MC$

④ $AD = BC$

⑤ $\angle MAB = \angle MBA =$

$= 90 - \frac{\angle AOB}{2}$



נימוק
 מחל דלגה מול גשולס אדמ
 מיונה סוללה מול
 מול מול אקלמה
 כלל המעבר
 אמ בן שתי ישרים, וישר
 פליטי שמתן אולם יש
 מול סוללה מוללה מול
 הישרים מהבוליק.
 נתיבים בקדוזה מ
 לפי 4, 9, 10

לענין
 (6) $\angle MCD = \angle MDC = 90 - \frac{\angle DMC}{2}$
 (7) $\angle DMC = \angle AMB$
 (8) $\angle MAB = \angle MDC$
 (9) $AB \parallel CD$
 (10) $AD \parallel BC$
 (11) $ABCD$ סרפס מול
 שידוייק
 מילא א'

סימון
 שני שידוייק לענין הווליק
 מוללה מוללה מוללה

(12) נסמן את נקודה ההלוקה
 על המענין ג - E
 (13) $\begin{cases} \angle C = \angle E \\ \angle B = \angle E \end{cases}$





נימוק
 שני משפטים אנחנו היו צריכים
 מאותם נחוצה שאלים
 חיבור הטלים
 חישובי אפי 4, 13, 14, 15

לג
 $\left\{ \begin{array}{l} PD = PE \\ PA = PE \end{array} \right.$ (14)
 $PQ = PE + QE$ (15)
 $PQ = BC = AD$ (16)
 נ.ש.ל. ק'

בניא קטר

(17) נגדיו הטלים O_1, Q
 -! O_2, Q

הטל במהדר נדונה מה
 אנחנו עם מרכז המעגל
 חוצה את המסלול שבין שני
 המשפטים היו צריכים להנחות
 אנחנו

$\left\{ \begin{array}{l} \sphericalangle BQO_1 = \sphericalangle EQO_1 \\ \sphericalangle CQO_2 = \sphericalangle EQO_2 \end{array} \right.$ (18)

שאלת א/5 שאלה

(19) $\sphericalangle BQO_1 + \sphericalangle EQO_1 +$
 $\sphericalangle CQO_2 + \sphericalangle EQO_2 = 180^\circ$

חיבור א/5

(20) $\sphericalangle O_1, Q, O_2 =$
 $\sphericalangle O_1, Q, E + \sphericalangle O_2, Q, E$



נימוק

חישוק. אפי 9, 20,

טעם

(21) $\neq 0, \perp O_2 = 90^\circ$

מ.ש.ל. 2

(22) \perp וקדי דילג O_1, O_2 קנייה עסר

דילג מרכזיב של מעגליק
משידוק שאונן אלגיק
המשנה בנדונצת ההלכה

(23) $Q \perp O_1, O_2$

דילג המרכזיק = מעגליק
משיקים מבתל עוקר
בנדונצת ההלכה השומת

(24) O_1, O_2 עוקר צוקר
הנדונצת E

מצבם האוקיה איהר כמשולס
ישו 511- עלוה אכפא
התלג שיהו מקפה 8
התרה. אפי 2, 23

(25) $Q \perp = O_2 \perp \cdot O_1 \perp$

(נימוק)

(26) $\begin{cases} O_2 \perp = 9 \\ O_1 \perp = 9 \end{cases}$

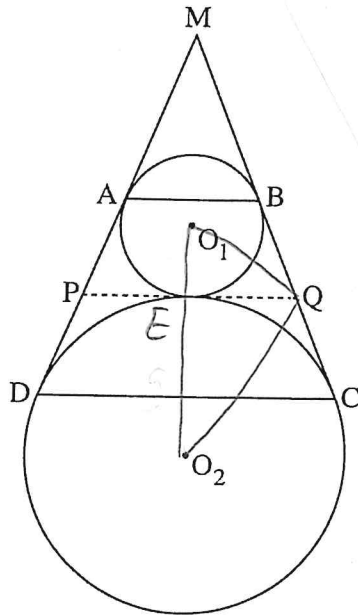


נליון
חישוב

טלום
 $QE = 6$ (27)

חישוב. אפי. 14,4, 75,

$PQ = 12$ (28)
נליון 3 ✓



5.

בציור שלפניך מתואר משולש חד-זוויות ABC החסום במעגל שהרדיוס שלו הוא R.

המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשיך הקטע AB בנקודה D.

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD הוא 2R.

נסמן: $\angle BAC = \alpha$.

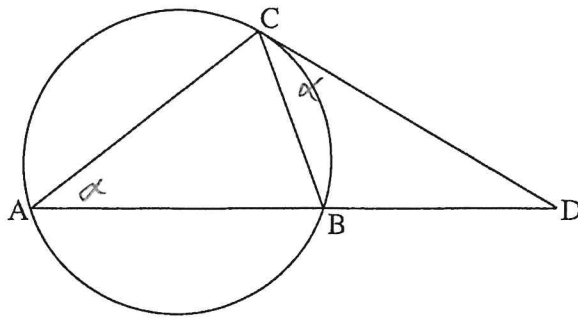
א. הבע את BD באמצעות R ו- α .

נתון: $\frac{CD}{BD} = \frac{3}{2}$.

ב. מצא את α .

נתון: שטח המשולש CBD הוא 27.

ג. מצא את R.



Ⓚ) נתון $\angle BAC = \alpha$, $\angle DCB = \alpha$ (המשולש $\triangle DCB$ זווית חיצונית שווה לזווית פנימית) $\angle DCB = \alpha$ (זווית חיצונית שווה לזווית פנימית)

$\triangle ABC$, משולש חסינוסים זרועות:

$$CB = 2R \sin \alpha \leftarrow \frac{CB}{\sin \alpha} = 2R$$

$\triangle ACD$, משולש חסינוסים זרועות, גודל $\angle CAD = \alpha$ (זווית חיצונית שווה לזווית פנימית) $\angle CAD = \alpha$ (זווית חיצונית שווה לזווית פנימית)

$$CD = 4R \sin \alpha \leftarrow \frac{CD}{\sin \alpha} = 2 \cdot (2R)$$

$\triangle CBD$ גודל $\angle DCB = \alpha$ משולש חסינוסים זרועות:

$$BD^2 = (2R \sin \alpha)^2 + (4R \sin \alpha)^2 - 2 \cdot 2R \sin \alpha \cdot 4R \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$



$$BD^2 = 4R^2 \sin^2 \alpha + 16R^2 \sin^2 \alpha - 16R^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

$$BD^2 = 20R^2 \sin^2 \alpha - 16R^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

$$BD = \sqrt{4R^2 \sin^2 \alpha (5 - 4 \cos \alpha)} = 2R \sin \alpha \sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$$

(7) $\frac{CD}{BD} = \frac{3}{2}$

$$\frac{4R \sin \alpha}{2R \sin \alpha \sqrt{5 - 4 \cos \alpha}} = \frac{3}{2} \quad \text{כצד וסדרים:}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}} = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{5 - 4 \cos \alpha} = \frac{4}{3} \quad / 17^2$$

$$5 - 4 \cos \alpha = \frac{16}{9}$$

$$\cos \alpha = \frac{29}{36}$$

$$\rightarrow \alpha = 36.34^\circ$$



(2)

$$S_{\Delta CBO} = 27$$

$$\downarrow$$

$$\frac{CB \cdot CD \cdot \sin \alpha}{2} = 27$$

$$\frac{2R \sin \alpha \cdot 4R \sin \alpha \cdot \sin \alpha}{2} = 27$$

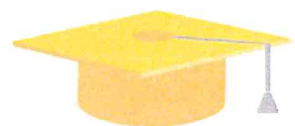
$$4R^3 \sin^3 \alpha = 27$$

$$4R^3 (\sin 36.34^\circ)^3 = 27$$

$$\alpha = 36.34^\circ \quad 73^\circ$$

$$R^3 = 32.44$$

$$R = 5.696$$



6. נתונה הפונקציה $f(x) = \cos^3(x) \cdot \sin(x)$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.
- מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
 - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 - נתונה הפונקציה $g(x) = a \cdot f(x)$, $a > 0$. הוא פרמטר.
 - הבע באמצעות a את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 0$.
 - הישר שמצאת בסעיף ג אינו חותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה נוספת. נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי הישר שמצאת בסעיף ג ועל ידי הישר $x = \frac{\pi}{2}$ שווה ל- $(\frac{\pi^2}{2} - 1)$.
 - מצא את a .

פתרון:

1. הפונקציה מעלה לפי x בתחום.

(סדר):

$$f'(x) = -3\cos^2 x \cdot \sin^2 x + \cos^4 x$$

$$-3\cos^2 x \sin^2 x + \cos^4 x = 0$$

(נעזר באינסוף ופירוק):

$$\cos^2 x (-3\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$3\sin^2 x = \cos^2 x \quad /: \cos^2 x \neq 0$$

$$3\sin^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{3} \quad / \sqrt{\quad}$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{5\pi}{6}$$

(גב ב C) - עדיף ש (הנאמר):



x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{7}$	π
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	
$f(x)$.	↗	.	↘		↘	.	↗	.

$x = \frac{\pi}{2}$ קנקל צה שדה

אין נדבר דיפון

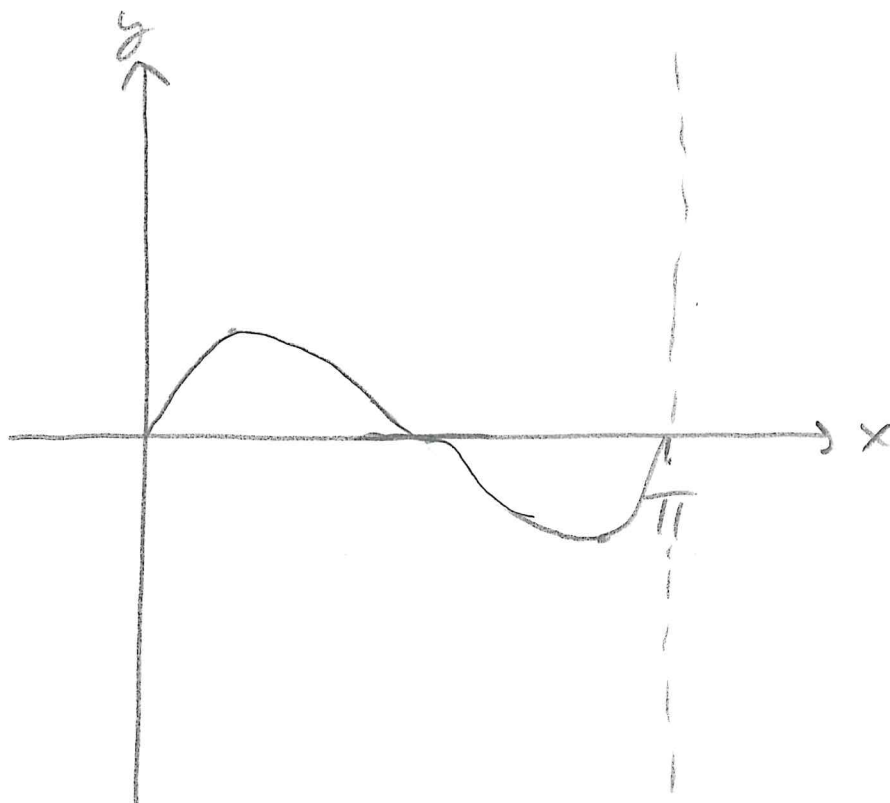
נס כנס:

$(0, 0)$ מינימום

$(\frac{\pi}{6}, 0.32)$ מקסימום

$(\frac{5\pi}{6}, -0.32)$ מינימום

$(\pi, 0)$ מקסימום



→ נשכח:



d. $0 < a$; $g(x) = a \cdot f(x)$

$m = g'(0) = a \cdot f'(0) = a$ שיפוע הנש"ד:

$g(0) = a \cdot f(0) = 0$ סינוי ה-g:

$y = ax$

משוואת הנש"ד:

3. העטרה הנתון סמוך ל"ה הישר $y = ax$

ות"ה הפונקציה $f(x)$ (אם \sin שיהיה \sqrt{x})

לפונקציה $f(x)$ בתחום $0 < x < \frac{\pi}{2}$

ולכן העטרה נתון ל"ה האינטגרל הבא:

$$S_{\text{נתון}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax - a \cdot \cos^2 x \sin x) dx$$

נשתמש בנוסחה:

$$\int \cos^h x \cdot \sin x dx = -\frac{\cos^{h+1} x}{h+1} + C$$

$$S_{\text{נתון}} = \left[\frac{ax^2}{2} + \frac{a \cos^3 x}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

והתוצאה:



$$S = \left\{ \frac{a\pi^2}{8} + c \right\} - \left\{ 0 + \frac{a}{4} \right\} = \frac{a\pi^2}{8} - \frac{a}{4}$$

נשווה לטבלת הנתיב:

$$\frac{a\pi^2}{8} - \frac{a}{4} = \frac{\pi^2}{2} - 1 \quad | \cdot 8$$

$$a\pi^2 - 2a = 4\pi^2 - 8$$

$$a = \frac{4\pi^2 - 8}{\pi^2 - 2} = 4$$

אם נופי: $a=4$



7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$. a הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) בעבור אילו ערכים של הפרמטר a אין לפונקציה $f(x)$ נקודות קיצון? נמק.

(2) במקרים שיש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון, הבע באמצעות a את שיעוריה וקבע את סוגה.

ג. סרטט בנפרד סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ לכל אחד מן התחומים i-iii של הפרמטר a שלפניך:

i $a > 0$

ii $a < 0$

iii $a = 0$

נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) - b$. b הוא פרמטר.

נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות.

ד. (1) מצא את התחום של הפרמטר a . נמק.

(2) הבע את התחום של הפרמטר b באמצעות a . נמק.

כ. $x > 0$

2. (1)

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - (x+a) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x - x - a}{2\sqrt{x}}}{\frac{x}{1}}$$

$$f'(x) = \frac{x - a}{2x\sqrt{x}} = 0$$

$$x = a$$

זכור $a \geq 0$ לא תהיה נק' קיצון, מכיוון שתמיד ההצבה $x > 0$



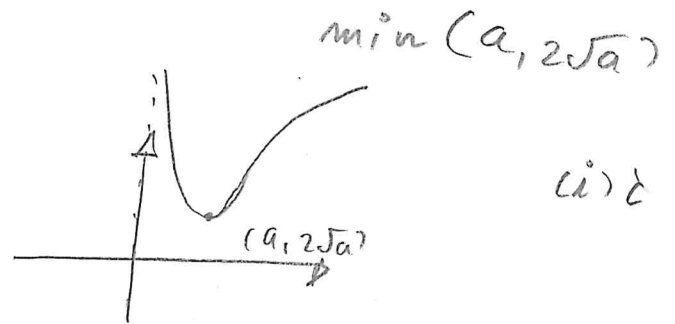
ב(2) בתחום ההפרדה המנוהג של הנגזרת תמיד חילוקי קיצון ולכן נעזיר בעזרת שניה כך שאת המנה ע"ה לנסות קיצון

$$f''(x) = 1$$

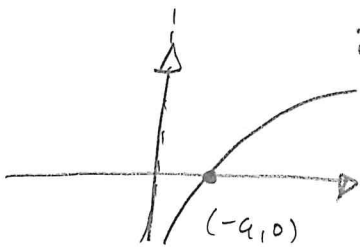
(מנה)

$f''(x) > 0$ ולכן תקוצב היא קצרה מנימוס.

$$f(a) = \frac{a+a}{\sqrt{a}} \rightarrow f(a) = \frac{2a}{\sqrt{a}} \rightarrow f(a) = \frac{2\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \rightarrow f(a) = 2\sqrt{a}$$



(ג) גזר $a < 0$ תגזרת תמיד חילוקי בתחום ההפרדה



ולכן הפונ' עולה לכל x בתחום הפרדה

חינוק עם קו x :

$$0 = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$$

$$x = -a$$

(ג'ג') גזר $a = 0$, $x = 0$ ולעם נקודה יחידה (למשל אחר

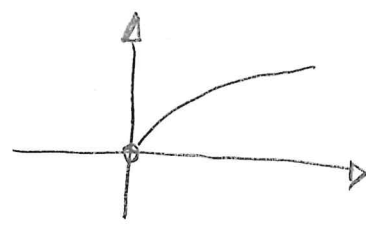
הפונ' (גזר סכך)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad f(x) = \sqrt{x}$$





ג'ורג' (ג'ורג')
 עמית המצבים קבלנו עיקר ס. ולכן עסוק יש אי ההצרה

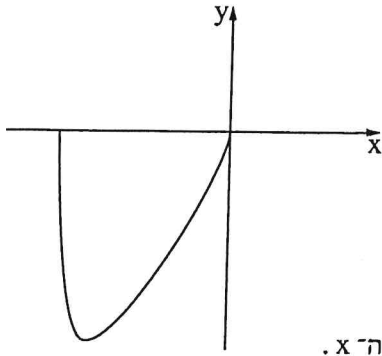


סליקה (הוכיח) ה (פ,ס)
 הנצבית תמיד חלוקת בתאם
 ההצרה ועסק הפוך
 אולי עש עיקר של א.

צדד) $g(x)$ הוא הצבה אנכית של $f(x)$, החרף היוצרי סיכור לחלק
 איר ציר א גשתי נקודות הוא עת (x) ועסק (a)

(ז) ע"ה שחרף הפוך יחלק את ציר ה-א גשתי נקודות עיקר נקודות
 הקיצון צריך להיות שלילי ולכן: $a - b < 2\sqrt{a}$ ←
 $|b > 2\sqrt{a}|$





8. נתונה הפונקציה $f(x) = x \cdot \sqrt{a - x^2}$. $a > 0$ הוא פרמטר.
- א. (1) הבע באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 - (2) הוכח שהפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.
 - (3) בסרטוט שלפניך מתואר חלק מגרף הפונקציה $f(x)$. העתק את הסרטוט למחברתך והשלם אותו כך שיתאר את גרף הפונקציה $f(x)$ כולו.

דרך נקודה A הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון מעבירים אנך לציר ה- x . האנך חותך את ציר ה- x בנקודה B. ישר העובר דרך נקודה A ודרך ראשית הצירים, O, חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה נוספת, C. דרך הנקודה C מעבירים אנך לציר ה- x . האנך חותך את ציר ה- x בנקודה D. נתון: הסכום המקסימלי של שטחי המשולשים AOB ו-COD הוא $4\sqrt{2}$.

ב. מצא את a .

$$f(x) = x \cdot \sqrt{a - x^2} ; 0 < a$$

פתרון:

$$a - x^2 \geq 0$$

$$|x| \leq \sqrt{a} \quad (1)$$

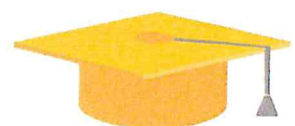
$$\boxed{-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}}$$

$$f(-t) = -t \cdot \sqrt{a - (-t)^2} = -t \sqrt{a - t^2} \quad (2)$$

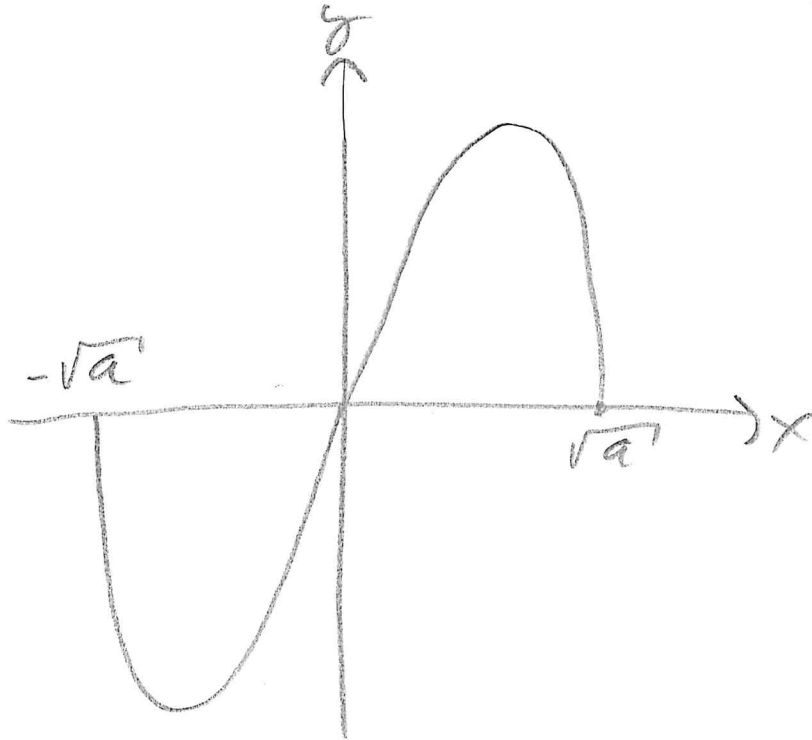
$$= -f(t)$$

מתקיים $f(-t) = -f(t)$ לכל t בתחום ההגדרה.

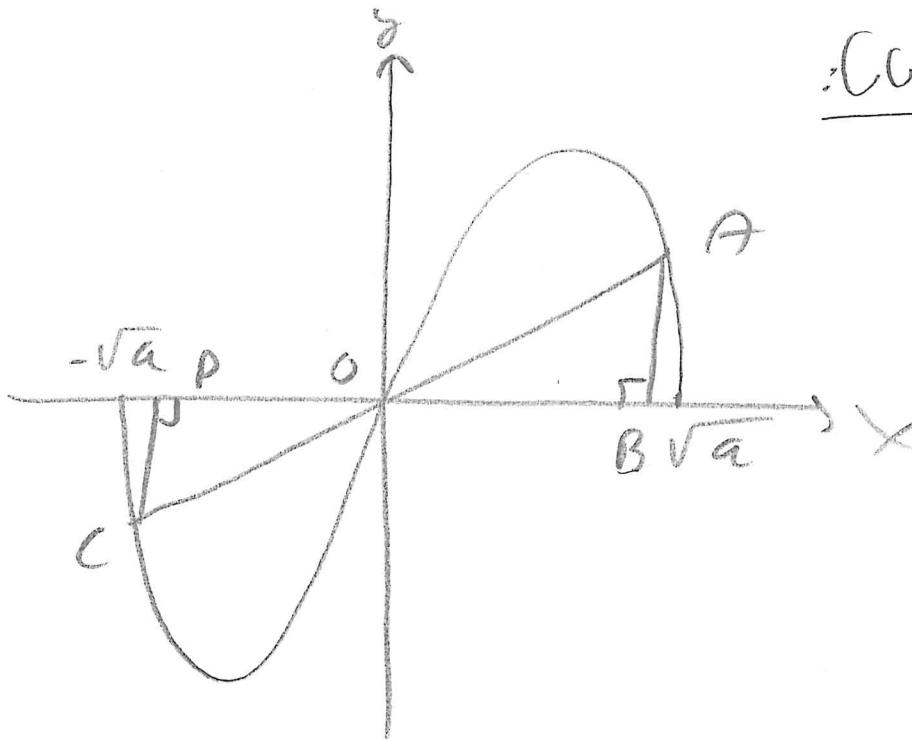
לכן הפונקציה היא אי-זוגית.



(3)



ה. (שיטת):



שטח משולש ACB שווה לשטח המשולש COB
מכיוון שהפונקציה איז סימטרית.



הפונקציה שמשאגה את פסוק הטריגונום היא:

$$f = \frac{BO \cdot AB}{2} + \frac{PO \cdot CO}{2} = 2 \cdot \frac{BO \cdot AB}{2} = BO \cdot AB$$

$$y_A = t \cdot \sqrt{a-t^2} \quad \leftarrow x_A = t \quad (\text{כאן})$$

$$f(t) = t^2 \cdot \sqrt{a-t^2} \quad \sim \text{כאן} =$$

(כאן) נגזרת נגזרת:

$$f'(t) = 2t\sqrt{a-t^2} + t^2 \cdot \frac{-2t}{2\sqrt{a-t^2}}$$

$$f'(t) = \frac{2t(a-t^2) - t^3}{\sqrt{a-t^2}} = \frac{2at - 3t^3}{\sqrt{a-t^2}}$$

$$2at - 3t^3 = 0$$

$$t(2a - 3t^2) = 0$$

$$\swarrow$$

$$t = 0$$

$$\searrow$$

$$t^2 = \frac{2a}{3}$$

$$/$$

$$t = -\sqrt{\frac{2a}{3}}$$

$$\setminus$$

$$t = \sqrt{\frac{2a}{3}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2a}{3}}$$

היבט זהו קריטריון הוואיטון הוא



$f'' = 2a - 9t^2$
 נגזרת שנייה
 נגזרת ראשונה
 נגזרת

נמצא נקודה קריטית

$f''(\sqrt{\frac{2a}{3}}) = 2a - 9 \cdot \frac{2a}{3} = -4a < 0 \rightarrow$ נקודה מקסימום
 נגזרת שנייה
 נגזרת ראשונה
 נגזרת

העטרה המקסימלית יהיה:

$$f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right) = \frac{2a}{3} \cdot \sqrt{a - \frac{2a}{3}} = \frac{2a}{3} \cdot \sqrt{\frac{a}{3}}$$

נשאלה אנתונים:

$$4\sqrt{2} = \frac{2a}{3} \cdot \sqrt{\frac{a}{3}} \quad | \quad ()^2$$

$$32 = \frac{4a^2}{9} \cdot \frac{a}{3}$$

$$32 = \frac{4a^3}{27}$$

$$a^3 = 216 \quad | \quad \sqrt[3]{\quad}$$

$$\boxed{a = 6}$$

