

פתרון הבחינה

במתמטיקה

מועד חורף מאוחר תשפ"א, 2021, שאלון: 35382

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע":

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. מחיר של שמיכה הוא פי 4 ממחיר של כרית.

במבצע מכירות ירד מחיר השמיכה ב-15%, ומחיר הכרית ירד ב-20%.

דנה קנתה במחירי המבצע: שמיכה אחת ו-2 כריות. היא שילמה בעבור הקנייה הזאת 370 שקלים סך הכול.

א. מצא מה היה המחיר של כרית לפני המבצע, ומה היה המחיר של שמיכה לפני המבצע.

בתקציב של דנה היה אפשר לקנות במחירים המקוריים (המחירים שלפני המבצע) בדיוק שמיכה אחת ו-2 כריות.

ב. האם סכום הכסף שחסכה דנה בגלל המבצע יספיק לקניית עוד 2 כריות במחיר המבצע? נמק.

א. x - מחיר כרית (לפני המבצע)
 $4x$ - מחיר שמיכה (לפני המבצע)

מחיר כרית לאחר מבצע:

מחיר כרית ירד ב-20%, כלומר מחירו לאחר המבצע הוא 80% ממחירו ההתחלתי, כלומר $0.8x$.

הוא: $0.8x = \frac{80}{100} \cdot x$

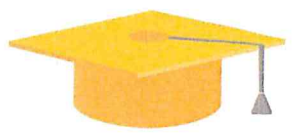
מחיר שמיכה לאחר מבצע:

מחיר שמיכה ירד ב-15%, כלומר מחירו לאחר המבצע הוא 85% ממחירו ההתחלתי, כלומר $0.85 \cdot 4x$.

הוא: $0.85 \cdot 4x = 3.4x$

צנה קנתה שמיכה אחת ו-2 כריות:

נכנס את הנתונים לאחרי המבצע קטגוריה:



סוג	כמות	מחיר זאת	
1.6x	2	0.8x	כריג
3.4x	1	3.4x	שמירה

הסכום: מחיר כריג 0.8x ולכן מחירן של 2 כריג
הוא $0.8x \cdot 2 = 1.6x$

מחיר שמירה אחת הוא 3.4x

קניית המטאלה:

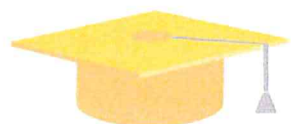
עוד הנתון דנה שילמה עבור הקנייה 370 שקלים.
עוד הטלה המחיר שילמה עבור הקנייה הוא

$$1.6x + 3.4x = 5x$$

אם כן המטאלה היא:

$$5x = 370 \quad / :5$$

$$x = 74$$



מחיר כרטיס לפני המבצע הוא א, חבן

מחיר כרטיס לפני המבצע הוא 74 שקלים.

מחיר שאיכה לפני המבצע הוא 4x, חבן

מחיר כרטיס לפני המבצע הוא $4 \cdot 74 = 296$ שקלים.

מחיר כרטיס - 74 שקלים
מחיר שאיכה - 296 שקלים

והוא:

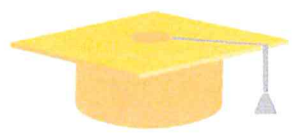
היתקצוב של פנה הוא המחיר של שאיכה
1-2 כרטיס לפני המבצע.

מחיר כרטיס לפני המבצע הוא 74 שקלים (מחיר)
שאיכה הוא 296 שקלים (עם סגלף טד)
חבן מחיר שאיכה 1-2 כרטיס הוא:

$$296 + 74 \cdot 2 = 444 \text{ שקלים}$$

עדי הניתן פנה שלמה עבור הקנייה 370 שקלים
חבן שאיכה האיסטון של הוא:

$$444 - 370 = 74$$



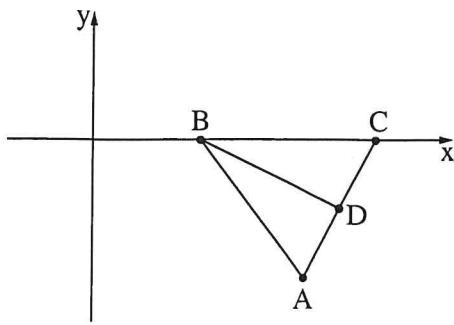
מחיר 2 כיוול קמחיו מקצק הוא:
 מחיר כיוול קמחיו מקצק ערבי סקיל אד הוא 0.8, כולל
 $0.8 \cdot 74 = 59.2$

מחיר 2 כיוול קמחיו מקצק הוא:
 $59.2 \times 2 = 118.4$

נסכא! קנה תסכה 74 שקלים
 מחיר 2 כיוול הוא 118.4 שקלים
 מסכום הנסף תסכה לא יספיק זה אקנייה
 2 כיוול.

תשובה:
 מסכום הנסף תסכה
 לא יספיק אקנייה 2 כיוול





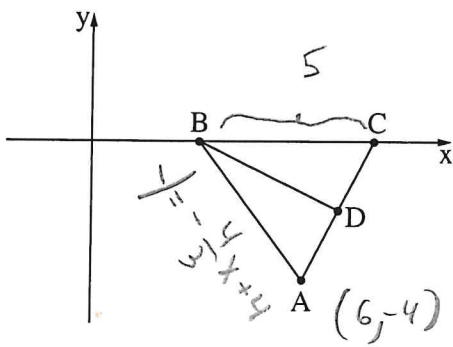
במשולש ABC, הצלע BC מונחת על ציר ה-x, כמתואר בסרטוט.
נתון: $BC = 5$,

הקודקוד A נמצא בנקודה $(6, -4)$,
משוואת הצלע AB היא $y = -\frac{4}{3}x + 4$.

- א. (1) מצא את שיעורי הקודקוד B.
- (2) מצא את שיעורי הקודקוד C.

BD הוא תיכון במשולש ABC.

- ב. מצא את משוואת הישר BD.
- ג. הראה ש- BD מאונך ל- AC.
- ד. מצא את שטח המשולש ABC.
- ה. פי כמה גדול שטח המשולש ABC משטח המשולש BCD? נמק.

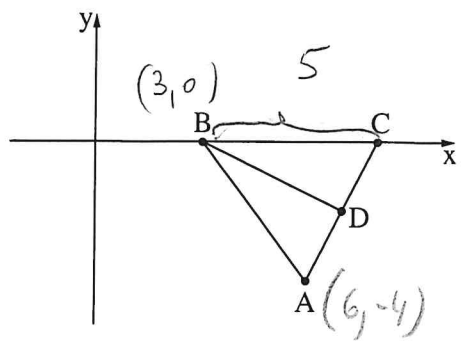


א. (4) בנקודה B נמצא $x = 3$
ציר ה-x וכן שיעור ה-y
אלה הוא 0.
נצוק $y = 0$ במשוואת AB
ונקח את x.
 $y = -\frac{4}{3}x + 4$
 $-\frac{4}{3}x + 4 = 0$
 $-\frac{4}{3}x = -4 \quad /: -\frac{4}{3}$
 $x = 3$

$B(3, 0)$

גט/גו





(2) הנקודה C נמצאת 5 יחידות ימינה מ-B.
 ולכן שיעור ה-x הוא 0.

$$y_c = 0$$

המרחק בין B ל-C הוא 5

ולכן שיעור ה-x של הנקודה C הוא:

$$x_B + 5 = 3 + 5 = 8$$

$$C(8, 0)$$

וגטובה!

ק. אף הנקודה D היא תיכון של BD.
 נחשב את BD.

נמצא את שיעורי הנקודה D באמצעות נוסחת אמצע הקטע.

$$x_D = \frac{x_C + x_A}{2}$$

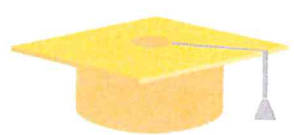
$$y_D = \frac{y_C + y_A}{2}$$

$$x_D = \frac{8 + 6}{2} = 7$$

$$y_D = \frac{0 + (-4)}{2} = -2$$

$$D(7, -2)$$

נמצא את הסימון של BD באמצעות הנוסחה למציאת שיעורי אמצע הקטע.



$B(3, 0)$

$D(7, -2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{BD} = \frac{0 - (-2)}{3 - 7} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

נמצא את המשוואה הישר BD ע"י השימוש ב $m = -\frac{1}{2}$ ונקודת $B(3, 0)$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$$

ג. נניח שהישר BD מאונק ל AC (כלומר $m_{BD} \cdot m_{AC} = -1$), אז השימוש ב $m_{BD} = -\frac{1}{2}$ הוא הנכונה ויש להשתמש בו.

$m_{BD} = -\frac{1}{2}$ (ע"י סעיף ג)

נמצא את השינון של AC ע"י הנקודה A c-1

$A(6, -4)$

$C(8, 0)$

$$m_{AC} = \frac{-4 - 0}{6 - 8} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$m_{BD} \cdot m_{AC} = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$$

כלומר, הישרים BD ו AC מאונקים זה לזה.

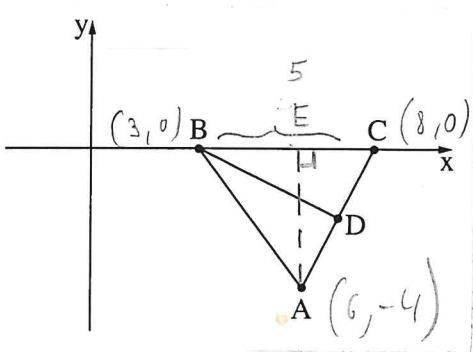


3. הנוסחה לחישוב שטח משולש הוא:

$$S = \frac{\text{אורך BC} \times \text{גובה}}{2}$$

נמצא את שטח משולש ABC ע"פ

הגובה BC ונקודה איתו נקראת AE.



$$S_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AE}{2}$$

ע"פ הנתון $BC = 5$

$$AE = y_E - y_A = 0 - (-4) = 4$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

תשובה: שטח משולש ABC הוא 10

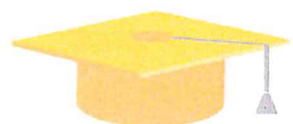
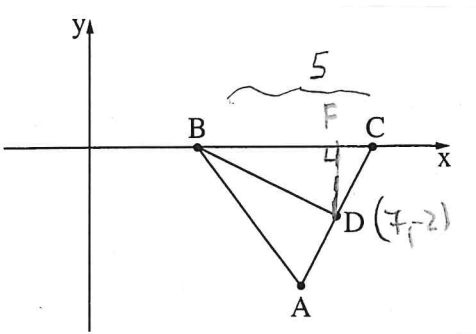
ה. נמצא תחילה את שטח משולש BCD

ע"פ הגובה BC ונקודה איתו נקראת F.

$$S_{\Delta BCD} = \frac{BC \cdot DF}{2}$$

ע"פ הנתון $BC = 5$

$$DF = y_F - y_D = 0 - (-2) = 2$$



$$S_{\Delta BDC} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$$

קודם ידוע

$$S_{\Delta ABC} = 10$$

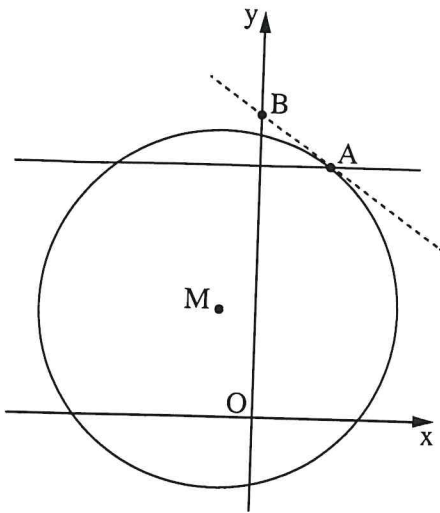
$$S_{\Delta BDC} = 5$$

נסו!

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BDC}} = \frac{10}{5} = 2$$

העוקב:
 שטח ממוט ABC גדול פי 2
 משטח ממוט BCD





3. הנקודה M היא מרכז המעגל $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$.
 הישר $y = 7$ חותך את המעגל בנקודה A (ראה סרטוט).
 ידוע שהנקודה A נמצאת ברביע הראשון.
 א. מצא את השיעורים של הנקודה A.
 ב. (1) מצא את שיפוע הישר MA.
 (2) מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה A.
 ג. המשיק שאת משוואתו מצאת בתת-סעיף ב(2) חותך את ציר ה-y בנקודה B.
 מצא את שטח המשולש ABO (הנקודה O היא ראשית הצירים).

א. הנקודה A נמצאת על הישר $y=7$ ולכן שיפוע הישר הוא 7.

הנקודה A נמצאת על המעגל ולכן נציב $y=7$ במשוואת המעגל, ונקבל את שיפוע הישר x של הנקודה.

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

נציב $y=7$

$$(x+1)^2 + (7-3)^2 = 25$$

$$(x+1)(x+1) + 4^2 = 25$$

$$x^2 + x + x + 1 + 16 - 25 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-8)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -4$$



הנקודה A נמצאת בקוטר הכאטון חסן הפתרון
המקיים הוא $x=2$

$$A(2,7)$$

תשובה:

ה. (1) נמצא את השיעור MA בעזרת הנוסחה - נמצא שיעור ע"י 2 נקודות.

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

מרכז המעגל הוא M (-1,3)

השיעור MA הוא:

$$M(-1,3)$$

$$m_{AM} = \frac{3-7}{-1-2} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} = \frac{1}{\frac{3}{4}}$$

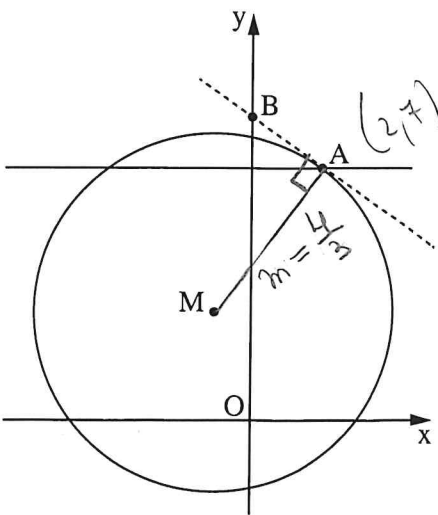
נקודה A (2,7)
ע"י

(2) רדיוס מאונך למשיק בנקודה ההיטתית חסן שיעור המשיק הוא הנכפול שלגבי שיעור MA א"א נמצא השיעור שלה (-1) .

$$m_{AM} = \frac{4}{3}$$

הנכפול של $\frac{4}{3}$ הוא $m_{\text{משיק}} = -\frac{3}{4}$ ע"י (1)

$$m_{\text{משיק}} \cdot m_{AM} = -1$$



$$m_{\perp} \cdot \frac{4}{3} = -1$$

$$m_{\perp} = \frac{-1}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

נמצא את משוואת הנשען עם הנקודה A(2,7)

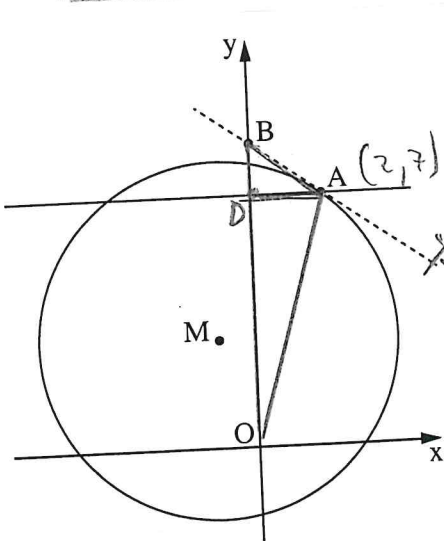
השיטה $m = -\frac{3}{4}$

$$y - 7 = -\frac{3}{4}(x - 2)$$

$$y - 7 = -\frac{3}{4}x + 1\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + 8\frac{1}{2}$$

משוואת הנשען היא $y = -\frac{3}{4}x + 8\frac{1}{2}$ גטובה!



ג. נמצא את שיעורי הנקודה B.

הנקודה B נמצאת על ציר y פרק

$x=0$ נציב $x=0$ במשוואת

הנשען ונמצא את שיעור ה-y

של הנקודה.

$$y = -\frac{3}{4} \cdot 0 + 8\frac{1}{2}$$

$$y = 8\frac{1}{2}$$

B(0, 8 $\frac{1}{2}$)

$$S_{\Delta ABO} = \frac{\text{בסיס} \times \text{גובה}}{2}$$

$$S_{\Delta ABO} = \frac{BO \cdot AD}{2}$$

ב) היות ונקודת החיתוך של הישר $y=7$ עם ציר ה-y



$$BO = Y_B - Y_0 = 8\frac{1}{2} - 0 = 8\frac{1}{2}$$

$$AD = X_A - X_D = 2 - 0 = 2$$

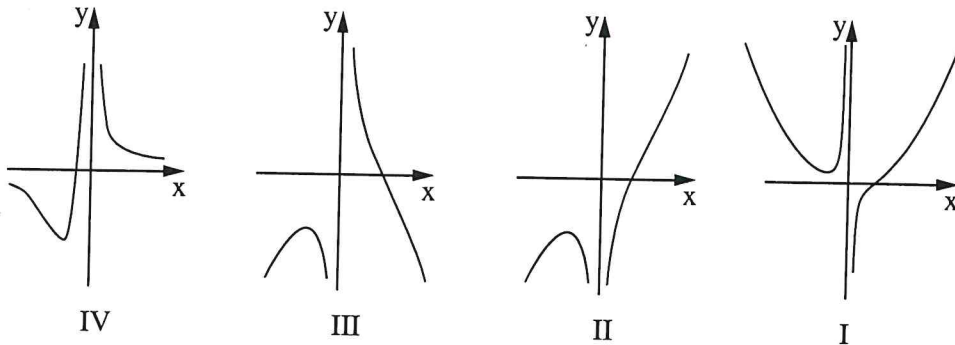
$$S_{\Delta ABO} = \frac{8\frac{1}{2} \cdot 2}{2} = 8\frac{1}{2}$$

תשובה: $8\frac{1}{2}$ שטח מנווט ABO הוא



4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{16}{x} - x^2 + 3$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.
- ג. קבע אם הפונקציה $f(x)$ עולה או יורדת בעבור $x > 0$. נמק.
- ד. אחד מארבעת הגרפים שבסוף השאלה, I, II, III, IV, הוא גרף הפונקציה $f(x)$. ציין מיהו ונמק.
- ה. תן דוגמה לישר המקביל לציר ה- x , וחותר את גרף הפונקציה $f(x)$ בשלוש נקודות שונות. נמק את תשובתך.



א. $x \neq 0$ (המכנה לא יכול להיות 0)

ב. לא ציטטתי, עקרוני קיבולן נשאלה אם נמצא הפונקציה 0-1.

$$f(x) = \frac{16}{x} - x^2 + 3$$

$$f'(x) = \frac{-16}{x^2} - 2x$$

$$\frac{-16}{x^2} - 2x = 0 \quad / \cdot x^2$$

$$-16 - 2x^3 = 0$$

$$-2x^3 = 16 \quad / : -2$$

$$x^3 = -8$$



$$x = \sqrt[3]{-8} = -2$$

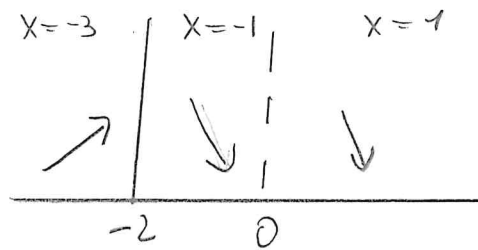
נמצא את שיתוקי ה- y של הנקודה.

נציק בנקודה $x = -2$.
נקודת:

$$f(-2) = \frac{16}{-2} - (-2)^2 + 3 = -9$$

הנקודה היא $(-2, -9)$.

נמצא את סוג הנקודות בעזרת טבלת סימנים או ריבוע.



כדי תחום נציק בעזרת אג ה- x שנבחרו.
ז"כ אג התחומים.

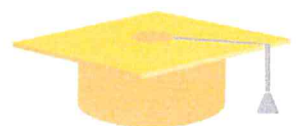
$$f'(x) = \frac{-16}{x^2} - 2x$$

$$f'(-3) = \frac{-16}{(-3)^2} - 2(-3) = +$$

$$f'(-1) = \frac{-16}{(-1)^2} - 2(-1) = -$$

$$f'(1) = \frac{-16}{1^2} - 2 \cdot 1 = -$$

לפי הטבלה הנקודה שיתוקה היא נקודת מקסימום.



$$\boxed{(-2, -9) \text{ מקסימום}}$$

תשובה

ג. עדי הטקנה מהסעיף קודם ניתן לראות שמתקיים $x > 0$ הנוקבה נפתח ולכדת

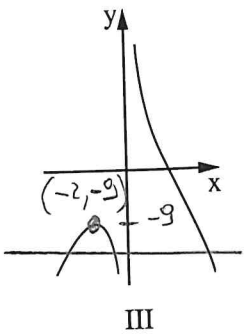
$$\boxed{\text{תשובה: הנוקבה נפתח ולכדת עבור } x > 0}$$

3. עדי סעיף ה' יש נקודת מקסימום בקודם $(-2, 9)$ כלומר יש נקודת מקסימום בקודם לוי.

עדי סעיף ט' הנוקבה נפתח ולכדת עבור $x > 0$.

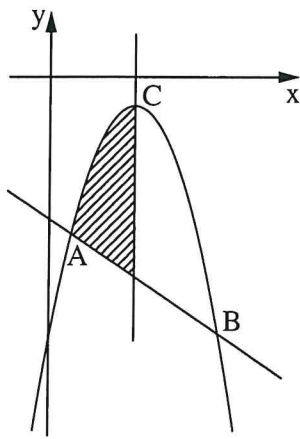
לכן יש לנו את הנקודות III ו- IV , והן הן הנקודות המיועלות.

$$\boxed{III \text{ ג' } IV}$$



ה. כל ימי המקור לפני x אחת או יותר אל גיל הנוקבה 3 נקודות נמצא מתחת לנקודת הקיבון $(-2, -9)$. מכאן כל ימי שטיווי ה- y של נחלק (-9) מילאם לזכיותה. אמט: $y = -10$





5. בסרטוט שלפניך מוצגים הפרבולה $f(x) = -x^2 + 8x - 18$ והישר $y = -x - 10$. הפרבולה והישר נחתכים בנקודות A ו-B, כמתואר בסרטוט. הנקודה C היא נקודת המקסימום של הפרבולה.
- מצא את שיעורי הנקודה C.
 - מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
 - דרך הנקודה C העבירו אנך לציר ה-x. חשב את השטח המקווקו בסרטוט: השטח הנמצא משמאל לאנך, ומוגבל על ידי הפרבולה, על ידי הישר ועל ידי האנך.

א. הנקודה C היא נקודת מקסימום.
 ב. מצא את נקודת מקסימום הפרבולה או הנקודה C של $f(x)$, את הנקודה C.

$$f(x) = -x^2 + 8x - 18$$

$$f'(x) = -2x + 8$$

$$-2x + 8 = 0$$

$$-2x = -8$$

$$/: -2$$

$$x = 4$$

נציג $x=4$ בנקודה C של $f(x)$ ונקודת אגודת ה-y.

$$f(4) = -4^2 + 8 \cdot 4 - 18$$

$$f(4) = -2$$

$$C(4, -2)$$

תשובה:



ב. הנקודות A ו-B הן נקודות החיתוך
הביקוה והישר, חכן נמצאו איתן עד סגור
מחזיק המשוואה של הביקוה והישר.

$$\begin{cases} y = -x^2 + 8x - 18 \\ y = -x - 10 \end{cases}$$

$$-x^2 + 8x - 18 = -x - 10$$

$$-x^2 + 8x - 18 + x + 10 = 0$$

$$-x^2 + 9x - 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4(-1)(-8)}}{2(-1)}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 8$$

נציב את הנקודות שקיבלנו במשוואת הישר ונקבל
את y.

$$y = -x - 10$$

$$x = 1 \rightarrow y = -1 - 10 = -11 \quad (1, -11)$$

$$x = 8 \rightarrow y = -8 - 10 = -18 \quad (8, -18)$$

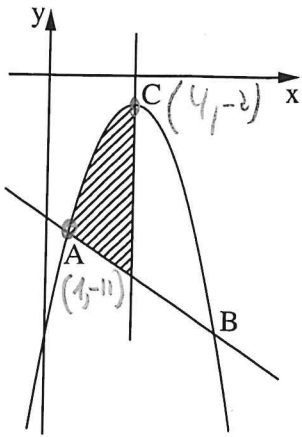
לפיכך הן הנקודות שבהן הם:

$$A(1, -11)$$

$$B(8, -18)$$

תשובה:





ש, שקוואר האינסוף הם

$$X(B) = 4 \quad X(A) = 1$$

$$\int_1^4$$

הפונקציה הנורמלית היא:

$$(-x^2 + 8x - 18) - (-x - 10) =$$

$$-x^2 + 8x - 18 + x + 10 = -x^2 + 9x - 8$$

היטות הנטות:

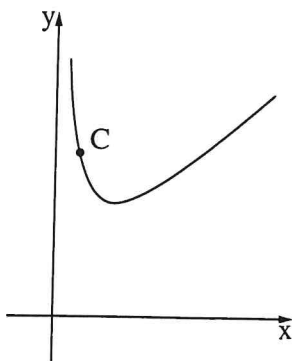
$$\int_1^4 (-x^2 + 9x - 8) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} - 8x \right]_1^4 =$$

$$\left(-\frac{4^3}{3} + \frac{9 \cdot 4^2}{2} - 8 \cdot 4 \right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{9 \cdot 1^2}{2} - 8 \cdot 1 \right)$$

$$18\frac{2}{3} - \left(-3\frac{5}{6} \right) = 22\frac{1}{2}$$

הנטות הוא $22\frac{1}{2}$





6. נתונה הפונקציה $y = 3x + \frac{1}{x}$ בתחום $x > 0$ (ראה סרטוט).

C היא נקודה על גרף הפונקציה.

א. מצא את שיעור ה-x של הנקודה C שבעבורו סכום השיעורים

של הנקודה C הוא מינימלי.

ב. מצא את הסכום המינימלי של שיעורי הנקודה C.

א. נסמן ק-x אר שיעור ה-x של הנקודה C.

נקודה C נמצא על המוקצה הנטול, חסן

שיעור ה-y של הנקודה C הוא $3x + \frac{1}{x}$

נסמך אר שיעורי הנקודה C:

$$C \left(x, 3x + \frac{1}{x} \right)$$

היינו זוגות מוקצים $f(x)$ שגודלן אר סכום

השיעורים של הנקודה C, חסן המוקצה הוא:

$$f(x) = x + 3x + \frac{1}{x}$$

$$f(x) = 4x + \frac{1}{x}$$

נבא שהנקודה היא נקודת מינימום.



למצוא את הפונקציה ונשווה את הנשערים 0-

$$f'(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$$

$$4 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad / \cdot x^2$$

$$4x^2 - 1 = 0$$

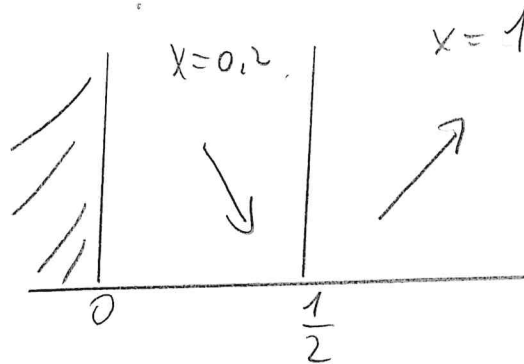
$$4x^2 = 1 \quad / : 4$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

המבוא שנקבע C נמצא בנקודת הנחתון אז
הסתיון שבו זהבאים הוא $x = \frac{1}{2}$.

נבאם מצדו $x = \frac{1}{2}$ נקודת קיצור מינימלית
בצורה שלם חלופה אחרת אויב:



נציג הנשערים את שילובי ה-x שנחתמו קבל גמול



$$f'(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(0.2) = 4 - \frac{1}{0.2^2} = -$$

$$f'(1) = 4 - \frac{1}{1^2} = +$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}}$$

גטוקה!

בני אנוש אר הסוכר המינמלי נצויק
קטע, ציה שמצאנו קטע אר

$$f(x) = 4x + \frac{1}{x}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$\boxed{4 \text{ (נסוכר המינמלי הוא 4)}}$$

