

## פתרון הבחינה

# במתמטיקה

מועד נבצרים מרץ חורף תשפ"א, 2021, שאלון: 35482

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע":

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



1. נתונה סדרה חשבונית שהאיבר הכללי שלה הוא  $a_n = 2n - 3$ , ונתונה סדרה המוגדרת על ידי הכלל  $b_n = 3a_n + 5$ .
- מצא את  $b_1$ .
  - הוכח כי הסדרה  $b_n$  היא חשבונית.
  - נתון כי האיבר האחרון בסדרה  $b_n$  הוא 110. מצא את מספר האיברים בסדרה  $b_n$ .
  - נתון כי בסדרה  $a_n$  ובסדרה  $b_n$  יש אותו מספר איברים. מצא את סכום האיברים במקומות האיזוגיים בסדרה  $a_n$ .

פתרון

נתון:  $a_n = 2n - 3$  ,  $b_n = 3a_n + 5$

(1)

$$b_n = 3a_n + 5$$

$$n=1 : b_1 = 3a_1 + 5$$

נציב  $a_1$

$$a_n = 2n - 3$$

$$n=1 : a_1 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

$$a_1 = -1$$

$$b_1 = 3a_1 + 5 = 3 \cdot (-1) + 5 = 2$$

$$b_1 = 2$$



(2) נ"י (.) אבני-אבן : (זנן / קזי)  
 $b_{n+1} - b_n =$

$$b_n = 3a_n + 5 = 3 \cdot (2n-3) + 5 = 6n - 9 + 5 = 6n - 4$$

↑  
 קזי א<sub>n</sub> (נכח) אלה אבני-אבן הינתין ארצו

קזי א<sub>n</sub> :  
 $b_n = 6n - 4$

קזי א<sub>n+1</sub> :  
 $b_{n+1} =$

$$b_n = 6n - 4$$

$$n \rightarrow n+1 : b_{n+1} = 6(n+1) - 4 = 6n + 6 - 4 = 6n + 2$$

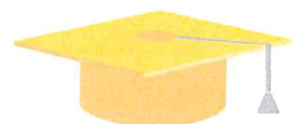
קזי א<sub>n+1</sub> :  
 $b_{n+1} = 6n + 2$

$$b_{n+1} - b_n = (6n + 2) - (6n - 4) = 6n + 2 - 6n + 4 = 6$$

קזי א<sub>n</sub> :  
 $b_{n+1} - b_n = 6$

||  
✓

הב ס'נוו השלגין - א.א.ניס = 6 .



נניח: יית'יקר ג'מרון קסינרה.  $n$  הוא 110.  
?  
 $n = !$

ניצטו קסינרה ג'מרון ג'מל'  $d$  סכום חלקיני  
חלקי גסינרה.  $n$ .

$$b_n = b_1 + (n-1)d$$

נניח אס'קל:  $110 = 2 + (n-1) \cdot 6$

$$110 = 2 + 6n - 6$$

$$114 = 6n \quad | :6$$

$$n = 19$$

חלקיני: קסינרה  $n$  וס' 19, איקר'ק.

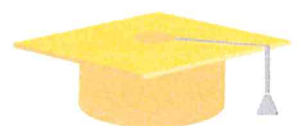
זיו נוספה: ז'ג'אני  $b_n = 6n - 4$

נשווה לאינדי האחרון 110:

$$110 = 6n - 4$$

$$6n = 114$$

$$\boxed{n = 19}$$



ג. נתון כי קס'נוה ה<sub>n</sub> אקס'נוה ה<sub>n</sub> יש וימנו למסנו איקרז.

ל

קס'נוה ה<sub>n</sub> יש זכ 19 איקרז.

קס'נוה ה<sub>n</sub> הינו אש'נוה (נתון).

למנו'נו ל  $a_1 = -1$ .

למנו'נו זכ למ  $a_2$ .

$$a_n = 2n - 3$$

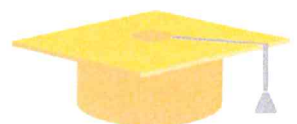
$$n=2: a_2 = 2 \cdot 2 - 3$$

$$a_2 = 1$$

למנו'נו זכ למ (הנו) קס'נוה ה<sub>n</sub>.

$$d = a_2 - a_1 = 1 - (-1) = 2$$

$$d = 2$$



דסינורה  $a_n$  יש 19 איקרוז .

↓

$$\begin{aligned} \text{למטה האיקרוז} &= 10 & \text{למעלה האיקרוז} &= 9 \\ \text{דניאלה} & & \text{דניאלה} & \\ \text{הצרכים} & & \text{הצרכים} & \end{aligned}$$

היגיון דסינורה האיקרוז דניאלה האי צרכים דסינורה  $a_n$  .

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

$$a_1 = -1$$

$$d = 2$$

$$n = 10$$

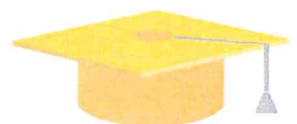
הצרכים האיגיון דסינורה .

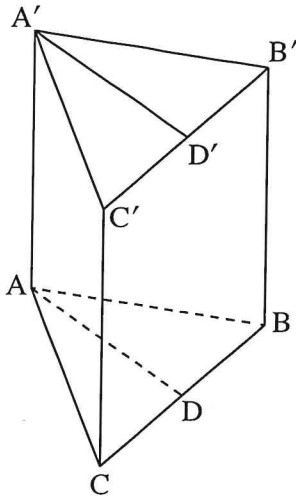
$$S_n = \frac{n [2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

↓

$$S_{10} = \frac{10 [2 \cdot (-1) + (10-1) \cdot 2]}{2} = 170$$

הצרכים: 170





2. במנסרה ישרה  $ABCA'B'C'$  הבסיסים הם משולשים שווי שוקיים ( $AB = AC$ ).

$AD$  הוא הגובה לצלע  $BC$ , ו- $A'D'$  הוא הגובה לצלע  $B'C'$  (ראה ציור).

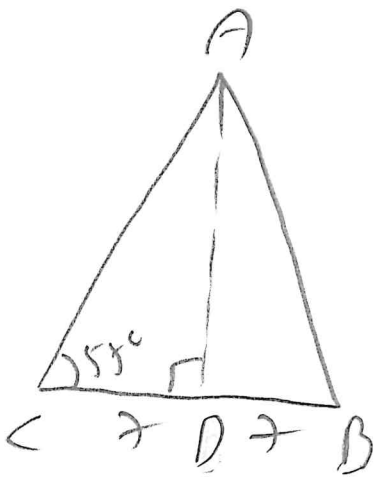
נתון:  $\angle BAC = 70^\circ$ ,  $BC = 14$ ,

נפח המנסרה הוא 1,190.

- א. חשב את גובה המנסרה.
- ב. חשב את הזווית שבין האלכסון  $A'B$  ובין בסיס המנסרה  $ABC$ .
- ג. חשב את  $\angle AD'A'$ .

פתרון

א. נתון כי המנסרה ישרה, לכן  $AD$  הוא גובה המשולש  $ABC$ .



$$\angle ACB = \angle ABC = \frac{180 - 70}{2} = 55^\circ$$

$$CD = BD = \frac{14}{2} = 7$$

במשולש  $ACD$  נניח  $\angle CAD = x$

$$\tan 55^\circ = \frac{AD}{7} \Rightarrow AD = 10$$

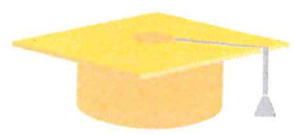
נבחר מנסרה ישרה נתון כי הנפח

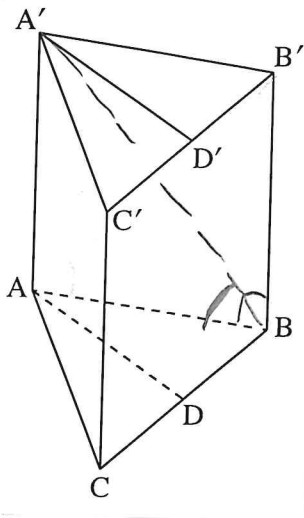
$$V = S_{ABC} \cdot h$$

$$1,190 = \frac{BC \cdot AD}{2} \cdot h$$

נציב:

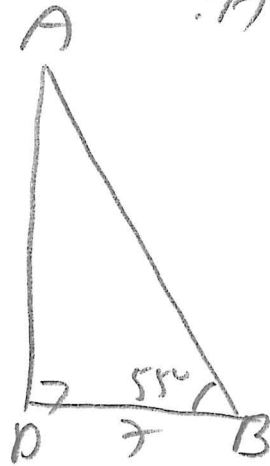
$$1,190 = \frac{14 \cdot 10}{2} \cdot h \Rightarrow \boxed{h = 17}$$





ק. הנחיות המקוריות הן  
 $\triangle ABA'$  חזו

נחש קטן קצת AB  
 משולש  $\triangle ABD$



$$\frac{7}{AB} = \cos 55^\circ$$

$$AB = \frac{7}{\cos 55^\circ} = 12.20$$

נחש המשולש  $\triangle ABA'$

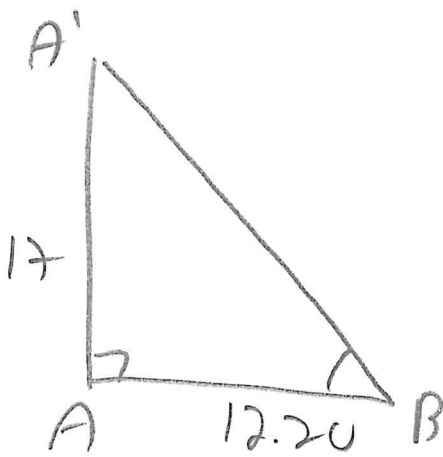
$AA'$  הוא זנבה המשורה

$$AA' = 17 \quad \text{זנב}$$

נחש:

$$\tan \angle ABA' = \frac{17}{12.20}$$

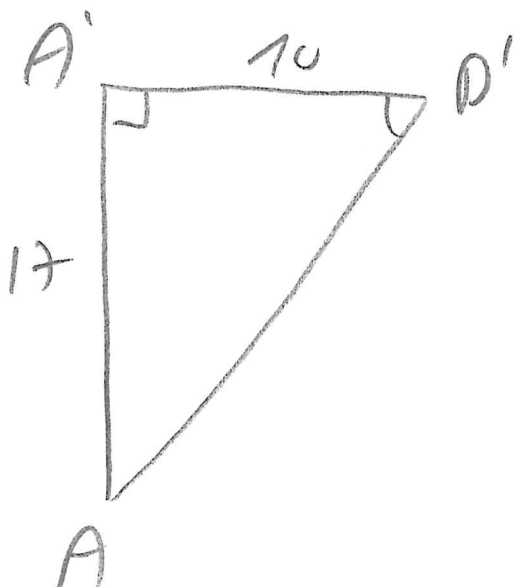
$$\angle ABA' = 54.33^\circ$$





ד. מתקיים  $A'D' = AD = 10$

נתבונן במשולש  $A'D'A$



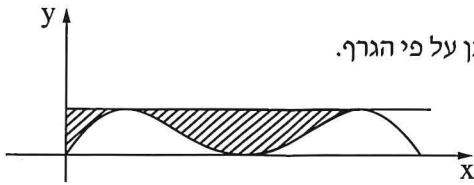
$$\tan \angle A'D'A = \frac{17}{10}$$



$$\angle A'D'A = 59.53^\circ$$



נתונה הפונקציה:  $f(x) = 2 \sin x + \cos(2x) - 1$  המוגדרת לכל  $x$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .  
בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון.



א. מצא את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  וקבע את סוגן על פי הגרף.

העבירו משיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודות המקסימום המוחלט שלה (ראה ציור).

ב. (1) מצא את משוואת המשיק.

(2) מצא את השטח המקווקו בציור: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- $y$ .

ג. נתונה הפונקציה  $g(x) = f(x) - c$  המוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .  $c$  הוא פרמטר.

עבור אילו ערכים של  $c$  גרף הפונקציה  $g(x)$  יחתוך את ציר ה- $x$  ב-4 נקודות שונות? נמק.

פתרון:

$$0 \leq x \leq \pi \quad f(x) = 2 \sin x + \cos 2x - 1$$

ל.  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 2 \cos x - 2 \sin 2x$$

(נש/ה זאס ונפתור)

$$2 \cos x - 2 \sin 2x = 0 \quad /: 2$$

$$\cos x - \sin 2x = 0$$

$$\cos x - 2 \sin x \cos x = 0$$

ל/ס כפול ה:

$$\cos x (1 - 2 \sin x) = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

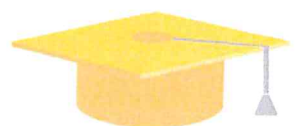
$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

בתחום הנתון

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

בתחום הנתון:



$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} + \cos \pi - 1 = 0$$

ש.ת.ר. ג:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1 = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - 1 = \frac{1}{2}$$

$(\frac{\pi}{2}, 0)$  מינימום  
 $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$  מקסימום  
 $(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2})$  מקסימום

ה (הזכר) הן:

נוסף על זה נזכר המינימום גדלה בתחום:

$(0, 0)$  מינימום  
 $(\pi, 0)$  מינימום

ג. (1) נזכר המקסימום הנמוך הן  $y = \frac{1}{2}$

ואכן משווה המשיך היא  $y = \frac{1}{2}$

(2) נחשב את היחס בקצה אינסוף

על המשיך פה הפונקציה בתחום

$$0 \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$$



$$S = \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \frac{3}{2} - (2\sin x + \cos 2x - 1) dx$$

$$S = \int_0^{\frac{5\pi}{6}} (\frac{3}{2} - 2\sin x - \cos 2x) dx$$

$$S = \left[ \frac{3}{2}x + 2\cos x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{5\pi}{6}}$$

$$S = \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{5\pi}{6} + 2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{2} \right] - \left[ \frac{3}{2} \cdot 0 + 2\cos 0 - \frac{\sin 0}{2} \right]$$

$$S = \left[ \frac{5\pi}{4} - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right] - [2]$$

$$S = 0.628$$

d.  $g(x) = f(x) - c$

אם היא הפכה אנכית של הפונקציה  $f(x)$ ,  
כדי שהיא יהיה אף יותר  $x$  - ?  $y$  והוא

$$0 < c < \frac{1}{2}$$



4. נתונות שתי פונקציות:  $f(x) = e^{2x}$ ,  $g(x) = e^{3-x}$ . המוגדרות לכל  $x$ .
- א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של כל אחת מן הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).
  - ב. מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של כל אחת מן הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  (אם יש כאלה).
  - ג. (1) מצא את השיעורים של נקודת החיתוך של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ .
  - (2) סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  וסקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .
  - (3) חשב את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  ועל ידי הישר  $y = 1$ .

לימוד

1.

$$f(x) = e^{2x}$$

$$x=0 \rightarrow f(0) = e^{2 \cdot 0} = e^0 = 1$$

$$(0, 1)$$

$$y=0 \rightarrow 0 = e^{2x}$$

אין נקודות חיתוך  
(ג-ה) אין נקודות חיתוך

$$g(x) = e^{3-x}$$

$$x=0 \rightarrow g(0) = e^{3-0} = e^3$$

$$(0, e^3)$$

$$y=0 \rightarrow 0 = e^{3-x}$$

אין נקודות חיתוך  
(ג-ה) אין נקודות חיתוך

ציון ההיגיון של  $f(x)$  עם הנכונות:  $(0, 1)$

ציון ההיגיון של  $g(x)$  עם הנכונות:  $(0, e^3)$



$$f(x) = e^{2x}$$

$$f'(x) = e^{2x} \cdot 2$$

$$\rightarrow f'(x) = 2e^{2x}$$

0 <  $e^{2x}$  לכל  $x$  (כי  $e$  מעריכי המעריך חיובי)

!!

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

חיובי לכל  $x$

!!

$f(x)$  עולה: לכל  $x$  (כי  $e$  חיובי).

משקנה:  $f(x)$  יורד: לכל  $x$

חיובי ויורד: לכל  $x$



$$f(x) = e^{3-x}$$

$$f'(x) = e^{3-x} \cdot (-1)$$

$$f'(x) = -1e^{3-x}$$

$e^{3-x} > 0$  לכל  $x$  (כי  $e$  חיובי, תמיד חיובי)

↓

$$f'(x) = (-1) \cdot e^{3-x}$$

(כלי הכלי = הכלי  $\cdot (-1)$ )  $\times$  טענה לכל  $x$

↓

$f'(x)$  יורד לכל  $x$  (כי  $-1 < 0$ )

מסקנה: **תחום עלייה של  $f(x)$  :  $x < 3$**

**תחום ירידה של  $f(x)$  :  $x > 3$**



2.

(1)

$$\begin{cases} f(x) = e^{2x} \\ g(x) = e^{3-x} \end{cases}$$

$$e^{2x} = e^{3-x}$$

↓

$$2x = 3 - x$$

$$3x = 3 \quad | :3$$

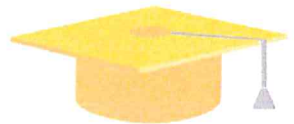
$$x = 1$$

$$f(x) = e^{2x}$$

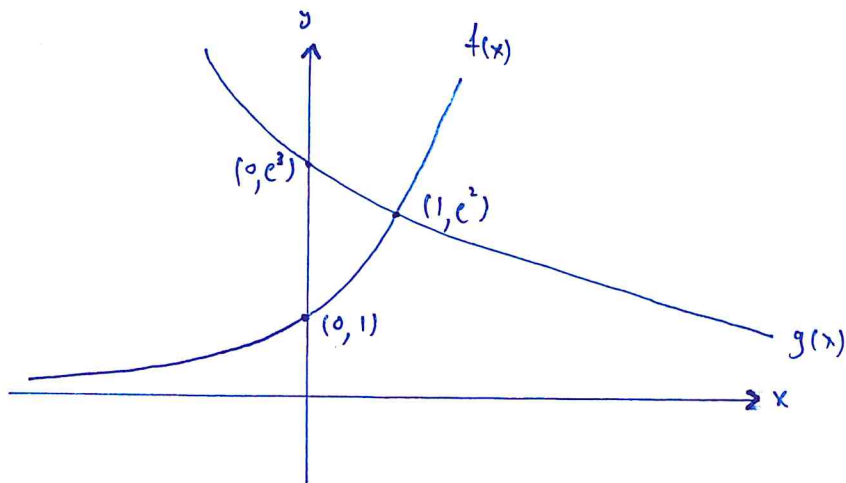
$$x=1 : f(1) = e^{2 \cdot 1} = e^2$$

$$(1, e^2)$$

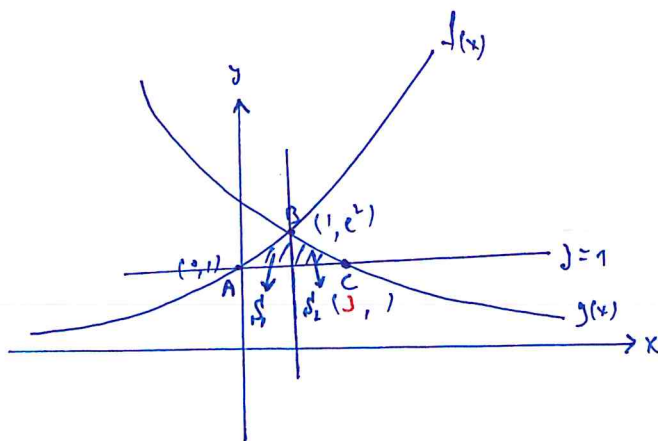
נקודה:  $(1, e^2)$







(2)



(3)

נעזרנו בנקודה C.

$$\begin{cases} g(x) = e^{1-x} \\ y = 1 \end{cases}$$

$$e^{1-x} = 1$$

$$e^{1-x} = e^0$$

$$1-x > 0$$

$$1 = x$$

⇓

$$x_c = 1$$

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



השאלה 1:

פונקציה זוגית:  $f(x) = e^{2x}$

$n = 1$ : פונקציה זוגית

פונקציה זוגית  
הגובה =  $e^{2x} - 1$

$$S_1 = \int_0^1 (e^{2x} - 1) dx = \left[ \frac{e^{2x}}{2} - x \right]_0^1 = \left( \frac{e^{2 \cdot 1}}{2} - 1 \right) - \left( \frac{e^{2 \cdot 0}}{2} - 0 \right) =$$

$$= \frac{e^2}{2} - 1 - \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{e^2}{2} - 1\frac{1}{2}$$

השאלה 2:

פונקציה זוגית:  $g(x) = e^{3-x}$

$n = 1$ : פונקציה זוגית

פונקציה זוגית  
הגובה =  $e^{3-x} - 1$

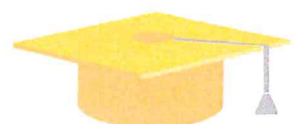
$$S_2 = \int_1^2 (e^{3-x} - 1) dx = \left[ \frac{e^{3-x}}{-1} - x \right]_1^2 = \left( \frac{e^{3-2}}{-1} - 2 \right) - \left( \frac{e^{3-1}}{-1} - 1 \right) =$$

$$= (-e) - (-e^2 - 1) = e^2 - e$$



$$I(1) S' = S'_1 + S'_2 = \frac{e^2}{2} - 1 \frac{1}{2} + e^2 - 3 = 1.5e^2 - 1.5 = 6.584$$

$S' = 6.584$      א'ק"ה :



5. נתונה הפונקציה  $f(x) = -1 + 2x + \ln(x^2)$ .
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
  - מהי האסימפטוטה האנכית של הפונקציה  $f(x)$ ?
  - מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  וקבע את סוגה.
  - חשב את  $f(1)$ .
    - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
  - נתונה הפונקציה  $g(x) = f(x) + 5$ . מצא כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה  $g(x)$  עם ציר ה- $x$ . נמק.

נניח

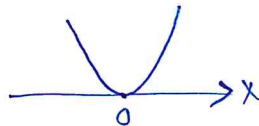
$$x^2 > 0$$

ל.

נניח  $x > 0$  ונצטרף האינסוף של האינפיניטום.

$$\begin{aligned} x^2 &> 0 \\ \Downarrow \\ x &> 0 \end{aligned}$$

נניח נוקול:  $x > 0$  (מחייב את האינפיניטום של האינפיניטום)  $x > 0$  (מחייב את האינפיניטום של האינפיניטום)



מחייב החיוביות של האינפיניטום:  $x \neq 0$ .

מחייב החיוביות של האינפיניטום:  $x \neq 0$



$x=0$  נקודת מינימום (נגזרת של 0) הנקודה היא נקודת מינימום (נגזרת של 0)

7.

↓

אסימטוטה:  $x=0$

$f(x) = -1 + 2x + |x|(x^2)$

8.

$f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2}$

$f'(x) = 2 + \frac{2}{x}$

$\frac{2}{x} + 2 = 0 \quad / \cdot x$

$2x + 2 = 0$

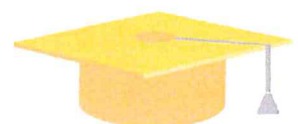
$2x = -2 \quad / : 2$

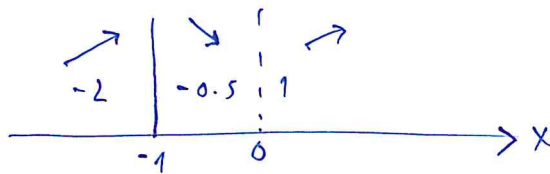
$x = -1$

$f(x) = -1 + 2x + |x|(x^2)$

$f(-1) = -1 + 2 \cdot (-1) + |(-1)| \cdot (-1)^2 = -1 - 2 + 1 = -3$

$(-1, -3)$





$$f'(x) = 2 + \frac{2}{x}$$

$$f'(-2) = 2 + \frac{2}{-2} = 1 \quad (\text{מיני}) \quad \begin{matrix} \text{מחז} \\ \text{=} \\ \text{מק} \end{matrix}$$

$$f'(-0.5) = 2 + \frac{2}{-0.5} = -2 \quad (\text{מק} \text{ ימיני})$$

$$f'(1) = 2 + \frac{2}{1} = 4 \quad (\text{מיני}) \quad \begin{matrix} \text{מחז} \\ \text{=} \\ \text{מק} \end{matrix}$$

∩

$$\max(-1, -3)$$

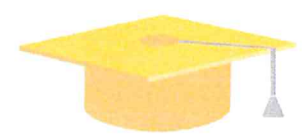
(1) (2)

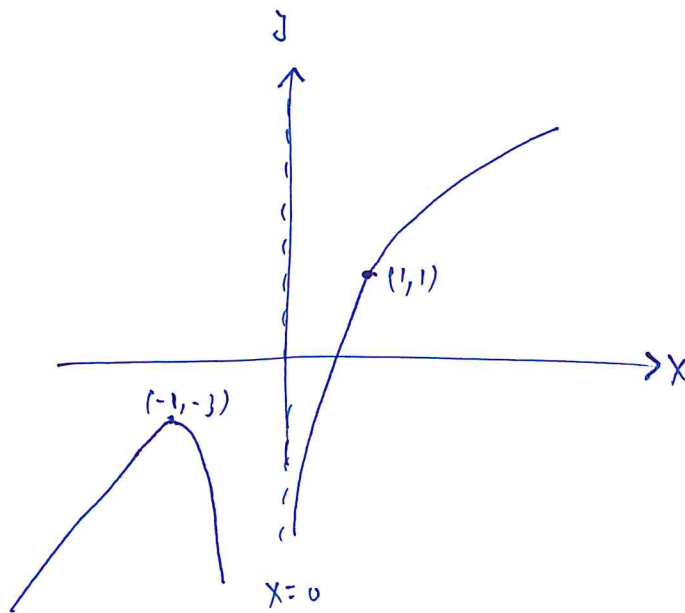
$$f(x) = -1 + 2x + \ln(x^2)$$

$$f(1) = -1 + 2 \cdot 1 + \ln(1^2) = -1 + 2 + \ln 1 = 1$$

∩

$$f(1) = 1$$





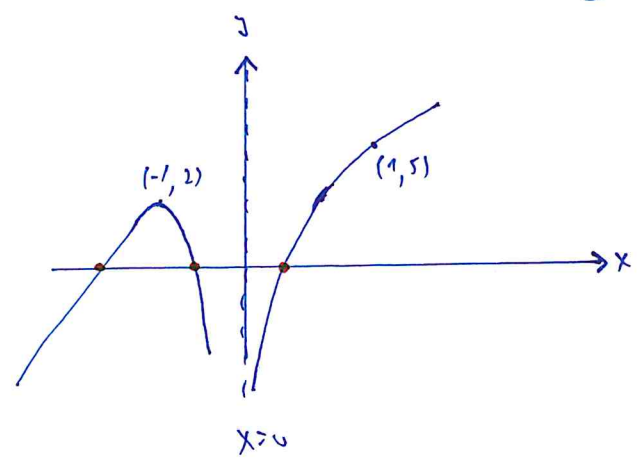
$f(x) = f(x) + 5$

ה.

↓

פונקציה היא היסטוריה של  $f(x)$ , 5 יחידות טאני געגול.

$(1, 5)$  ו  $(-1, 2)$



השקרה: ק-3 מעולה

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**

