א. הציון הממוצע בבחינה הוא, הוא $\bar{x}=75$.

20% **מהציונים <u>נמוכים</u> מהציון** 60 .

השטח החלקי משמאל לציון התקן, שמתחת לעקומה של ההתפלגות הנורמלית,

מייצג את ההסתברות לקבלת ציון שמתחת לציון התקן המתאים.

$$p=0.2 \quad \rightarrow z=-0.84$$

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

$$-0.84=\frac{60-75}{s}$$

$$s=\frac{-15}{-0.84}$$

$$\boxed{s=17.86}$$

תשובה: סטיית התקן של הציונים של בחינת המתכונת היא 17.86 .

ב. לבחינת המתכונת ניגשו 300 **תלמידים.**

תלמידים עם ציון <u>נמוך</u> מ- 55 **יקבלו שיעורי עזר .**

ציון התקן הוא $z=\frac{x-\bar{x}}{s}=\frac{55-75}{17.86}=-\frac{20}{17.86}=-1.12$.

השטח החלקי מימין לציון התקן, שמתחת לעקומה של ההתפלגות הנורמלית,

מייצג את החלק היחסי (אחוז, או הסתברות) לקבלת ציון שמעל לציון התקן שמצאנו.

היא: $p(x<55)=p(z<-1.12)=0.131$.

מספר התלמידים הוא $0.131\cdot 300\approx 39$.

תשובה: 39 **תלמידים (בערך) יקבלו את שיעורי העזר.**

ג. ל- 38 **התלמידים המצטיינים הוצע לעזור לתלמידים מתקשים, במסגרת ההתנדבות בבית הספר.**

$p(\text{excellence})=\frac{38}{300}\approx 0.127$ **, ובהתאם** $1-0.127=0.873$ **מהתלמידים אינם מצטיינים.**

$z(p<0.873)=1.14$.

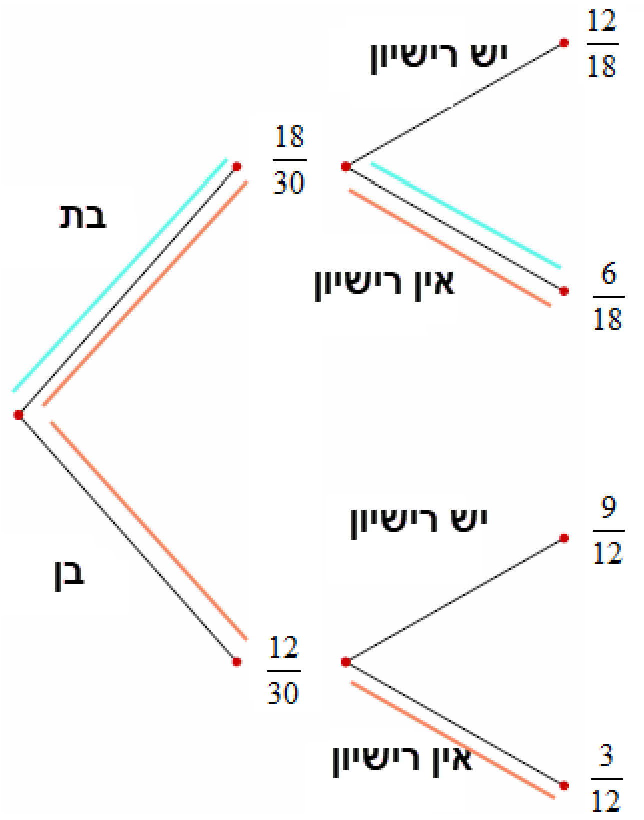
$$1.14=\frac{x-75}{17.86}$$

$$20.36=x-75$$

$$\boxed{95.36=x}$$

תשובה: הציון המינימלי הנדרש להצטיינות הוא 95.36 .

א. נבנה עץ אפשרויות מתאים.



(1) נחשב את ההסתברות שנבחר תלמיד ללא רישיון נהיגה.

$$P(no\ license)=\frac{18}{30}\cdot\frac{6}{18}+\frac{12}{30}\cdot\frac{3}{12}=0.3$$

תשובה: ההסתברות היא 0.3 .

(2) נחשב את ההסתברות שנבחרה בת,

אם ידוע שהתלמיד/ה ללא רישיון נהיגה (המסלול הירוק, מתוך המסלולים האדומים).

$$\mathrm{P}(a\ girl\ /\ hasn't\ a\ license)=\frac{\mathrm{P}(a\ girl\cap has't\ a\ license)}{\mathrm{P}(has't\ a\ license)}=$$

$$\mathrm{P}(a\ girl\ /\ has\ a\ license)=\frac{\frac{18}{30}\cdot\frac{6}{18}}{0.3}=\frac{0.2}{0.3}=\frac{2}{3}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{2}{3}$.

ב. נחשב את ההסתברות להוצאת שני בעלי רישיון נהיגה, לאחר החזרה של הנבחר הראשון.

$P(licence)=1-0.3=0.7$.

ולכן ההסתברות המבוקשת היא $0.7^2=0.49$.

תשובה: ההסתברות להוצאת שני בעלי רישיון נהיגה, עם החזרה, היא 0.49.

ג. נסמן x **נספר הבנים שנוספו, מתוך ה-** 5 **שהצטרפו לכיתה.**

ההסתברות לבחור בן לא השתנתה, לכן שיעור הבנים מתוך ה- 5 **שנוספו שווה לשיעורם מתוך ה-** 30 **שהיו.**

$$\frac{x}{5}=\frac{12}{30}\quad\rightarrow x=2$$

אפשר גם : $\frac{12+x}{35}=\frac{12}{30}\quad\rightarrow x=2$.

לכן נוספו 2 **בנים ויש בכיתה** $12+2=14$ **בנים לאחר השינוי,**

ונוספו 3 **בנות ויש בכיתה** $18+3=21$ **בנות, לאחר השינוי.**

תשובה: לאחר השינוי יש בכיתה 14 **בנים ו-** 21 **בנות.**

א. הסדרה a_n מקיימת את הכלל $a_n = 2n+3$ לכל n טבעי.

נראה שהסדרה היא חשבונית ונמצא את הפרשה.

$$a_{n+1} - a_1 = 2(n+1)+3-(2n+3)$$
$$a_{n+1} - a_n = 2n+2+3-2n-3$$
$$\boxed{a_{n+1} - a_n = 2} \quad \rightarrow \boxed{d=2}$$

הראינו שההפרש בין כל שני איברים סמוכים בסדרה קבוע (לא תלוי ב- n), ולכן הסדרה היא חשבונית,

כאשר $d=2$ ו- $\boxed{a_1 = 5} \leftarrow a_1 = 2\cdot 1 + 3 = 5$.

תשובה: הוכחנו שהסדרה היא חשבונית, והפרש הסדרה הוא 2 .

ב. באולם הקולנוע, מסודרים הכיסאות לפי הכלל $a_n = 2n+3$,

כלומר זו סדרה חשבונית $d=2$ ו- $a_1 = 5$.

נמצא באיזו שורה יש 19 כיסאות.

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$
$$19 = 5 + 2(n-1)$$
$$14 = 2(n-1) \quad /:2$$
$$7 = n-1$$
$$\boxed{8=n} \quad \rightarrow \boxed{a_8 = 19}$$

תשובה: בשורה ה- 8 יש 19 כיסאות.

ג. נמצא את מספר השורות באולם, כאשר בסידור החדש (עקב הקורונה) $d=1$ ו- $a_1 = 3$.

מספר הצופים הכולל שאפשר להושיב באולם,

קטן ב- 90 ממספר הצופים בתפוסה מלאה לפני מגבלות הקורונה.

$$S_n^* + 90 = S_n$$
$$\frac{n\cdot[2\cdot 3+1(n-1)]}{2} + 90 = \frac{n\cdot[2\cdot 5+2(n-1)]}{2} \quad /\cdot 2$$
$$n\cdot(6+n-1)+180 = n\cdot(10+2n-2)$$
$$n\cdot(5+n)+180 = n\cdot(8+2n)$$
$$5n+n^2+180 = 8n+2n^2$$
$$0 = n^2+3n-180$$
$$\boxed{n=12} \quad \leftarrow n \textit{ is natural} \quad \rightarrow \cancel{n=-15}$$

תשובה: מספר השורות באולם הוא 12.

א. (1) אלכסוני המקבילית ABCD חוצים זה את זה בנקודה E , והנקודה F היא אמצע הצלע AD .

מכאן ש- FE קטע אמצעים ב- $\Delta\mathrm{ADC}$.

לכן FE מקביל לצלע שממול, $\mathrm{FE} \parallel \mathrm{DC}$ (ושווה למחציתה, $\frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{DC}}=\frac{1}{2}$).

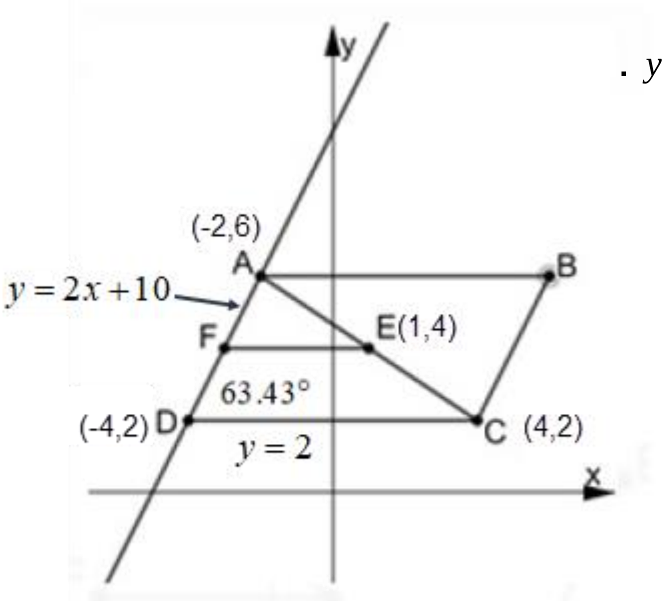
תשובה: הוכחנו ש- $\mathrm{FE} \parallel \mathrm{DC}$.

(2) כיוון ש- $\mathrm{FE} \parallel \mathrm{DC}$, אז מקבלים זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים:

$\sphericalangle\mathrm{AFE}=\sphericalangle\mathrm{ADC}$ ו- $\sphericalangle\mathrm{AEF}=\sphericalangle\mathrm{ACD}$, ו- $\Delta\mathrm{AEF}\sim\Delta\mathrm{ACD}$ על פי משפט דמיון זווית זווית.

יחס השטחים הוא $1:4$, כי יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון.

תשובה: הוכחנו ש- $\Delta\mathrm{AEF}\sim\Delta\mathrm{ACD}$, ויחס הדמיון הוא $1:4$.



ב. (1) $y_\mathrm{D}=y_\mathrm{C}=2$ ולכן משוואת הישר DC היא $y=2$.

הנקודה E היא אמצע האלכסון AC:

$$1=\frac{x_\mathrm{A}+4}{2} \qquad 4=\frac{y_\mathrm{A}+2}{2}$$
$$2=x_\mathrm{A}+4 \qquad 8=y_\mathrm{A}+2$$
$$-2=x_\mathrm{A} \qquad 6=y_\mathrm{A}$$

ולכן, שיעורי הקודקוד A הם $(-2,6)$.

$$m_\mathrm{AD}=\frac{y_\mathrm{A}-y_\mathrm{D}}{x_\mathrm{A}-x_\mathrm{D}}=\frac{6-2}{-2-(-4)}=\frac{4}{2}=2$$
$$y-6=2(x+2) \quad \leftarrow \mathrm{A}(-2,6), m_\mathrm{AD}=2$$
$$y-6=2x+4$$
$$\boxed{y=2x+10}$$

ומשוואת הישר AD היא $y=2x+10$.

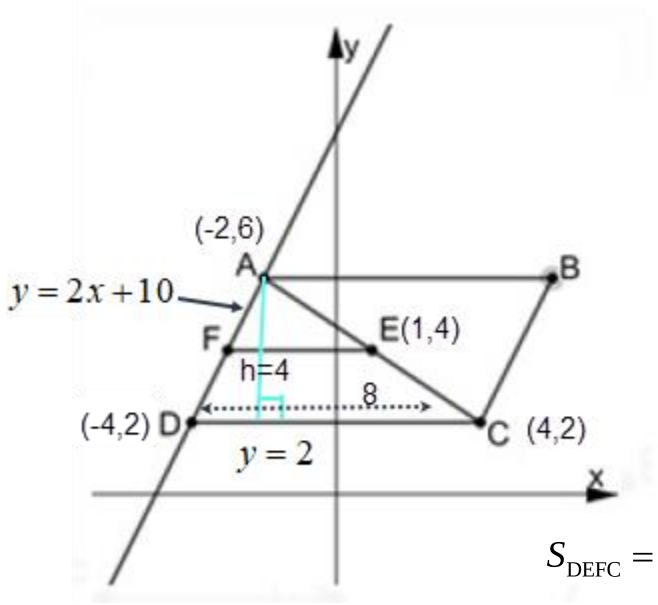
תשובה: משוואת הישר DC היא $y=2$, ומשוואת הישר AD היא $y=2x+10$.

(2) כיוון שהצלע DC מקבילה לציר ה- x אז $m_\mathrm{AD}=\tan\alpha$.

$$\tan\sphericalangle\mathrm{ADC}=2$$
$$\boxed{\sphericalangle\mathrm{ADC}=63.43^\circ}$$

תשובה: $\sphericalangle\mathrm{ADC}=63.43^\circ$.

ג. (1) $S_{\Delta ACD}=\frac{DC\cdot h_{DC}}{2}$ **(עדיף על פני** $S_{\Delta ADC}=\frac{AD\cdot DC\cdot \sin\sphericalangle ADC}{2}$**).**



$DC=x_C-x_D=4-(-4)=8$

$h_{DC}=y_A-2=6-2=4$

$S_{\Delta ACD}=\frac{8\cdot 4}{2}=16 \quad \rightarrow \boxed{S_{\Delta ACD}=16}$

$S_{\Delta AEF}=\frac{1}{4}\cdot S_{\Delta ACD}=\frac{1}{4}\cdot 16=4 \quad \rightarrow \boxed{S_{\Delta AEF}=4}$

תשובה: $S_{\Delta ACD}=16$ **,** $S_{\Delta AEF}=4$.

(2) $S_{DEFC}=\frac{3}{4}\cdot S_{\Delta ACD}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot S_{ABCD} \quad \rightarrow \boxed{S_{DEFC}=\frac{3}{8}\cdot S_{ABCD}}$

תשובה: שטח המקבילית ABCD **גדול פי** $\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$ **משטח הטרפז** DEFC .

א. $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$ **(נתון) , וגם** $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180^\circ$ **(סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל).**

לכן $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = 90^\circ$ **ו-** BD **הוא קוטר במעגל (נשען על זווית היקפית ישרה).**

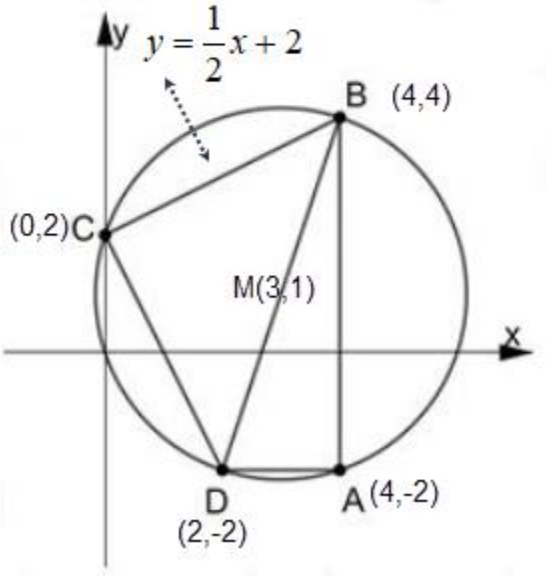
תשובה: הוכחנו ש- BD **הוא קוטר במעגל.**

ב. (1) $y_D = y_A = -2$ **, ולכן** AD **מקביל לציר ה-** x **.**

$AD \perp AB$ **, ולכן** AB **מקביל לציר ה-** y **.**

תשובה: הוכחנו ש- AB **מקביל לציר ה-** y **.**

(2) $BC \perp CD$ **, ולכן על פי תנאי ניצבות** $m_{BC} \cdot m_{CD} = -1$ **.**



$$m_{CD} = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{2-(-2)}{0-2} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$m_{CD} = -2 \quad \rightarrow m_{BC} = +\frac{1}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x + 2} \quad \leftarrow C(0,2), m_{BC} = \frac{1}{2}$$

תשובה: משוואת הישר BC **היא** $y = \frac{1}{2}x + 2$ **.**

(3) $x_B = x_A = 4$ **(** AB **מקביל לציר ה-** y **).**

$$y_B = \frac{1}{2} \cdot 4 + 2 = 4 \quad \rightarrow \boxed{B(4,4)}$$

תשובה: $B(4,4)$ **.**

(4) מרכז המעגל (M **) הוא אמצע הקוטר** BD **.**

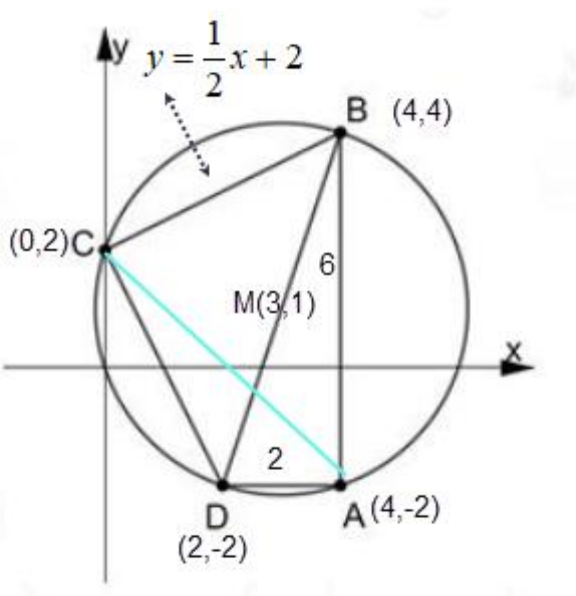
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{4+2}{2} = 3 \\ y &= \frac{4+(-2)}{2} = 1 \end{aligned}\right\} \boxed{M(3,1)}$$

$$R = BM = \sqrt{(4-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$$

לסיכום: מרכז המעגל $M(3,1)$ **, ורדיוס המעגל הוא** $\sqrt{10}$ **.**

תשובה: משוואת המעגל היא: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$ **.**

ג. $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ **(נשענות על קשת משותפת** AB **).**



$\underline{\Delta ADB}$

$$\tan\sphericalangle ADB = \frac{AB}{AD}$$

$$\tan\sphericalangle ADB = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_D}$$

$$\tan\sphericalangle ADB = \frac{4-(-2)}{4-2} = 3$$

$$\boxed{\sphericalangle ADB = 71.56°} \quad \rightarrow \boxed{\sphericalangle ACB = 71.56°}$$

פתרון אחר, על פי משפט הסינוסים ΔACB

$$\frac{AB}{\sin\sphericalangle ACB} = 2R$$

$$\frac{6}{2\sqrt{10}} = \sin\sphericalangle ACB$$

$$\boxed{\sphericalangle ACB = 71.56°} \quad \leftarrow \sphericalangle ACB < 90°$$

תשובה: גודל זווית ACB **הוא** $71.56°$**.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$.

(1) בתחום ההגדרה, ביטוי בתוך השורש במכנה הוא חיובי.

$$1-x^2>0$$

$$\boxed{-1<x<1}$$

כי הביטוי הוא של פרבולה הפוכה ("בוכה") שחיובית בתחום הזה.

תשובה: $-1<x<1$

(2) $x=1$ **או** $x=-1$ **מאפסים מכנה ולא מונה, ולכן הישרים** $x=1$ **או** $x=-1$ **אסימפטוטות אנכיות.**

אין אסימפטוטה אופקית, כי תחום ההגדרה הוא $-1<x<1$.

תשובה: $x=1$ **או** $x=-1$ **אסימפטוטות אנכיות.**

(3) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ונקבל את הנקודה** $(0,3)$.

אין נקודת החיתוך עם ציר ה- x **כי המונה חיובי לכל** x **(ולמעשה כל הפונקציה חיובית).**

תשובה: $(0,3)$.

(4) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{3}{\sqrt{1-(-x)^2}}=f(-x)$ **, ולכן הפונקציה היא זוגית (וסימטרית לציר ה-** y **).**

תשובה: הראינו שהפונקציה היא זוגית.

(5) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגן.

$$f'(x)=\frac{0-\frac{3(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

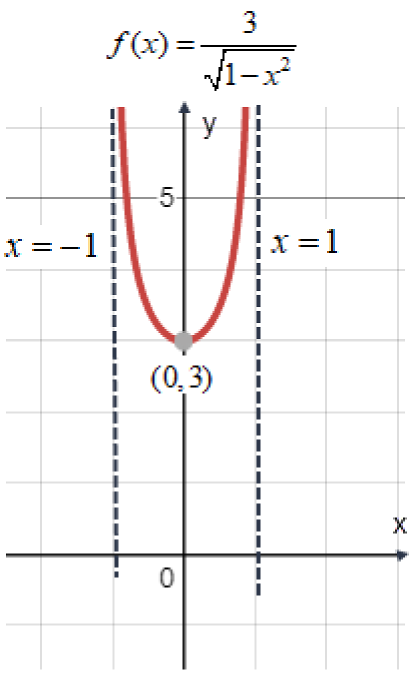
$$\boxed{f'(x)=\frac{3x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}}$$

$$0=3x \quad \rightarrow x=0 \quad \rightarrow (0,3)$$

$$f'(-0.5)<0\ ,\ f'(0.5)>0 \quad \rightarrow \boxed{(0,3),\min}$$

תשובה: $(0,3)$ **מינימום.**

ב. סרטוט גרף הפונקציה.



ג. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)-k$,

שהיא הזזה אנכית ב- $-k$ יחידות של $f(x)$.

הישר $y=3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת המינימום שלה $(0,3)$.

הישר $y=-4$ ישיק לגרף הפונקציה $g(x)$ אם נוריד את $f(x)$ ב- 7 יחידות כלפי מטה,

ואז ישיק ל- $g(x)$ בנקודת המינימום שלה $(0,-4)$.

תשובה: עבור $k=7$, הישר $y=-4$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a}{x^3}+2$ (a **פרמטר).**

$f'(2)=-\frac{3}{2}$ **, כי שיפוע המשיק בנקודה שבה** $x=2$ **הוא** $-\frac{3}{2}$.

$$f'(x)=\frac{0-a\cdot 3x^2}{x^6}$$

$$f'(2)=-\frac{3}{2} \leftarrow \quad -\frac{3}{2}=\frac{-a\cdot 3\cdot 2^2}{2^6}$$

$$-\frac{3}{2}=\frac{-12a}{64} \quad /\cdot 64$$

$$-96=-12a \quad /:(-12)$$

$$\boxed{a=8}$$

תשובה: $a=8$.

ב. $f(x)=\frac{8}{x^3}+2$

(1) בתחום ההגדרה, מכנה שונה מ- 0 **, לכן** $x\neq 0$.

$x=0$ **מאפס מכנה ולא מונה, ולכן הישר** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

חזקת המונה של המחובר השמאלי (0) **קטנה מחזקת המכנה** (2)**, ולכן מחובר זה שואף ל-** 0 **,**

כאשר $x\to\pm\infty$ **, ומכאן ש-** $f(x)\to 0+2=2$ **ו-** $y=2$ **אסימפטוטה אופקית.**

תשובה: תחום ההגדרה $x\neq 0$ **,** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית,** $y=2$ **אסימפטוטה אופקית.**

(2) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

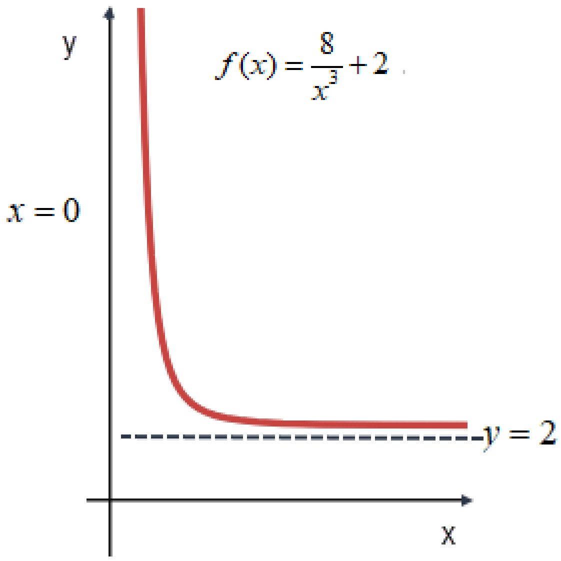
$$f'(x)=\frac{0-8\cdot 3x^2}{x^6}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-24}{x^4}}$$

הנגזרת שלילית לכל $x\neq 0$ **, ולכן הפונקציה יורדת משמאל ומימין לציר ה-** y **.**

תשובה: ירידה - $x>0$ **או** $x<0$ **, עלייה – אף** x **.**

(3) סרטוט גרף הפונקציה, בתחום $x>0$.



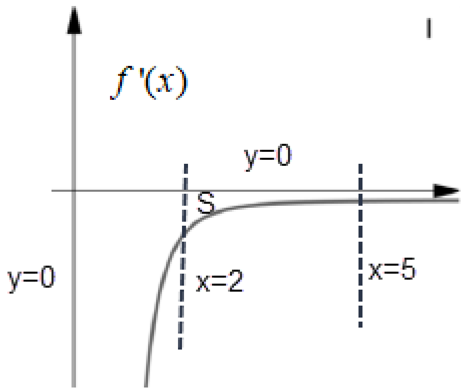
ג. $f'(x)=\frac{-24}{x^4}$

גרף I הוא הגרף של פונקציית הנגזרת, בתחום $x>0$, מהנימוקים הבאים:

- $f(x)$ יורדת בתחום זה, ו- $f'(x)$ שלילית.
- $x=0$ אסימפטוטה אנכית.
- $y=0$ אסימפטוטה אופקית.

תשובה: גרף I הוא הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, בתחום $x>0$.

ד. נחשב את השטח המוגבל.



$$S=\int_2^5 (0-f'(x))\,dx$$

$$S=-f(x)\Big]_2^5$$

$$x=5:\quad -f(5)=-(\frac{8}{5^3}+2)=-2.064$$

$$x=2:\quad -f(2)=-(\frac{8}{2^3}+2)=-3$$

$$\boxed{S=0.936}$$

תשובה: השטח המוגבל הוא 0.936 .

.

א. נתונות הפונקציות $f(x)=(x-3)^2$ **, ו-** $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

(1) תחום ההגדרה של $f(x)=(x-3)^2$ **הוא כל** x.

תחום ההגדרה של $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ **הוא** $x\neq 3$ **, כי** $x=3$ **מאפס את** $f(x)$.

תשובה: $f(x)$ **- כל** x **,** $g(x)$ **-** $x\neq 3$.

(2) $f(x)=(x-3)^2$ **היא פרבולה ישרה ("צוחקת") עם קודקוד** $(3,0)$.

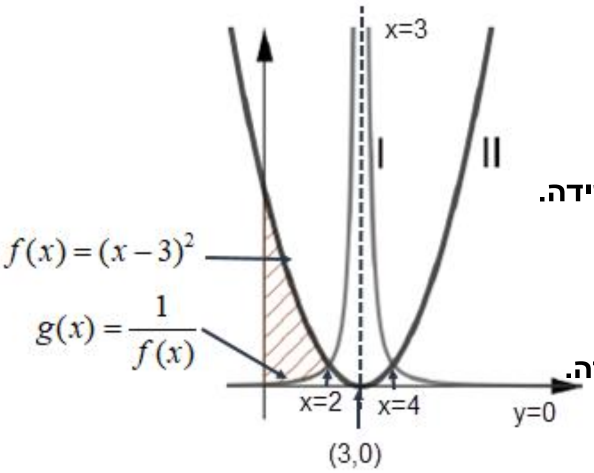
לכן עולה בתחום $x>3$ **ויורדת בתחום** $x<3$.

$g(x)=\frac{1}{f(x)}$ **. לכן, כאשר המכנה גדל, הפונקציה יורדת, וכאשר המכנה קטן הפונקציה עולה.**

מכאן ש- $g(x)$ **יורדת בתחום** $x>3$ **ועולה בתחום** $x<3$.

אפשר גם $g'(x)=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}$ **ומכאן להסיק שתחומי עלייה וירידה מתהפכים.**

תשובה: $f(x)$ **- עלייה** $x>3$ **ירידה** $x<3$ **,** $g(x)$ **- עלייה** $x<3$**, ירידה** $x>3$.



ב. (1) $f(x)=(x-3)^2$ **גרף** II ,

לפי קודקוד המינימום, הרציפות, ותחומי העלייה והירידה.

$g(x)=\frac{1}{f(x)}$ **גרף** I **, לפי תחום ההגדרה,**

אסימפטוטות $x=3$ **ו-** $y=0$ **, ותחומי העלייה והירידה.**

(2) ל- $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ **יש שתי אסימפטוטות המאונכות לצירים.**

הישר $x=3$ **, כי** $x=3$ **מאפס מכנה ולא מונה.**

הישר $y=0$ **, כי כאשר** $x\to\pm\infty$ **אז** $f(x)\to\infty$ **ולכן** $g(x)=\frac{1}{f(x)}\to 0$.

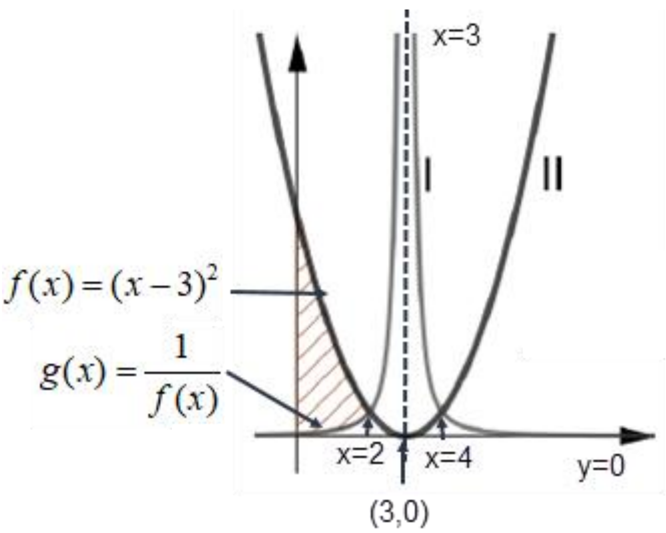
תשובה: ל- $g(x)$ **-** $x=3$ **,** $y=0$.

(3) נמצא את נקודות החיתוך בין הפונקציות:

$$g(x)=f(x)$$
$$\frac{1}{f(x)}=f(x)$$
$$1=f^2(x).$$
$$(x-3)^4=1$$
$$x-3=1 \quad \to x=4$$
$$x-3=-1 \quad \to \boxed{x=2}$$

תשובה: הראינו כי הגרפים של הפונקציות נפגשים בנקודה שבה $x=2$.

ג. נחשב את השטח המקווקו, כאשר הפעם נרשום את $g(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$.



$$S=\int_0^2\left[(x-3)^2-\frac{1}{(x-3)^2}\right]dx$$
$$\int_0^2\left[(x-3)^2-(x-3)^{-2}\right]dx$$
$$S=\frac{(x-3)^3}{3}-\frac{(x-3)^{-1}}{-1}\Big]_0^2$$
$$S=\frac{(x-3)^3}{3}+\frac{1}{x-3}\Big]_0^2$$
$$\left.\begin{aligned} x=2: &\quad -\frac{4}{3} \\ x=0: &\quad -\frac{28}{3} \end{aligned}\right\}\boxed{S=8}$$

תשובה: גודל השטח המקווקו הוא 8.