

## פתרון הבחינה

# במתמטיקה

מועד חורף מאוחר תשפ"א, 2021, שאלון: 35482

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע":

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



1. הסדרה  $a_n$  מקיימת את הכלל:  $a_{n+1} = 2n + 1 - a_n$ .

נתון:  $a_1 = 10$ .

א. מצא את האיברים:  $a_2, a_3, a_4$ .

ב. (1) הוכח כי הסדרה של האיברים במקומות האיזוגיים היא חשבונית.

(2) האם הסדרה של האיברים במקומות הזוגיים גם היא חשבונית? נמק.

ג. מצא את סכום 46 האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$ .

פתרון

$n=1$ :  $a_{1+1} = 2 \cdot 1 + 1 - a_1 \rightarrow a_2 = -7$  .ל

$n=2$ :  $a_{2+1} = 2 \cdot 2 + 1 - a_2 \rightarrow a_3 = 12$

$n=3$ :  $a_{3+1} = 2 \cdot 3 + 1 - a_3 \rightarrow a_4 = -5$

ד. (1)  $(n, n+1)$  הנתון  $n+1$ :

$$a_{n+1+1} = 2(n+1) + 1 - a_{n+1}$$

$$a_{n+2} = 2n + 3 - a_{n+1}$$

כגון וריק א -  $a_{n+1}$  הנתון:

$$a_{n+2} = 2n + 3 - (2n + 1 - a_n)$$

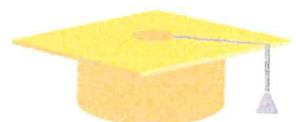
$$a_{n+2} = 2 + a_n$$

$$a_{n+2} - a_n = 2$$

מכאן נסדר האיברים במחזוריות היא 2021

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
אל תתפשר עליה.



היא סדרה חשבונית עם הפרש  $d=2$   
 (2) ההורחה מסתף כי (1) תקפה גם  
 לאיבריך במקומה הכוללי ולכן גם הם  
 סדרה חשבונית עם הפרש  $d=2$   
 ד. נשמע מסתף קי?

$$S_{46} = \underbrace{S_{23}}_{\text{אוליג}} + \underbrace{S_{23}}_{\text{אוליג}} =$$

$$= \frac{23}{2} [2 \cdot a_1 + 22 \cdot d] + \frac{23}{2} [2 \cdot a_2 + 22 \cdot d]$$

$$= \frac{23}{2} [20 + 44] + \frac{23}{2} [-14 + 44] = 1,081$$

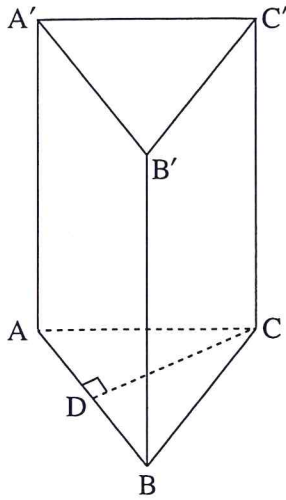
$$S_{46} = 1,081$$

האבה: ניתן אחר כך לשני איברי סמוכים

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{45} + a_{46})$$

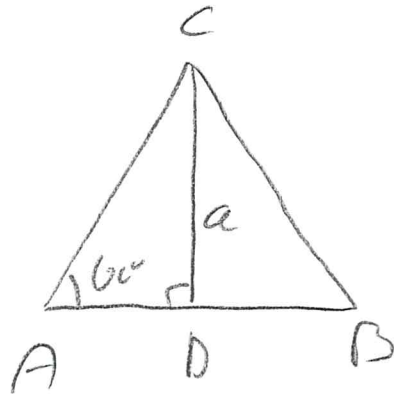
זאת סדרה חשבונית שבה האיבר הראשון 3  
 והפרש  $d=4$ , וכן אחר כך החישוב יתקן ולא הסכום.





2. נתונה מנסרה ישרה  $ABCA'B'C'$  שבסיסה  $ABC$  הוא משולש שווה צלעות.  
 $CD$  הוא הגובה לצלע  $AB$  (ראה ציור).  
 נתון:  $CD = a$ .  
 א. הבע באמצעות  $a$  את אורך צלע המשולש  $ABC$ .  
 נתון: הזווית בין  $A'D$  לבין מישור הבסיס  $ABC$  היא  $68^\circ$ .  
 שטח המעטפת של המנסרה הוא 713 (סכום שטחי הפאות הצדדיות).  
 ב. (1) הבע באמצעות  $a$  את גובה המנסרה.  
 (2) מצא את  $a$ .  
 ג. מצא את גודל הזווית  $\angle BA'C$ .

פתרון:



א. נתון  $CD = a$  במשולש  $ACD$ :

$$\frac{CD}{AC} = \sin 60^\circ$$

$$AC = \frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

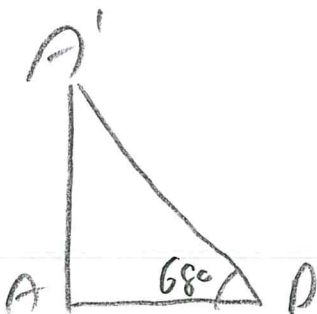
אזכור:  $AC$  הוא משולש  $ABC$  הוא

$$\boxed{\frac{2a}{\sqrt{3}}}$$

ב. אוקי במשולש  $AA'D$  שווה זווית הוא  $68^\circ$  אז

$$AD = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

(1) נתון במשולש  $AA'D$ :  
 הזווית הנגדית היא  $90^\circ$





$$\frac{AA'}{AD} = \tan 68^\circ$$

$$AA' = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \tan 68^\circ = 1.43a$$

(2) שטח התיבה : 713

$$713 = S_{ABDA'} + S_{ADCA'} + S_{BCCA'} = 3 \cdot S_{ABB'A'}$$

$$713 = 3 \cdot AB \cdot AA'$$

$$713 = 3 \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot 1.43a$$

$$a^2 = 143.9315$$

$$a = 12$$

d. נחשב את  $A'B$  (קצה שלם) בתלואים:

$$A'B^2 = \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 + (1.43a)^2 = 13.86 + 12.16^2$$

$$A'B = 22.05$$

למידע על פסיכומטרי  
 ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**



$$A'C = A'B = 22.05$$

$$BC = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}}$$

:  $\triangle BAC$  (שלוש זוויות) גדולות שוות

$$BC^2 = A'B^2 + A'C^2 - 2 \cdot A'B \cdot A'C \cdot \cos \angle BAC$$

$$\left(\frac{24}{\sqrt{3}}\right)^2 = 22.05^2 + 22.05^2 - 2 \cdot 22.05 \cdot 22.05 \cdot \cos \angle BAC$$

$$192 = 972.405 - 972.405 \cos \angle BAC$$

$$\cos \angle BAC = \frac{780.405}{972.405}$$

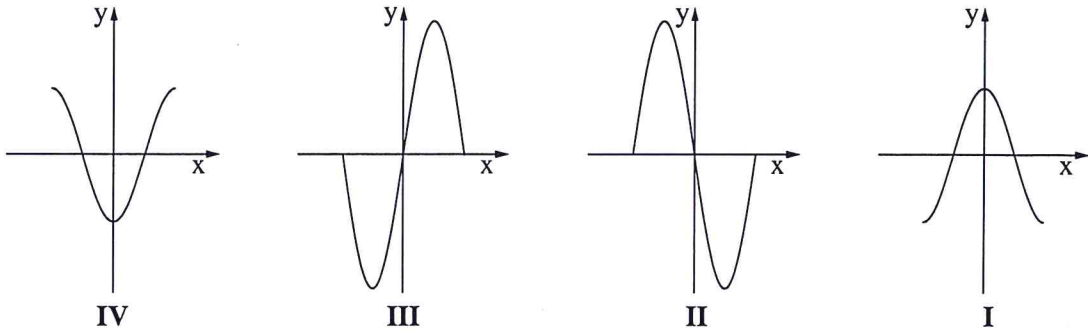


$$\angle BAC = 36.625^\circ$$



3. נתונה הפונקציה  $f(x) = 2 - 4(\sin x)^2$  המוגדרת בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

- א. הראה כי  $f(x) = 2 \cos(2x)$ .
- ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.
- ג. מצא את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ה. (1) קבע איזה מן הגרפים I, II, III, IV שבסוף השאלה מתאר את גרף הפונקציה  $f'(x)$  (נגזרת הפונקציה  $f(x)$ ), ונמק את קביעתך.  
(2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f'(x)$  ועל ידי ציר ה- $x$ .



כ. הוכחה:

$$f(x) = 2 - 4(\sin x)^2 = 2 - 4 \cdot (1 - \cos^2 x) =$$

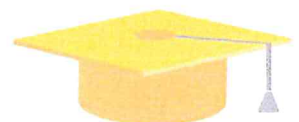
$$= 4 \cos^2 x - 2 = 2 \cdot (2 \cos^2 x - 1) = 2 \cdot \cos 2x$$

מ"ש פ"א

? נקודות חיתוך עם הצירים - חיתוך עם ציר  $x$  ( $y=0$ ):  
נשתמש בכללי האלגוריתם של הברוקר שהיכנתו את שאלות  
בסעיף הקודם:

$$0 = 2 \cdot \cos 2x \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \quad (k \text{ שלם})$$



$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

K	-1	0
X	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$

ואין ערכים נוספים בהמשך הנקודה.

$$\left( -\frac{\pi}{4}, 0 \right), \left( \frac{\pi}{4}, 0 \right)$$

ע"כ

אין נק' נתיבן של גרף הפונקציה עם ציר ה-x בהמשך הנקודה.

היגד עם ציר y (x=0):

$$f(0) = 2 \cdot \cos(2 \cdot 0) = 2 \cdot \cos(0) = 2$$

$$\left( 0, 2 \right)$$





ג. נקודות קיצון פנימיות - קטומים  
 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$   
 נגזרת:

$$f(x) = 2\cos(2x)$$

$$f'(x) = 2 \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2 = -4 \cdot \sin(2x)$$

נשווה את הנגזרת לאפס על מנת למקוא נקודות

"חלופות" נקיצון קטומים:  $f'(x) = 0$

$$-4 \cdot \sin(2x) = 0 \quad | :(-4)$$

$$\sin(2x) = 0$$

$$2x = \pi \cdot k$$

$$(k \text{ שלם}) \quad x = \frac{\pi}{2} \cdot k$$

$$\Downarrow \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$(k=0 \text{ עקור}) \quad x = 0$$

עזר פסג נוספת:

$$f''(x) = -4 \cdot (\cos(2x)) \cdot 2 = -8 \cdot \cos(2x)$$

$$f''(0) = -8 \cdot \cos(2 \cdot 0) = -8 < 0$$

כן (0, f(0)) נקודת קיצון מסוג מקסימום.



$$f(0) = 2 \cdot \cos(2 \cdot 0) = 2 \cdot \cos(0) = 2$$

$$\boxed{(0, 2) \text{ max}}$$

נקודות קיצון מקסימום:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos\left(2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2 \cdot \cos(-\pi) = -2$$

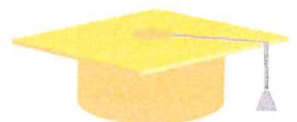
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos(\pi) = -2$$

אם סוג הקיצון נקבע לפי סיג הקיצון של נקודת הקיצון הפנימי (מקסימום) והיבט של הפונקציה האנטיגראנט כפול בתחום הנגד.

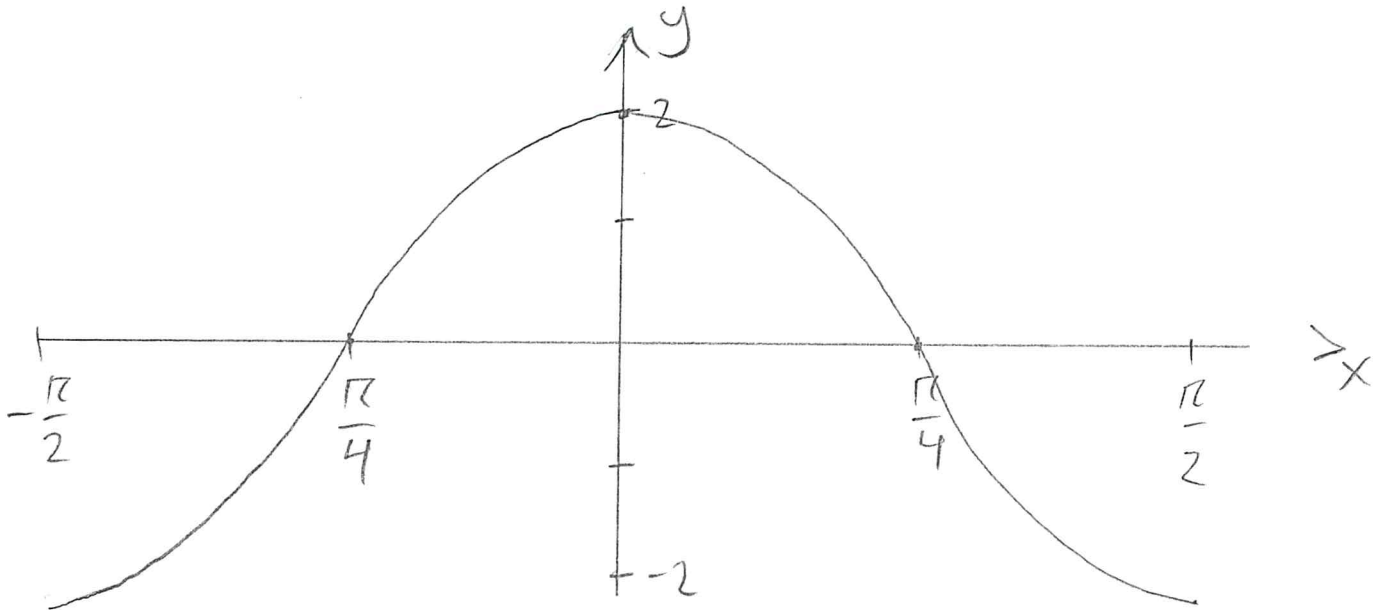
אם סוג הקיצון של נקודת הקיצון המקסימום הפנימי

$$\boxed{\left(-\frac{\pi}{2}, -2\right) \text{ min}, \left(\frac{\pi}{2}, -2\right) \text{ min}}$$

נסבס:



3. סקיצה של גרף הפונקציה:  
אל פי סעיף המקורו אז פה:



ניתן לסקר עם פה כיוון לגבי  $x$  פי 2 (המחזור קביל פי 2).  
ומהות לגבי  $y$  פי 2 של פונקציה הקוסינוס  $\cos x$ .

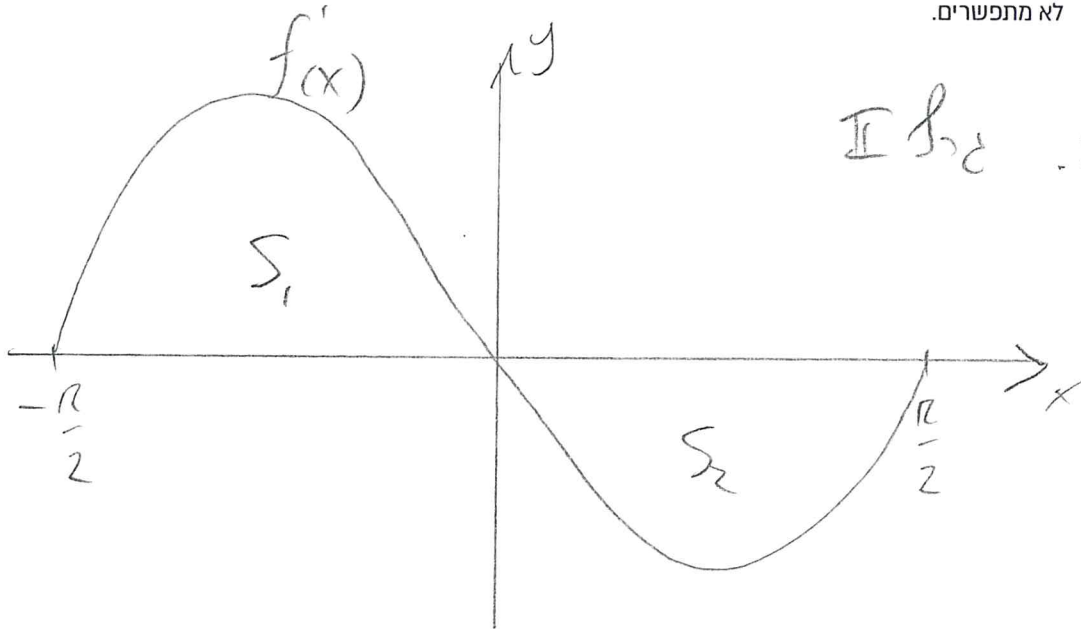
הוא סדיק נקודת הקיטון הפנימית (2,0).  
ימצא של  $f$  עוברת מימין למאדים של  $x=0$  אפס.  
(פי סג הקיטון - המקסימלית למאדים כמעט קובץ).  
על צד II מאדים מאדים ירד.

על צד III נפל כיוון למאדים ומאדים אפס  $x=0$ .  
מאדים מאדים אפס.  
על צד I - II נפל כיוון למאדים מאדים אפס  $x=0$ .  
מאדים מאדים אפס  $x=0$ .

נחידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
אל תחפשו עליה.





ה. 2. ג. 2. II

נניח את הסיווגים הנראים בסרט.

$$S = S_1 + S_2$$

$$S_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (f'(x)) dx = [f(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = f(0) - f(-\frac{\pi}{2})$$

$$S_1 = 2 \cdot \cos(2 \cdot 0) - 2 \cdot \cos(2 \cdot (-\frac{\pi}{2})) = 2 + 2 = 4$$

ניזן להשגתם בטריקולי סימטריה ומהיכוח כי  $f'$  ג'ינה

אי-סימטריה או  $\delta$  חלק:

$$S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0 - f'(x)) dx = [-f(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -f(\frac{\pi}{2}) + f(0)$$

$$S_2 = -2 \cos(2 \cdot \frac{\pi}{2}) + 2 \cdot \cos(2 \cdot 0) = 2 + 2 = 4$$

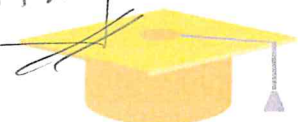
$$S = S_1 + S_2 = 4 + 4 = 8$$

סכום:

נחידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**

**אל תתפשר עליה.**



4. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{e^{2x} + 4}{e^x}$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).
- ג. הראה כי  $f(x) = e^x + 4e^{-x}$ .
- ד. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגה.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ו. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ , על ידי הישר המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודת הקיצון שלה, ועל ידי ציר ה- $y$ .

פתרון

א. נכנין אילו ציני  $x$  הגינה. מתקבל:

$$e^x = 0$$

אין פתרון  
(כי אין גזו'ת חציני חיובי)

||

תחם הגדרה:  $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 4}{e^x}$$

$$x=0 \rightarrow f(0) = \frac{e^{2 \cdot 0} + 4}{e^0} = \frac{1+4}{1} = 5$$

$(0, 5)$



$$f(x) = 0 \rightarrow 0 = \frac{e^{2x} + 4}{e^x}$$

$$\Downarrow$$

$$0 = e^{2x} + 4$$

$$e^{2x} = -4$$

ל"ן נתון  
(גילוי גזירי מעגל היקף)

$$\Downarrow$$

ל"ן קיני חייג, צו ג-א

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 4}{e^x} = \frac{e^{2x}}{e^x} + \frac{4}{e^x} = e^{2x-x} + 4 \cdot e^{-x} = e^x + 4e^{-x} \quad .c$$

$$f(x) = e^x + 4e^{-x} \quad \text{קיילני :}$$

$$f(x) = e^x + 4e^{-x} \quad .3$$

$$f'(x) = e^x + 4 \cdot e^{-x} \cdot (-1)$$

$$f'(x) = e^x - 4e^{-x}$$

$$e^x - 4e^{-x} = 0$$

$$e^x - 4 \cdot \frac{1}{e^x} = 0$$



$$\frac{e^x}{e^x} - \frac{1}{\frac{4}{e^x}} = 0 \quad / \cdot e^x$$

$$e^{2x} - 4 = 0$$

$$e^{2x} = 4$$

$$\Downarrow$$

$$2x = \ln 4 \quad / : 2$$

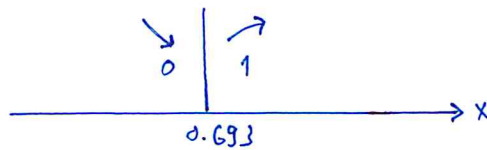
$$x = 0.693 = \ln 2$$

$$f(x) = e^x + 4e^{-x}$$

$$(0.693, )$$

$$f(0.693) = e^{0.693} + 4 \cdot e^{-0.693} = 4$$

$$(0.693, 4)$$



$$f'(x) = e^x - 4e^{-x}$$

$$f'(0) = e^0 - 4e^{-0} = -3 \quad \text{חזף ונייני}$$

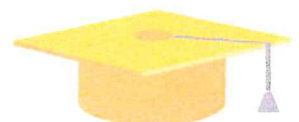
$$f'(1) = e^1 - 4e^{-1} = 1.247 \quad \text{חזף ונייני}$$

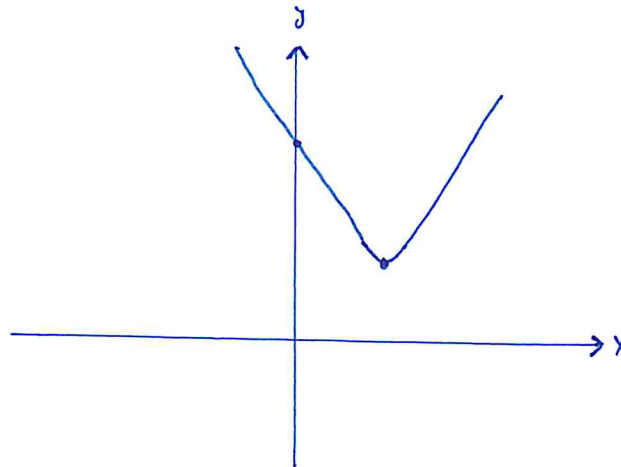
$\Downarrow$

$$\min(0.693, 4)$$

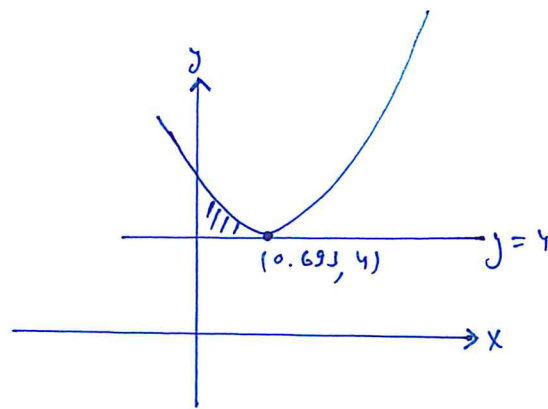
נחידע עכ פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.





...)



.1

לשנין גענייט ניצן בנימל היינו יאר ויקניקל לניו ג - x .  
 היגען זיך גענייט (0.693, 4) , ווייזן שטויזל היגען : y = 4 .

$$\begin{aligned}
 \text{היינוס} \quad \text{נייז} &= (e^x + 4e^{-x}) - (4) = e^x + 4e^{-x} - 4 \\
 S^1 &= \int_0^{0.693} (e^x + 4e^{-x} - 4) dx = \left[ \frac{e^x}{1} + 4 \frac{e^{-x}}{-1} - 4x \right]_0^{0.693} = \\
 &= (e^{0.693} - 4 \cdot e^{-0.693} - 4 \cdot 0.693) - (e^0 - 4e^0 - 4 \cdot 0) = 0.227
 \end{aligned}$$

נחידע עכ פסיכומטרי  
 ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**





5. נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ .
- ג. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגה.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ה. נתונות הפונקציות:  $g(x) = -2f(x)$ ,  $h(x) = f(x) - 2$ .  
רשום את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $h(x)$  ואת שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ .  
קבע את הסוג של כל אחת מהן.  
נמק את תשובותיך.

פירוק

א. נקנין לזינון זני  $x$  תינן ה- $h$  חילקי.

$$x > 0$$

⇓

חזק היגזנני:  $x > 0$

?

$$f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow 0 = \underbrace{x^2} \cdot \underbrace{\ln x}$$

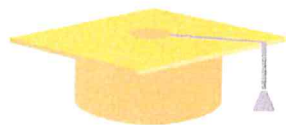
$x^2 = 0$   
⇓  
 ~~$x = 0$~~   
נסיל, לא דתחז היגזנני

$\ln x = 0$   
⇓  
 $\log_e x = 0$   
⇓  
 $x = e^0 = 1$

$(1, 0)$

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**



$$f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

.ז

ניצור גזיטתו למצוא את הנקודה של שני ניקוי.

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2x \ln x + x$$

$$2x \ln x + x = 0$$

$$x(2 \ln x + 1) = 0$$

$x \neq 0$   
 נסיד, לא זמן  
 גיקני

$$2 \ln x + 1 = 0$$

$$2 \ln x = -1 \quad | : 2$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}$$

||

$$\log_e x = -\frac{1}{2}$$

||

$$x = e^{-\frac{1}{2}} = 0.607$$

נחידע עכ פסיכומטרי  
 ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**

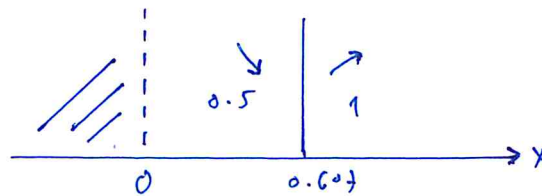


$$f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

$$(0.607, )$$

$$f(0.607) = (0.607)^2 \cdot \ln(0.607) = -0.184$$

$$(0.607, -0.184)$$



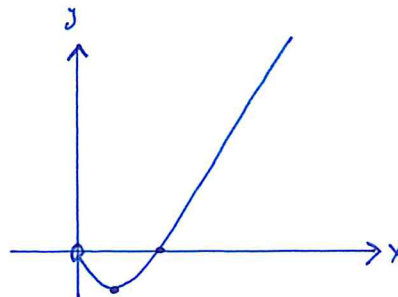
$$f'(x) = 2x \ln x + x$$

$$f'(0.5) = 2 \cdot 0.5 \cdot \ln(0.5) + 0.5 = -0.193 \quad \left( \begin{array}{l} \text{התז} \\ \text{וניתב} \end{array} \right)$$

$$f'(1) = 2 \cdot 1 \cdot \ln(1) + 1 = 1 \quad \left( \begin{array}{l} \text{התז} \\ \text{אז"ר} \end{array} \right)$$

||

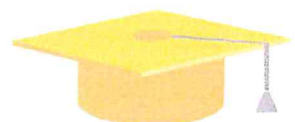
$$\min(0.607, -0.184)$$



.3

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



$$f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

$$\min(0.607, -0.184)$$

$$h(x) = f(x) - 2$$

⇓

$h(x)$  היא הצורה הנכונה של  $f(x)$  עם מינוס 2.

⇓

מציאים את מינימום של  $h(x)$ :

$$\min(0.607, -0.184 - 2)$$

⇓

$$\min(0.607, -2.184)$$

$$g(x) = -2 \cdot f(x)$$

⇓

$g(x)$  היא הנקודה הנכונה

(מינוס 2) ושינוי קיים

לפי זה -  $x$

⇓

מציאים את מינימום של  $g(x)$ :

למינוס הנקודה מקבלים:

$$\min(0.607, (-0.184) \cdot 2)$$

⇓

$$\min(0.607, -0.368)$$

למינוס השינוי מקבלים:

$$\max(0.607, -(-0.368))$$

⇓

$$\max(0.607, 0.368)$$

