

פתרון הבחינה

במתמטיקה

מועד חורף מאוחר תשפ"א, 2021, שאלון: 35482

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע":

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. הסדרה a_n מקיימת את הכלל: $a_{n+1} = 2n + 1 - a_n$.

נתון: $a_1 = 10$.

א. מצא את האיברים: a_2, a_3, a_4 .

ב. (1) הוכח כי הסדרה של האיברים במקומות האי-זוגיים היא חשבונית.

(2) האם הסדרה של האיברים במקומות הזוגיים גם היא חשבונית? נמק.

ג. מצא את סכום 46 האיברים הראשונים בסדרה a_n .

פתרון:

$n=1$: $a_{1+1} = 2 \cdot 1 + 1 - a_1 \rightarrow a_2 = -7$.ל

$n=2$: $a_{2+1} = 2 \cdot 2 + 1 - a_2 \rightarrow a_3 = 12$

$n=3$: $a_{3+1} = 2 \cdot 3 + 1 - a_3 \rightarrow a_4 = -5$

ד. (1) $(n > 1)$ הנני מניח $n+1$:

$$a_{n+1+1} = 2(n+1) + 1 - a_{n+1}$$

$$a_{n+2} = 2n + 3 - a_{n+1}$$

כעת נניח n א - הנני מניח n :

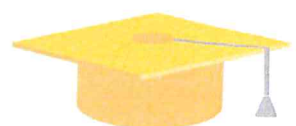
$$a_{n+2} = 2n + 3 - (2n + 1 - a_n)$$

$$a_{n+2} = 2 + a_n \quad \text{וזהו המסקנה!}$$

$$\downarrow$$

$$a_{n+2} - a_n = 2$$

מכאן נסוּסרם האי דריק במחזוריות האי 2 וז"ל



היא סדרה חשבונית עם הפרש $d=2$

(2) ההנחה מסתמך כי (1) תקפה גם

לאיבריך במקומה הזוטייג ולכן גם הם

סדרה חשבונית עם הפרש $d=2$

d. נשמע מסתמך כי?

$$S_{46} = \underbrace{S_{23}}_{\text{אינדיקס}} + \underbrace{S_{23}}_{\text{אינדיקס}} =$$

$$= \frac{23}{2} [2 \cdot a_1 + 22 \cdot d] + \frac{23}{2} [2a_2 + 22 \cdot d]$$

$$= \frac{23}{2} [20 + 44] + \frac{23}{2} [-14 + 44] = 1,081$$

$$S_{46} = 1,081$$

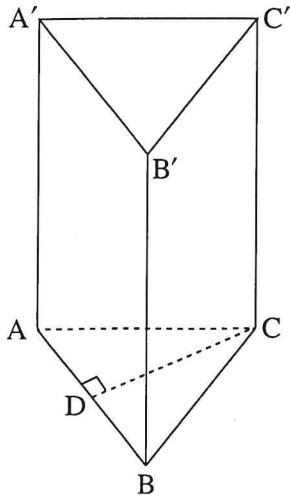
הארה: ניתן אחר פתרון איבריך סמוכים

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{45} + a_{46})$$

אז כל סדרה חשבונית שבה האיבר הראשון 3

והפרש $d=4$, וכן אחר האישיבוי יתקין ואל הסכום.





2. נתונה מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה ABC הוא משולש שווה צלעות.

CD הוא הגובה לצלע AB (ראה ציור).

נתון: $CD = a$.

א. הבע באמצעות a את אורך צלע המשולש ABC .

נתון: הזווית בין $A'D$ לבין מישור הבסיס ABC היא 68° .

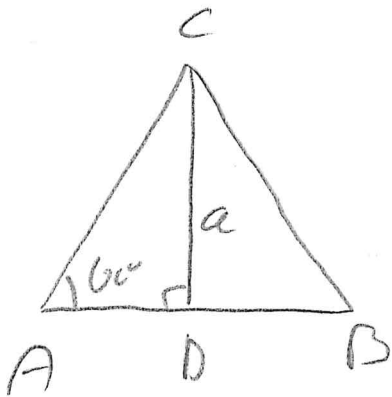
שטח המעטפת של המנסרה הוא 713 (סכום שטחי הפאות הצדדיות).

ב. (1) הבע באמצעות a את גובה המנסרה.

(2) מצא את a .

ג. מצא את גודל הזווית $\angle BA'C$.

פתרון:



א. נתון גובה המשולש ACD :

$$\frac{CD}{AC} = \sin 60^\circ$$

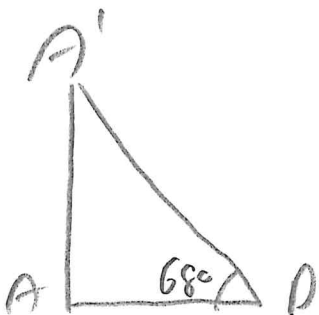
$$AC = \frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\frac{2a}{\sqrt{3}}}$$

אזכור: קצה המשולש ABC הוא

ב. אובה המשולש ש/ה צלעה הוא גם תיכון

זכור $AD = \frac{a}{\sqrt{3}}$



(1) נתון גובה המשולש $AA'D$:

הצלע התיכון היא AA'



$$\frac{AA'}{AD} = \tan 68^\circ$$

$$AA' = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \tan 68^\circ = \boxed{1.43a}$$

(2) שטח המשולשים : 713

$$713 = S_{ABA'A'} + S_{ACC'A'} + S_{BCA'B'} = 3 \cdot S_{ABB'A'}$$

$$713 = 3 \cdot AB \cdot AA'$$

$$713 = 3 \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot 1.43a$$

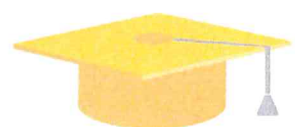
$$a^2 = 143.9315$$

$$\boxed{a = 12}$$

d. נחשב את $A'B$ (קצה שלם) כיתאורס:

$$A'B^2 = \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 + (1.43a)^2 = 13.86^2 + 12.16^2$$

$$A'B = 22.05$$



$$A'C = A'B = 22.05$$

$$BC = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}}$$

: $\angle BAC$ (שלוש קטעים) הקוסינוס משוואה

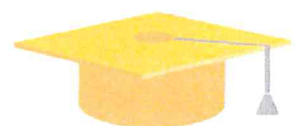
$$BC^2 = A'B^2 + A'C^2 - 2 \cdot A'B \cdot A'C \cdot \cos \angle BAC$$

$$\left(\frac{24}{\sqrt{3}}\right)^2 = 22.05^2 + 22.05^2 - 2 \cdot 22.05 \cdot 22.05 \cdot \cos \angle BAC$$

$$192 = 972.405 - 972.405 \cos \angle BAC$$

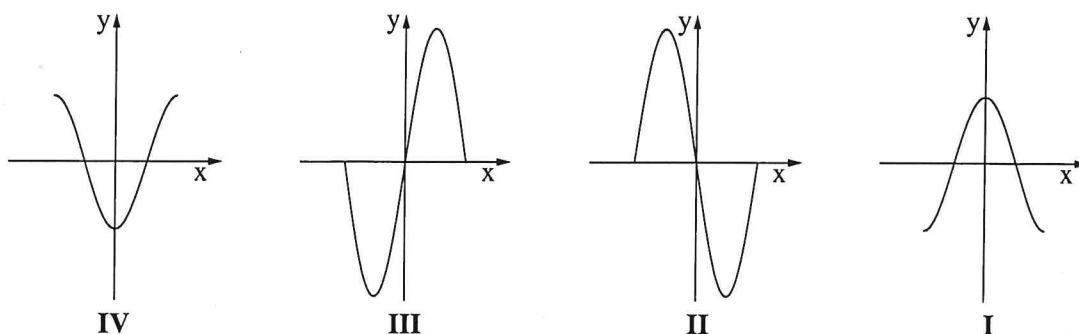
$$\cos \angle BAC = \frac{780.405}{972.405}$$

$$\angle BAC = 36.625^\circ$$



3. נתונה הפונקציה $f(x) = 2 - 4(\sin x)^2$ המוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

- א. הראה כי $f(x) = 2 \cos(2x)$.
- ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- ג. מצא את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ה. (1) קבע איזה מן הגרפים I, II, III, IV שבסוף השאלה מתאר את גרף הפונקציה $f'(x)$ (נגזרת הפונקציה $f(x)$), ונמק את קביעתך.
(2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x)$ ועל ידי ציר ה- x .



א. הוכחה:

$$f(x) = 2 - 4(\sin x)^2 = 2 - 4 \cdot (1 - \cos^2 x) =$$

$$= 4 \cos^2 x - 2 = 2 \cdot (2 \cos^2 x - 1) = 2 \cdot \cos 2x$$

מ"ע $\cos 2x$

? נקודות חיתוך עם הצירים - חיתוך עם ציר x ($y=0$):
נשמש בכללי האלגוריתם של יבולק' שהיפתנו את נסיונו
בסעיף הקודם:

$$0 = 2 \cdot \cos 2x \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \quad (k \text{ שלם})$$



$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

K	-1	0
X	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$

ואין ערכים נוספים בהמשך הנקודה.

$$\left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right), \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right)$$

עכ

אין נק' בחינה של ג'רל יפונה f עם ציר ה-x
בהמשך הנקודה.

היטק עם ציר y (x=0):

$$f(0) = 2 \cdot \cos(2 \cdot 0) = 2 \cdot \cos(0) = 2$$

$$(0, 2)$$



ג. נקודות קיצון פנימיות - קתמוס
 $:-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
 נגזרת:

$$f(x) = 2 \cos(2x)$$

$$f'(x) = 2 \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2 = -4 \cdot \sin(2x)$$

נשווה את הנגזרת לאפס על מנת למצוא נקודות

"חשובות" כקיצון קתמוס: $f'(x) = 0$

$$-4 \cdot \sin(2x) = 0 \quad /: (-4)$$

$$\sin(2x) = 0$$

$$2x = \pi \cdot k$$

$$(k \text{ שלם}) \quad x = \frac{\pi}{2} \cdot k$$

$$\Downarrow \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$(k=0) \quad x = 0$$

שני פסגות נוספות:

$$f''(x) = -4 \cdot (\cos(2x)) \cdot 2 = -8 \cdot \cos(2x)$$

$$f''(0) = -8 \cdot \cos(2 \cdot 0) = -8 < 0$$

פסגה $(0, f(0))$ נקודת קיצון מסוג מקסימום.



$$f(0) = 2 \cdot \cos(2 \cdot 0) = 2 \cdot \cos(0) = 2$$

$$\boxed{(0, 2) \text{ max}}$$

נקודות קיצון מקסימום :

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos\left(2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2 \cdot \cos(-\pi) = -2$$

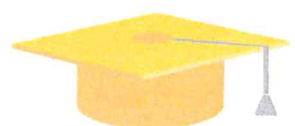
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos(\pi) = -2$$

אם סוג הקיצון נקבע לפי סיג הקיצון של נקודת הקיצון הפנימית (מקסימום) והיציבות של הפונקציה הולמטרית כפי שהמוח הנגזר.

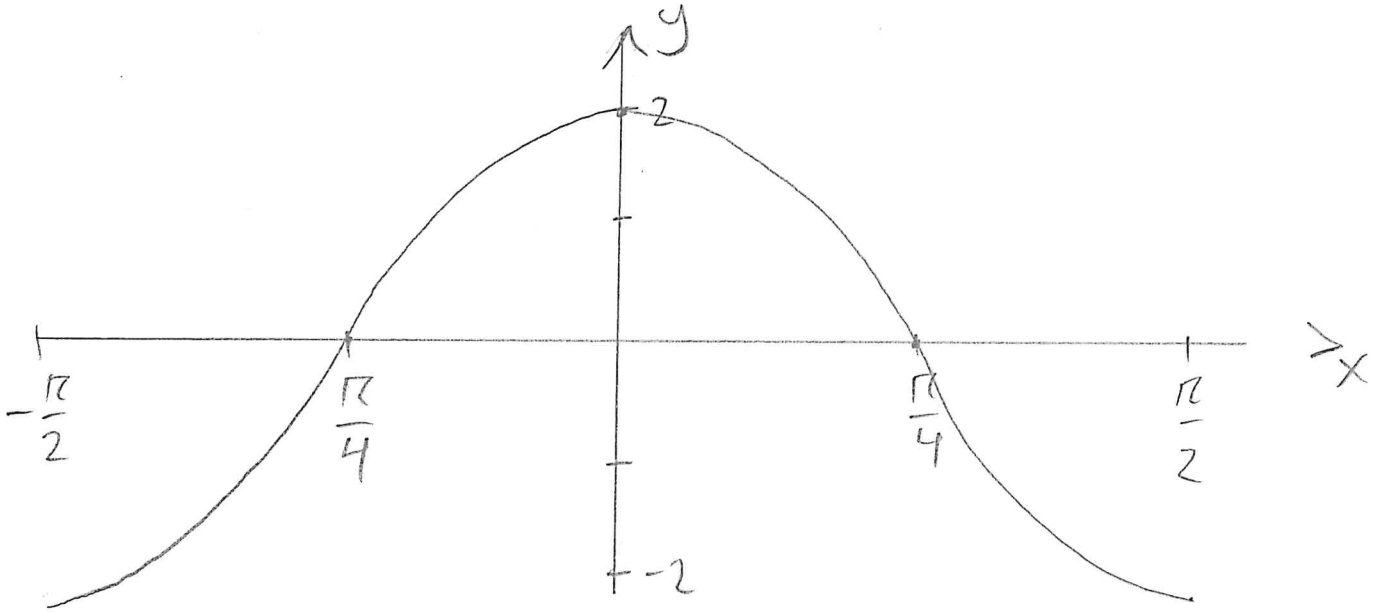
אכן סוג הקיצון של נקודות הקיצון של הקצה המוח היו מינימום

$$\boxed{\left(-\frac{\pi}{2}, -2\right) \text{ min}, \left(\frac{\pi}{2}, -2\right) \text{ min}}$$

local:

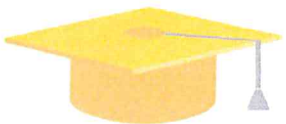


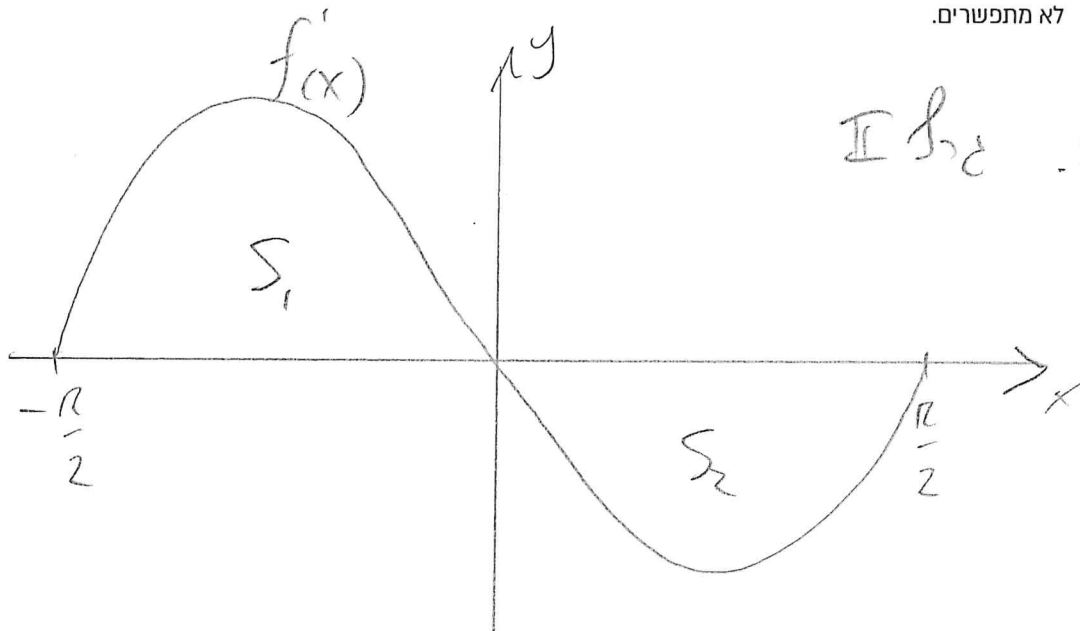
3. סקירה של גיל הפונקציה:
אל פי סעיפי התקנה עד פה:



ניתן לתקור עם לפי כיוול דגיה א פי 2 (הממזר קילן פי 2).
וממזה דגיו פי 2 של פונקציה הקוסינוס $\cos x$.

הו. סדיק נקודת הקיטון הפנימית (2,0)
ונציה של f עוקר ממוקדו לשלילי בק אפס
(לפי סג הקיטון - מקסימל שלטון בסעף קודם).
על עיל II מואר עתאג דגל
על עיל III נפסל כיוון שמוא מואקיה ושלילי סקס $x=0$
הפניה שלו עילי עיל.
על עיל I - נפסל כיוון שאלו עילי מואר ולי מואר ולי
על עיל I - נפסל כיוון שאלו עילי מואר ולי מואר ולי





ה. 2. גילוי II

נניח את הסיווג הנראים בסרט.

$$S = S_1 + S_2$$

$$S_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (f'(x)) dx = [f(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = f(0) - f(-\frac{\pi}{2})$$

$$S_1 = 2 \cdot \cos(2 \cdot 0) - 2 \cdot \cos(2 \cdot (-\frac{\pi}{2})) = 2 + 2 = 4$$

נייח להשמש בטקניקת סימטריה ולהוכיח כי f' ג'ינה אי-סימטרית או δ חטף:

$$S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0 - f'(x)) dx = [-f(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -f(\frac{\pi}{2}) + f(0)$$

$$S_2 = -2 \cos(2 \cdot \frac{\pi}{2}) + 2 \cdot \cos(2 \cdot 0) = 2 + 2 = 4$$

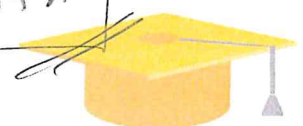
$$S = S_1 + S_2 = 4 + 4 = 8$$

סמ' כולל:

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.

אל תתפשר עליה.



4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^{2x} + 4}{e^x}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
- ג. הראה כי $f(x) = e^x + 4e^{-x}$.
- ד. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ו. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הקיצון שלה, ועל ידי ציר ה- y .

פתרון

2. נגדן אילו צוני x ומנימי מילנס.

$$e^x = 0$$

אין פתרון

(כי אין מצויני ממני הילקין)

||

תחם הילקנוו: $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 4}{e^x}$$

$$x=0 \rightarrow f(0) = \frac{e^{2 \cdot 0} + 4}{e^0} = \frac{1+4}{1} = 5$$

$(0, 5)$

2.



$$f(x) = 0 \rightarrow 0 = \frac{e^{2x} + 4}{e^x}$$

||

$$0 = e^{2x} + 4$$

$$e^{2x} = -4$$

ע"ן נתיבן
(ג.א.וי געזיני תעני הילקו)

||

ע"ן מניב הילקו. אג זיו ג-א

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 4}{e^x} = \frac{e^{2x}}{e^x} + \frac{4}{e^x} = e^{2x-x} + 4 \cdot e^{-x} = e^x + 4e^{-x}$$

.2

$$f(x) = e^x + 4e^{-x} \quad \text{ג'ילאנו:}$$

$$f(x) = e^x + 4e^{-x}$$

.3

$$f'(x) = e^x + 4 \cdot e^{-x} \cdot (-1)$$

$$f'(x) = e^x - 4e^{-x}$$

$$e^x - 4e^{-x} = 0$$

$$e^x - 4 \cdot \frac{1}{e^x} = 0$$



$$\frac{e^x}{e^x} - \frac{1}{4} = 0 \quad / \cdot e^x$$

$$e^{2x} - 4 = 0$$

$$e^{2x} = 4$$

$$\Downarrow$$

$$2x = \ln 4 \quad / : 2$$

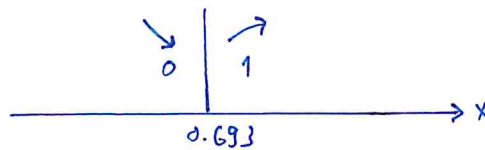
$$x = 0.693 = \ln 2$$

$$f(x) = e^x + 4e^{-x}$$

$$(0.693, \quad)$$

$$f(0.693) = e^{0.693} + 4 \cdot e^{-0.693} = 4$$

$$(0.693, 4)$$



$$f'(x) = e^x - 4e^{-x}$$

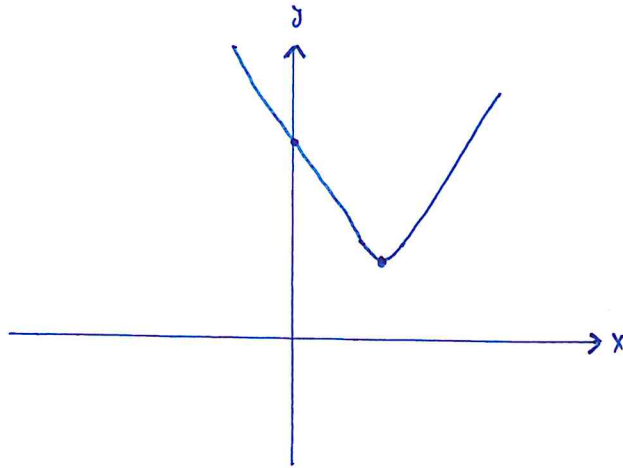
$$f'(0) = e^0 - 4e^{-0} = -3 \quad \text{חסר ויניע}$$

$$f'(1) = e^1 - 4e^{-1} = 1.247 \quad \text{חיובי}$$

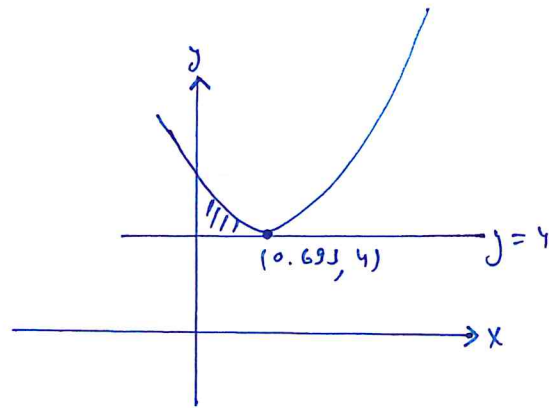
\Downarrow

$$\min(0.693, 4)$$





..)



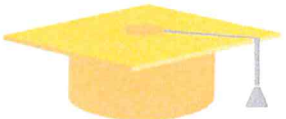
.1

נשׂיך גרמינה ניצין בנימה הינו ישר . הינקולא לניו ה- x .
 הימשׂן א׳קו גרמינה (0.69, 4) , ומינין שמיניק הימשׂן : y=4 .

$$\begin{aligned}
 \text{ניק׳ הינקולא} &= (e^x + 4e^{-x}) - (4) = e^x + 4e^{-x} - 4 \\
 S^1 &= \int_0^{0.69} (e^x + 4e^{-x} - 4) dx = \left[\frac{e^x}{1} + 4 \frac{e^{-x}}{-1} - 4x \right]_0^{0.69} = \\
 &= (e^{0.69} - 4 \cdot e^{-0.69} - 4 \cdot 0.69) - (e^0 - 4e^0 - 4 \cdot 0) = 0.227
 \end{aligned}$$

נחידע ענ פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



5. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .
- ג. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ה. נתונות הפונקציות: $g(x) = -2f(x)$, $h(x) = f(x) - 2$.
רשום את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$ ואת שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$.
קבע את הסוג של כל אחת מהן.
נמק את תשובותיך.

לירכנן

א. נרננין לאיילון עיני א תינין ה- ה- ה- חילוקי.

$x > 0$

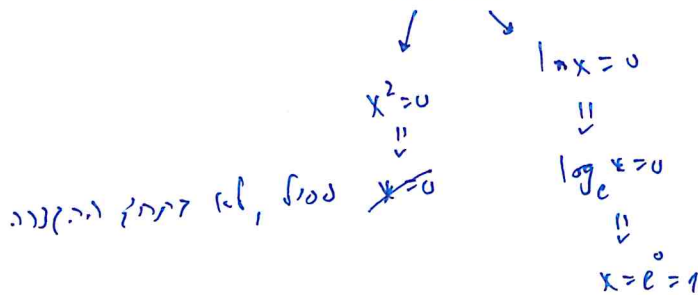
!!

לחץ והתקננה: $x > 0$

2.

$f(x) = x^2 \cdot \ln x$

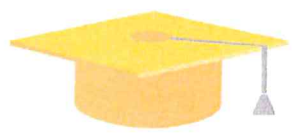
$f(x) = 0 \Rightarrow 0 = x^2 \cdot \ln x$



(1, 0)

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.**



$$f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

.ז

ניגודי גרסאות לטענות אלו: זהו ניקוד.

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2x \ln x + x$$

$$2x \ln x + x = 0$$

$$x(2 \ln x + 1) = 0$$

$x \neq 0$
כדי שיהיה
אפשר

$$2 \ln x + 1 = 0$$

$$2 \ln x = -1 \quad | : 2$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}$$

||

$$\ln_e x = -\frac{1}{2}$$

||

$$x = e^{-\frac{1}{2}} = 0.607$$

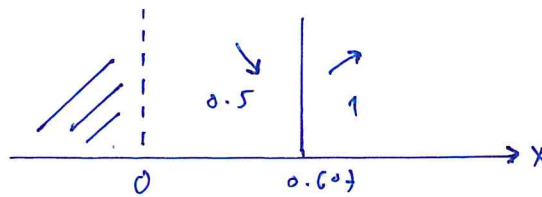


$$f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

$$(0.607,)$$

$$f(0.607) = (0.607)^2 \cdot \ln(0.607) = -0.184$$

$$(0.607, -0.184)$$



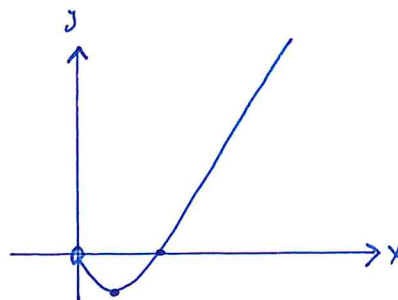
$$f'(x) = 2x \ln x + x$$

$$f'(0.5) = 2 \cdot 0.5 \cdot \ln(0.5) + 0.5 = -0.193 \quad \left(\begin{array}{l} \text{מחץ} \\ \text{יוני} \end{array} \right)$$

$$f'(1) = 2 \cdot 1 \cdot \ln(1) + 1 = 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{מחץ} \\ \text{יוני} \end{array} \right)$$

∩

$$\min(0.607, -0.184)$$



3



$$f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

$$\min(0.607, -0.184)$$

$$h(x) = f(x) - 2$$

⇓

$h(x)$ היא הפונקציה המקבילה ל- $f(x)$ עם יחס של 2 ולפיכך נאבד את המינימום.

⇓

ערכי המינימום של $h(x)$:

$$\min(0.607, -0.184 - 2)$$

⇓

$$\min(0.607, -2.184)$$

$$g(x) = -2 \cdot f(x)$$

⇓

$g(x)$ היא הפונקציה המקבילה ל- $f(x)$

(ני 2) ושניהם קימים

אזי ה- x

⇓

ערכי המינימום של $g(x)$:

לפיכך נאבד את המינימום של $g(x)$:

$$\min(0.607, (-0.184) \cdot 2)$$

⇓

$$\min(0.607, -0.368)$$

לפיכך נאבד את המינימום של $g(x)$:

$$\max(0.607, -(-0.368))$$

⇓

$$\max(0.607, 0.368)$$

