

## פתרון הבחינה

# במתמטיקה

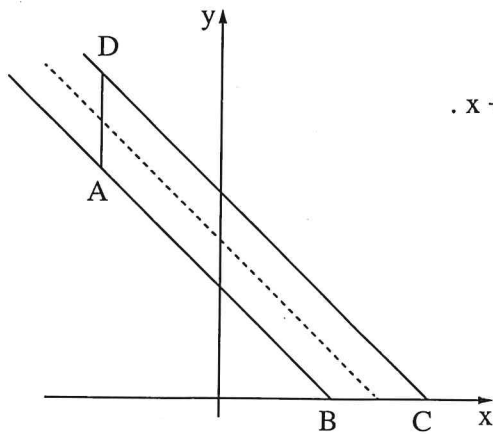
חורף תשפ"א, 2021, שאלון: 35582

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע":

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.





1. ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel DC$ ).

נתון: המרחק בין בסיסי הטרפז,  $AB$  ו- $DC$ , הוא  $\sqrt{2}$ ,

קטע האמצעים של הטרפז ABCD נמצא על הישר  $x + y - 4 = 0$ .

א. מצא את משוואות הישרים שבסיסי הטרפז נמצאים עליהם.

נתון: השוק BC נמצאת על ציר ה- $x$ .

מעבירים פרבולה קנונית  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ )

כך שהקודקים A ו-D של הטרפז נמצאים על מדריך הפרבולה,

ומוקד הפרבולה נמצא על הקודקוד B או על הקודקוד C.

ב. (1) מהי משוואת הפרבולה שבעבורה

הטרפז ABCD הוא הגדול מבין שני הטרפזים האפשריים? נמק.

(2) מהי משוואת הפרבולה שבעבורה הטרפז ABCD הוא הקטן מבין שני הטרפזים האפשריים?

ג. מעבירים ישר המקביל לציר ה- $x$  וחותך את שתי הפרבולות שמצאת בסעיף ב בשתי נקודות, E ו-F.

מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו מונחים אמצעי הקטעים EF הנוצרים באופן זה.

פתרון:

א. ד"ר האמלג'ים של הטרפז נגמנו קוויק ש"ה

משני הבסיסים, והוא נקרא אקסיסיים.

נשמע קנוסוס - נהיה בין ישרים נקודתיים:

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

מש"ל - אבסיסיים ה"א  $x + y + C = 0$  (ק"ב):

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-4 - C|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \Rightarrow 1 = |4 + C|$$

(ד"ר ש"ה קוויק:  $C = -3$ ,  $C = -5$ )

ההצגים של  $y$  בשוואת ג"פול ג"פול - 0 ז"א, ו



$x+y-3=0$	הגטים AB יהיה
$x+y-5=0$	והגטים CD יהיה

ה. נמ (א) את הנקודות B ו-C:

נקודה B:  $x+0-3=0 \rightarrow x=3$

נקודה C:  $x+0-5=0 \rightarrow x=5$

נקודות הן B(3,0), C(5,0)

(1) הטיפס הצדון מחוץ השניק יתהב עקור

הנקודה C(5,0), לשום שהלפנין יהיה ע

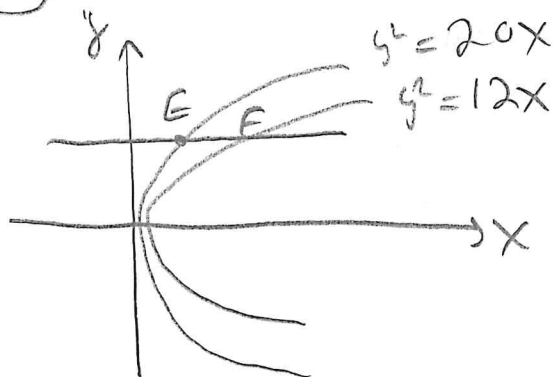
הישר  $x=5$ . משווא הפרבולה, בקנה

זה תהיה  $y^2 = 20x$

(2) גלורה צומה, הטיפס הצדון מחוץ השניק

יתהב עקור הנקודה C(5,0).

משווא הפרבולה תהיה  $y^2 = 12x$



ב. (10/10):



נסמן את הנקודות:  $E\left(\frac{t^2}{20}, t\right)$   $(x, y)$   $F\left(\frac{t^2}{12}, t\right)$

אם אנחנו רוצים נקודה:

$$\begin{cases} x = \frac{\frac{t^2}{20} + \frac{t^2}{12}}{2} \\ y = t \end{cases} \Rightarrow 2x = \frac{y^2}{20} + \frac{y^2}{12} \quad / \cdot 60$$

$$120x = 3y^2 + 5y^2$$

↓

$$\boxed{y^2 = 15x}$$



2. ABC הוא משולש.

נסמן:  $\vec{AB} = \underline{u}$  ,  $\vec{AC} = \underline{v}$  .

נתון:  $A(0, 2, -1)$  ,  $B(-3, 2, 2)$  ,

הנקודה  $D(-2, 3, 1)$  נמצאת על הקטע BC כך ש-  $\vec{AD} = \frac{2}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$  .

- א. (1) מצא את שיעורי הנקודה C והוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.
- (2) מצא את משוואת המישור ABC .

הנקודה E נמצאת במישור ABC כך ש- ABEC הוא מלבן. הנקודה M היא מפגש האלכסונים במלבן זה. S היא נקודה כך ש- MS מאונך למישור ABEC .

- ב. (1) מצא הצגה פרמטרית לישור MS , והסבר מדוע לכל נקודה S כזו SABEC היא פירמידה ישרה.
- (2) תן דוגמה לשיעורים של נקודה S כמתואר בתת-סעיף ב(1).

בעבור הנקודה S שמצאת, חשב את הזווית SAB .

- (3) בעבור הנקודה S שמצאת, האם קיימת נקודה נוספת, P , כך ש- PABEC היא פירמידה ישרה שבעבורה מתקיים  $\sphericalangle SAB = \sphericalangle PAB$  ? אם כן, מצא את שיעוריה. אם לא, נמק.

*פתרון:*

1.  $C(x, y, z)$  ,  $A(0, 2, -1)$  ,  $B(-3, 2, 2)$  .

*(היגיון והסברים הנתונים)*

$\underline{u} = \vec{AB} = B - A = (-3, 2, 2) - (0, 2, -1) = (-3, 0, 3)$

$\underline{v} = \vec{AC} = C - A = (x, y, z) - (0, 2, -1) = (x, y-2, z+1)$

*מכאן:*

$\vec{AD} = \frac{2}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$

$(-2, 3, 1) - (0, 2, -1) = \frac{2}{3}(-3, 0, 3) + \frac{1}{3}(x, y-2, z+1)$

$(-2, 1, 2) = (-2, 0, 2) + (\frac{x}{3}, \frac{y-2}{3}, \frac{z+1}{3})$





נשאלה על הסיקורים:

$$\begin{cases} -2 = -2 + \frac{x}{3} \\ 1 = \frac{y-2}{3} \\ 2 = 2 + \frac{z+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(0, 5, -1)}$$

נמצא את האדאלרית של המשולש ABC:

$\vec{AB} = (-3, 0, 0)$

$\vec{AC} = (0, 3, 0)$

$\vec{BC} = C - B = (0, 5, -1) - (-3, 0, 0) = (3, 5, -1)$

נקבוקה תנאי נוקדמ:

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-3, 0, 0) \cdot (0, 3, 0) = 0 \Rightarrow AB \perp AC$

$\boxed{\angle A = 90^\circ}$  המשולש יסיסול

(2) נמצא את הנורמל של המשולש:

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (-3, 0, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 3, 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a + 3c = 0 \\ 3b = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = 0 \end{cases}$

נבחר  $c = 1$  ונדב:  $(a, b, c) = (1, 0, 1)$

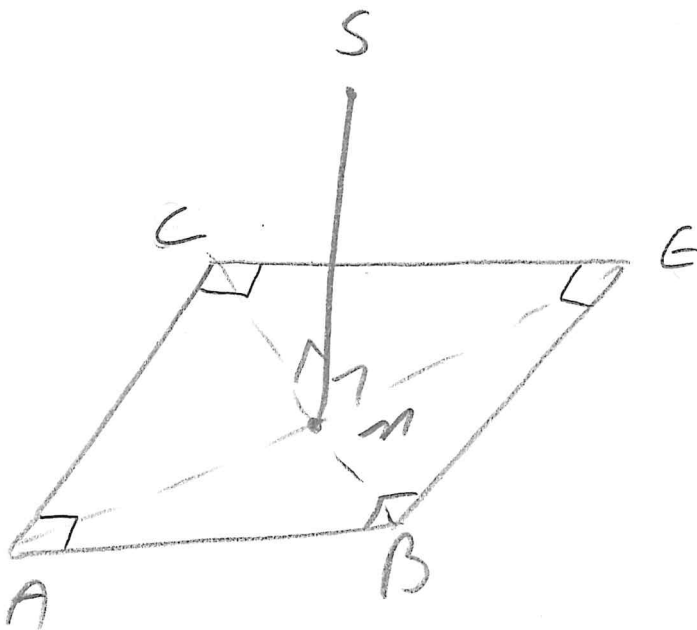


משוואת המישור  $x+z+d=0$  היא  
נציב נקודה, למשל  $A(0,2,-1)$ :

$$0 - 1 + d = 0 \Rightarrow d = 1$$

$x+z+1=0$  משוואת המישור ABC היא

ק. נסיים:



(1) הישר SM מאונך למישור, ולכן הוא  
הישר הטרנסונלי.

נמצא את נקודה M:

$$M = \frac{B+C}{2} = \frac{(-3, 2, 2) + (0, 5, 1)}{2} = (-1.5, 3.5, 0.5)$$

ההצגה הפונקציונלית של SM היא:

$$\underline{x = (-1.5, 3.5, 0.5) + t(1, 0, 1)}$$



הוא כטענים בהצגה מוקדים זה היא זה ועליוס זה אזה, אכן מה קיים!

(9.5.3)  $\Delta SMA \cong \Delta SMB \cong \Delta SMC \cong \Delta SME$

$\Downarrow$   
 $AS = BS = CS = ES$

$\Downarrow$   
הפינולדיזה SABEC יסיה זכא עקן ס S

(2) נבחר  $t = \frac{1}{2}$  (זמשל), ונדקו:

$X = (-1, 3.5, 1) + \frac{1}{2}(7, 0, 1)$

$X = (-1, 3.5, 1) \Rightarrow S(-1, 3.5, 1)$

נחשב יא הס וויא:

$\cos \angle SAB = \frac{\vec{AS} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AS}| |\vec{AB}|} = \frac{(-1, 3.5, 2) \cdot (-3, 0, 1)}{|(-1, 3.5, 2)| \cdot |(-3, 0, 1)|}$

$\cos \angle SAB = \frac{9}{\sqrt{7.25} \cdot \sqrt{10}} \Rightarrow \angle SAB = 38.016^\circ$

(3) דויל ודיזה P כסו כן שנקודה מ היא אנה

הטג SP:

$S(-1, 3.5, 1)$        $M(-1.5, 3.5, 0.5)$        $P(x, y, z)$





השם:

$$\begin{cases} -1.5 = \frac{-1+x}{2} \\ 3.5 = \frac{3.5+y}{2} \\ 0.5 = \frac{1+z}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3.5 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$P(-2, 3.5, 0)$$

כאן ר, הויבאנו



3. נתונה המשוואה  $i \cdot z^6 = \frac{1}{64}$  (z הוא מספר מרוכב).

א. מצא את כל פתרונות המשוואה הנתונה.

פתרונות המשוואה הנתונה מתאימים לקודקודים של מצולע קמור במישור גאוס.

ב. הראה שלכל אחד מקודקודי המצולע קיים קודקוד אחד בדיוק כך שהישר שמחבר ביניהם עובר דרך ראשית הצירים.

ג. כופלים כל אחד מפתרונות המשוואה הנתונה במספר מרוכב קבוע, w.

הסבר מדוע סכום המספרים שהתקבלו הוא אפס.

נתון:  $w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

ד. כתוב משוואה שפתרונותיה הם 12 המספרים: פתרונות המשוואה הנתונה בתחילת השאלה והמספרים שהתקבלו

לאחר ההכפלה ב-w.

3.  $i \cdot z^6 = \frac{1}{64} \quad | :i$

$z^6 = \frac{1}{64i} \rightarrow z^6 = \frac{1050}{640590}$

$z^6 = \frac{1}{64} \text{cis}(-90)$

$z^6 = \frac{1}{64} \text{cis}270$

$z_k = \sqrt[6]{\frac{1}{64}} \text{cis}\left(\frac{270}{6} + \frac{360k}{6}\right)$  לפי נוסחת דה-מואבר

$z_k = \frac{1}{2} \text{cis}(45 + 60k)$

$z_0 = \frac{1}{2} \text{cis}45$

$z_3 = \frac{1}{2} \text{cis}225$

$z_1 = \frac{1}{2} \text{cis}105$

$z_4 = \frac{1}{2} \text{cis}285$

$z_2 = \frac{1}{2} \text{cis}165$

$z_5 = \frac{1}{2} \text{cis}345$

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**





4. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{-4}{e^{2x} - 4e^x + 3}$ .

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- (2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים.
- (3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן (אם יש כאלה).
- (4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .
- (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ב. הסבר מדוע לכל  $b < 0$  מתקיים:  $\int_{b-3}^b f(x) dx < -4$ .

- נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{k}{f(x)}$ , שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  $k$  הוא פרמטר.
- נתון כי לפונקציה  $g(x)$  יש נקודת מינימום.
  - ג. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור  $k$ ? נמק.

$e^{2x} - 4e^x + 3 \neq 0$   
 $e^x \neq 3 \quad e^x \neq 1$   
 $x \neq \ln 3 \quad x \neq 0$

פתרון:  
 א. (1) מכנה גזירה מאפס:

תחום הגדרה:  $x \neq 0, \ln 3$

(2) אסימפטוטה אנכית:

$x = \ln 3, x = 0$

האונה שונה מאפס ולכן

אסימפטוטה אופקית:

$x \rightarrow \infty: e^{2x} - 4e^x + 3 \rightarrow \infty \rightarrow y = 0$   
 $x \rightarrow -\infty: e^{2x} - 4e^x + 3 \rightarrow 3 \rightarrow y = -\frac{4}{3}$



$$f'(x) = \frac{0 + 4(2e^{2x} - 4e^x)}{(e^{2x} - 4e^x + 3)^2} = \frac{8e^x(e^x - 2)}{(e^{2x} - 4e^x + 3)^2}$$

(3) נצטרך:

נצטרך לאפס ונסתור:

$$8e^x(e^x - 2) = 0$$

אין 0 כיוון  $\swarrow$   $\rightarrow e^x = 2$   
 $x = \ln 2$

נציב את שיער  $x = \ln 2$ :

$$f(\ln 2) = \frac{-4}{e^{2\ln 2} - 4e^{\ln 2} + 3} = \frac{-4}{4 - 8 + 3} = 4 \rightarrow (\ln 2, 4)$$

נדגים את הנקודה:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\ln 2$	1	$\ln 3$	2
$f'(x)$	-	/	-	0	+	/	+
$f(x)$	$\searrow$	/	$\searrow$	.	$\nearrow$	/	$\nearrow$

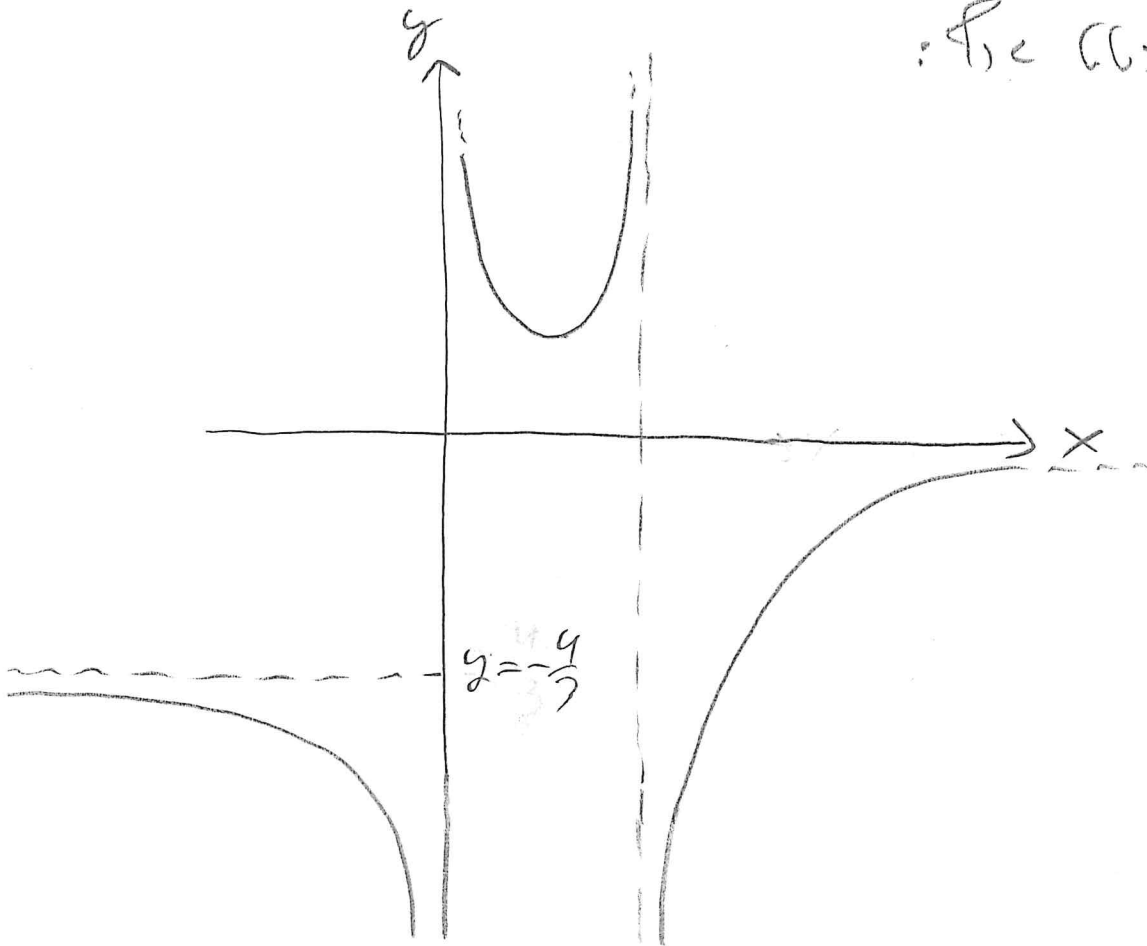
נקודה הקיצון:  $(\ln 2, 4)$  גינולוס

(4) תחומי עלייה:  $x < \ln 2$  או  $\ln 3 < x < 2$   
תחומי ירידה:  $0 < x < \ln 2$  או  $x > 2$





(5) נשאלת עלי:



ה. דמיון סא, זהו הפונקציה נלנו כולו

מתח איסר  $y = -\frac{4}{3}$ :

היסר הזה יוצר עם הישרים

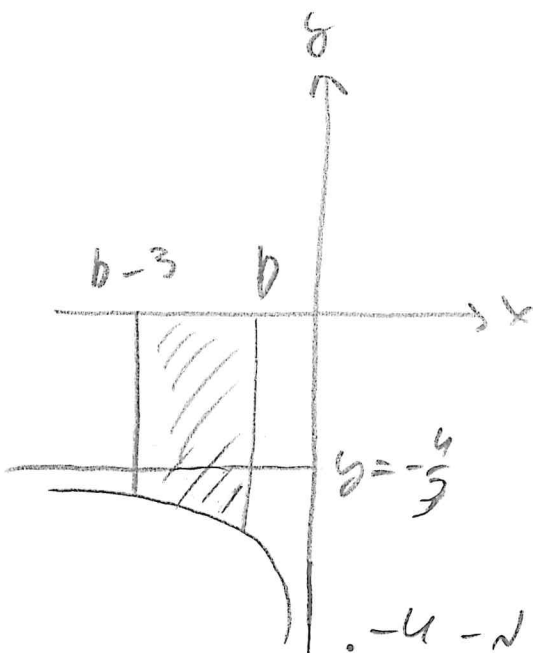
$b = a$  ו-  $a = b - 3$ , וגם תירא

השכן ששטחו הוא 4

$$(b - (b - 3)) \cdot \frac{4}{3} = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$$

האינטגרל לייצג "שטח" שלילי

שבתו ששטח השלילי ושלילי הוא  $-4$ .



$$g(x) = \frac{k}{f(x)}$$

d.

$$g'(x) = \frac{-k \cdot f'(x)}{(f(x))^2}$$

(פסוק):

$$-k \cdot f'(x) = 0$$

נשאלה לאיפה:

$$f'(x) = 0$$

לפונקציה ואם יש נקודות קיצון ששיעור ה-x שלה זהה לזה של הפונקציה  $f(x)$ , שלה יש נקודת מינימום.

כדי שהנקודה תהיה נקודת מינימום, גם כיוון הנגזרת של  $f(x)$  קבוע חיובי זהה לכיוון הנגזרת

$$-k > 0 \quad f'(x) \text{ חיובי}$$

$$\Downarrow \\ \boxed{k < 0}$$



5. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{(\ln(x))^3 - 1} + 1$

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- (2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים.
- (3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).
- (4) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).
- (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ב. הישר  $y = k$  אינו חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  ( $k$  הוא פרמטר). מצא את  $k$ . נמק.

ג. נגדיר  $T(x) = \int_{e^{-1}}^x f(x) dx$   $e^{-1} \leq x < e$

(1) לפניך שלושה ערכי  $x$ , (III-I). בעבור איזה מהם הערך של  $T(x)$  הוא הכי גדול? נמק.

$x = \frac{1}{2}$  (I)     $x = 1$  (II)     $x = 2$  (III)

(2) הסבר מדוע בעבור כל  $e^{-1} \leq x < e$  מתקיים:  $T(x) < 1$ .

אולי יקראו לך  $\ln$  בייק אולי תיזכר:  $x > 0$

$u^3 - 1 \neq 0$

$x > 0, x \neq e$

$\ln^3 x \neq 1$

$\ln x \neq 1$

$x \neq e$

(2) אולי ק'ת:  $y = 1$      $x = e$      $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{u^3 - 1} + 1 = \frac{1}{\infty} + 1 = 1$  (נק'ת)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{u^3 - 1} + 1 = \frac{1}{-\infty} + 1 = 1$

אולי ק'ת:  $y = 1$      $x = e$      $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{u^3 - 1} + 1 = \frac{1}{-\infty} + 1 = 1$  (נק'ת)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{u^3 - 1} + 1 = \frac{1}{\infty} + 1 = 1$   
 אין אסימטוטה ב  $x = 0$

$x = e$      $\lim_{x \rightarrow e^-} \frac{1}{u^3 - 1} + 1 = \frac{1}{0^-} + 1 = \infty$  (נק'ת)  $\lim_{x \rightarrow e^+} \frac{1}{u^3 - 1} + 1 = \frac{1}{0^+} + 1 = \infty$

$x = e$  אסימטוטה אנכית



5 א(3)

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (u^3x-1) - 1 \cdot (3u^2x \cdot \frac{1}{x})}{(u^3x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3u^2x \cdot \frac{1}{x}}{(u^3x-1)^2} \quad f'(x)=0: -3u^2x \cdot \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{u^2}{x} = 0$$

$$|x=1|$$

אם  $x=1$  הנקודה היא  $(1,0)$  הנקודה הזו היא נקודת הקיצון של הפונקציה. נגזרת הפונקציה היא  $-\frac{3}{x}$  ולכן הנקודה הזו היא נקודת הקיצון.

אזורים: אין  
 יחידות:  $|x > 1 \quad 0 < x < 1|$

א(4) אין תיטן אם צור  $y$  אכיוון  $x=0$  לא בתחום.

$$\frac{1}{u^3x-1} + 1 = 0 \quad | \cdot (u^3x-1)$$

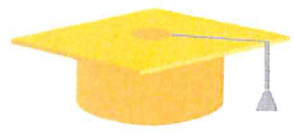
$$1 + u^3x - 1 = 0$$

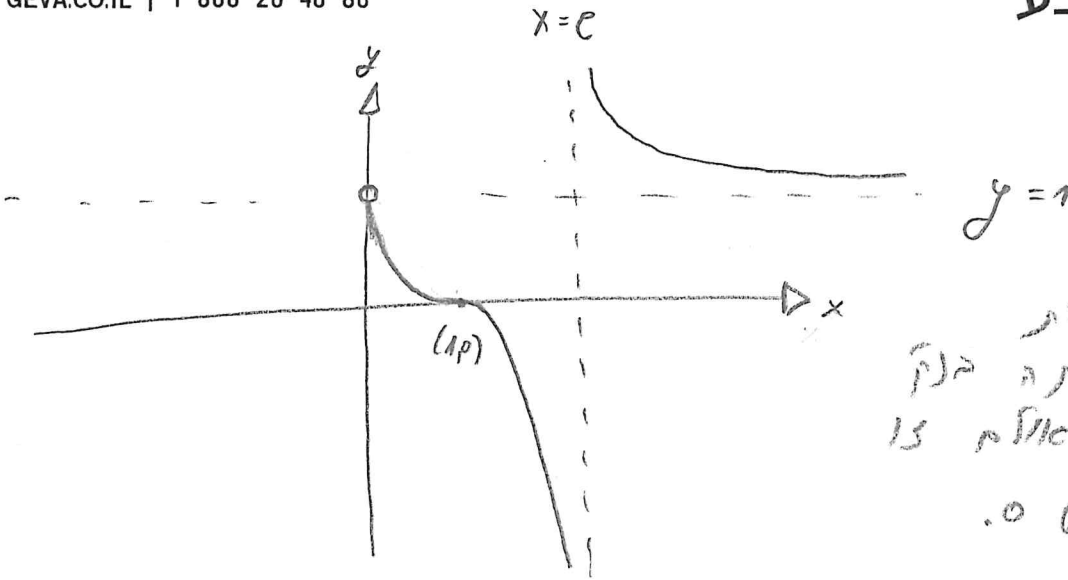
$$u^3x = 0 \quad | \sqrt[3]{\phantom{x}}$$

$$ux = 0$$

$$x = 1$$

$$\underline{\underline{(1,0)}}$$





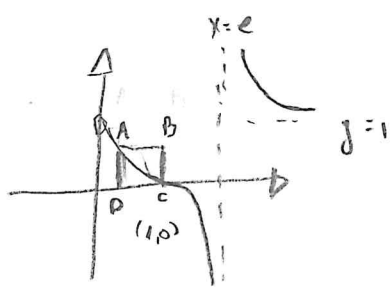
5א (5)

מכיוון שהסגור יורד  
גבול תחום הפונקציה בקו  
(1,0) אין קיצון, אולם 15  
נקודת אפס שיפוט 0.

ב. לפי הגרף אקוואלר החקירה את הפונקציה עם זרקה של א אמצע  $|k=1|$

ע. (2) מכיוון שהגורם  $x=e^{-1}$  הפונקציה אפס נמצאת ה-  $x$  עז 3  $x=1$  זרקה  
האינטגרל של  $e^{-x}$  ויפגש, כאשר  $e^{-x} > 1$  הפונקציה אפס נמצאת עז 3 ולכן עז 3  
האינטגרל יתגלה עז 3, ולכן אפס אפס  $x=1$  נקודת אפס הפונקציה  
ביחידה. (II)  $x=1$

ז. לפי סעיף (א) הפונקציה הפגש באתר אפס כאשר  $x=1$   
נחשב את שטח המלבן שנוצר  $DC = 1 - e^{-1}$   
נחשב את שיפוט ה-  $y$  של נקודה A:



$$f(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}} + 1 = \frac{1}{2} \rightarrow AD = \frac{1}{2}$$

שטח המלבן שצולח ואתר אפס האינטגרל הפגש קו  
 $S_{ABCD} = \frac{1}{2} (1 - e^{-1}) = 0.316$   
בתחום קטן  $1 - e^{-1}$  ולכן  $1 - e^{-1} < 1$ .

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**

