א. בטבלת השכיחויות מוצגת התפלגות השכר (₪) ליום עבודה של עובדי מפעל א'.

(1) מספר העובדים הכולל במפעל א' הוא סכום השכיחויות: $7+13+20=40$.

נוסיף שתי שורות בטבלה, כסיוע לחישוב החציון והממוצע.

x - **שכר ביום (₪)**	300	220	180	**סה"כ**
f - **מספר עובדים**	7	13	20	40
שכיחות מצטברת	7	20	40	
מכפלות $x_n \cdot f_n$	2100	2860	3600	

השכר השכיח ליום הוא 180 ₪**, שכן השכיחות שלו (** 20 **עובדים) היא הגבוהה ביותר.**

מספר העובדים הוא זוגי (40 **), כאשר:** $\frac{n+1}{2}=\frac{40+1}{2}=20.5$

לכן החציון יהיה ממוצע שכר העובדים, שבמקום ה- 20 **וה-**21 **,**

כאשר מסדרים את הציונים מקטן לגדול (או מגדול לקטן, כמו בטבלה שלנו).

במקרה זה, הנתון ה- 20 **הוא** 220 ₪ **והנתון ה-** 21 **הוא** 180 ₪.

נחשב את החציון: $\frac{220+180}{2}=200$.

תשובה: במפעל א' - השכר השכיח ליום הוא 180 ₪**, והשכר החציוני ליום הוא** 200 ₪.

(2) נחשב את השכר הממוצע ליום:

$$\bar{x}=\frac{2100+2860+3600}{40}=\frac{8560}{40}$$

$$\boxed{\bar{x}=214}$$

תשובה: השכר הממוצע ליום, במפעל א', הוא 214 ₪.

(3) הטווח הוא 120 ₪ $=300-180$ **(ההפרש בין הנתון הגבוה לנתון הנמוך).**

נחשב את סטיית התקן של השכר.

$$S=\sqrt{\frac{(300-214)^2\cdot 7+(220-214)^2\cdot 13+(180-214)^2\cdot 20}{40}}$$

$$S=\sqrt{\frac{75360}{40}}=\sqrt{1884}$$

$$\boxed{S=43.41}$$

תשובה: במפעל א' – הטווח הוא 120₪**, וסטיית התקן היא** 43.41 ₪.

ב. במפעל ב' – 40 עובדים, השכר הממוצע ליום הוא 214 ₪ (כמו במפעל א'),
השכר השכיח ליום הוא 200 ₪, השכר החציוני ליום הוא 218 ₪ וסטיית התקן היא 15.7₪.

(1) המדד המשמעותי ביותר לפיזור הנתונים, בנתוני השאלה, הוא סטיית התקן.
כיוון שסטיית התקן במפעל א' משמעותית גדולה מזו שבמפעל ב' (43.41 ₪ לעומת 15.7 ₪),
כאשר ממוצע השכר ליום הוא <u>זהה</u>, הרי שבמפעל א' פיזור הנתונים גבוה משמעותית יותר,
ולכן הבדלי השכר בין עובדי מפעל א' גבוהים יותר, מאלו שבין עובדי מפעל ב'.
(הערה – אם ממוצע השכר היה שונה, בין שני המפעלים,
אז הנתון של סטיית התקן כשלעצמו לא היה מספק.)

תשובה: במפעל א' יש הבדלי שכר גדולים יותר בין העובדים.

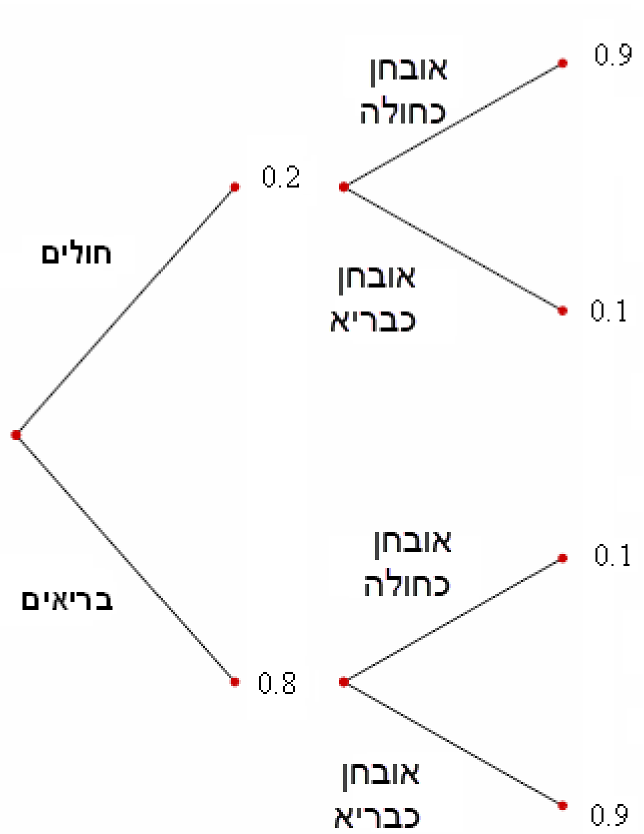
(2) השכר השכיח ליום הוא 200 ₪, ולכן זהו שכר המשולם לקבוצה גדולה ביותר של עובדים.
מכאן, שלא ייתכן שהשכר הנמוך ביותר ביום הוא 210 ₪.

<u>נימוק נוסף</u>: במפעל ב' – השכר הממוצע ליום הוא 214 ₪, כאשר סטיית התקן היא 15.7₪.
כיוון שסטיית התקן של השכר היא ממוצע משוכלל של הסטיות מממוצע השכר,
הרי שהיא בהכרח קטנה מההפרש בין הממוצע לנתון הגבוה ביותר, או לנתון הקטן ביותר.
כלומר, לא ייתכן שתהייה מתחת ל- 229.7 ₪, או מעל ל- 198.3 .

תשובה: במפעל ב' השכר הנמוך ביותר אינו 210 ₪, אלא בוודאות נמוך ממנו.

(3) במפעל ב' – השכר החציוני ליום הוא 218 ₪.
מכאן שמחצית מהעובדים מקבלים שכר נמוך משכר זה, ומחציתם שכר גבוה משכר זה.
בהתאם לכך, יותר ממחציתם יקבלו שכר הגבוה מ- 200 ₪ ביום.
תשובה: במפעל ב' רוב העובדים מקבלים שכר גדול או שווה ל- 200 ₪ ביום.

א. נבנה עץ אפשרויות מתאים.



נחשב את ההסתברות שתושב היישוב הוא חולה בנגיף הקורונה וגם אובחן כחולה.

$P=0.2\cdot 0.9=0.18$

תשובה: ההסתברות היא 0.18 .

ב. נחשב את ההסתברות לאבחון התושב כחולה.

$P=0.2\cdot 0.9+0.8\cdot 0.1=0.26$

נעבור לאחוזים: $0.26\cdot 100\%=26\%$.

תשובה: 26% **מהתושבים אובחנו כחולים בנגיף.**

ג. נחשב את ההסתברות לאבחנה שגויה.

אבחנה שגויה מתקיימת כאשר תוצאת הבדיקה לא תואמת את המצב הרפואי,

כלומר, כאשר תושב בריא אובחן כחולה, או כאשר תושב חולה אובחן כבריא.

$P=0.8\cdot 0.1+0.2\cdot 0.1=0.1$

נעבור לאחוזים: $0.1\cdot 100\%=10\%$.

תשובה: בית החולים ביצע אבחנה שגויה עבור 10% **מהתושבים.**

א. מדובר בסדרה חשבונית עולה, כי מחיר כל מכשיר גדול בסכום קבוע מזה שמשמאל לו בשורה.

מחירם, של הסמארטפון הימני ביותר והסמארטפון השמאלי ביותר יחד, הוא $6,400$ ₪.

נסמן ב- n את מספר המכשירים המוצגים בחלון הראווה, והמשוואה המתאימה היא: $a_1 + a_n = 6400$.

בנוסף, ידוע כי המחיר של המכשיר היקר ביותר גדול פי 3 מהמחיר של המכשיר הזול ביותר,

והמשוואה המתאימה היא: $a_n = 3a_1$.

נרשום את מערכת המשוואות המתאימה, ונפתור אותה:

$$\begin{cases} a_1 + a_n = 6400 \\ a_n = 3a_1 \end{cases}$$

$$a_1 + 3a_1 = 6400$$

$$4a_1 = 6400 \quad / :4$$

$$\boxed{a_1 = 1600} \quad \to \boxed{a_n = 4800}$$

מכאן שהמחיר של הסמארטפון הזול ביותר הוא $1,600$ ₪, ושל הסמארטפון היקר ביותר הוא $4,800$ ש"ח.

תשובה: המחיר של המכשיר הזול ביותר, הנמצא בחלון הראווה, הוא $1,600$ ₪ .

ב. נמצא את מספר המכשירים, כאשר נתון שסכום מחיריהם הכולל הוא $54,400$, כלומר: $S_n = 54400$.

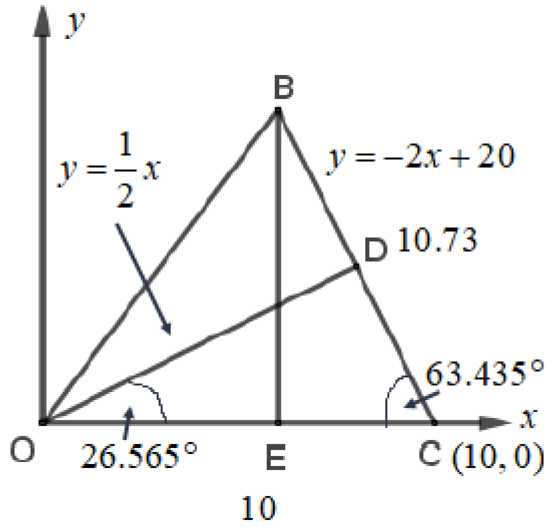
$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

$$54400 = \frac{n \cdot (6400)}{2}$$

$$54400 = 3200n \quad / :3200$$

$$\boxed{n = 17}$$

תשובה: 17 מכשירים מוצגים בחלון הראווה.



א. משוואת הישר BC **היא** $y=-2x+20$.

$y_C=0$ **כי הנקודה** C **נמצאת על ציר ה-** x.

$$0=-2x+20 \quad \rightarrow x=10 \quad \rightarrow \boxed{C(10,0)}$$

$$OC=x_C-x_O=10-0=10$$

תשובה: אורך הצלע OC **הוא** 10.

ב. (1) הגובה OD **מאונך לצלע** BC,

לכן ע"פ תנאי ניצבות: $m_{BC}\cdot m_{OD}=-1$.

משוואת הגובה OD **היא** $m_{BC}=-2 \quad \rightarrow m_{OD}=+\frac{1}{2} \quad \rightarrow y=\frac{1}{2}x$

תשובה: משוואת הישר OD **היא** $y=\frac{1}{2}x$.

(2) $m=\tan\alpha$ **, כאשר** α **היא הזווית שבין הישר לבין הכיוון החיובי שלציר ה-** x .

$$m_{OD}=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \boxed{\sphericalangle DOC=26.565°} \quad \rightarrow \boxed{\sphericalangle DCO=63.435°}$$

תשובה: הזווית החדות של ΔODC**, ישר הזווית, הן:** $\sphericalangle DCO=63.435°$, $\sphericalangle DOC=26.565°$.

ד. $\frac{S_{\Delta BEC}}{S_{\Delta ODC}}=0.8$.

(1) $\frac{BC}{OC}=\sqrt{0.8} \quad \rightarrow BC=10\sqrt{0.8}=4\sqrt{5}$ **(יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון)**

תשובה: אורך הצלע BC **הוא** $4\sqrt{5}$.

(2) $$S_{\Delta OBC}=\frac{BC\cdot OC\cdot \sin\sphericalangle DCO}{2}=\frac{4\sqrt{5}\cdot 10\cdot \sin 63.435°}{2}=40$$

תשובה: שטח המשולש OBC **הוא** 40.

א. $AB = BC$ **ולכן** $AB = BC$ **(על מיתרים שווים נשענות קשתות שוות).**

$\sphericalangle AMB = \sphericalangle CMB$ **(אם הקשתות שוות אז גם הזוויות המרכזיות שוות).**

תשובה: הוכחנו ש- MB **חוצה זווית** AMC.

ב. משוואת המעגל היא: $(x-3)^2+(y-1)^2=10$ **ובהתאם** $M(3,1)$ **, ורדיוס המעגל הוא** $\sqrt{10}$.

(1) $C(4,-2)$ **, כאשר המיתר** BC **מקביל לציר ה-** x **, ולכן משוואתו היא של פונקציה קבועה.**

תשובה: משוואת הישר BC **היא** $y=-2$.

(2) נסמן $B(b,-2)$ **ונציב את שיעורי הנקודה במשוואת המעגל.**

$$(b-3)^2+(-2-1)^2=10$$

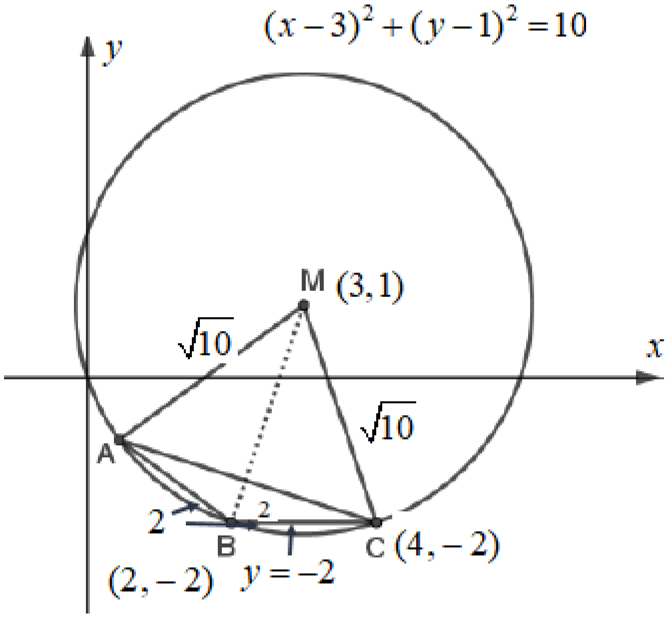
$$(b-3)^2=1$$

$$b-3=1 \quad \rightarrow \cancel{b=4} \quad \leftarrow x_C=4$$

$$b-3=-1 \quad \rightarrow b=2 \quad \rightarrow \boxed{B(2,-2)}$$

$$BC=x_C-x_B=4-2=2 \quad \rightarrow \boxed{BC=2}$$

תשובה: $B(2,-2)$ **, אורך המיתר** BC **הוא** 2.



ג (1) נחשב את $\sphericalangle BAC$ באמצעות משפט סינוסים ב- ΔABC , החסום במעגל שרדיוסו $\sqrt{10}$.

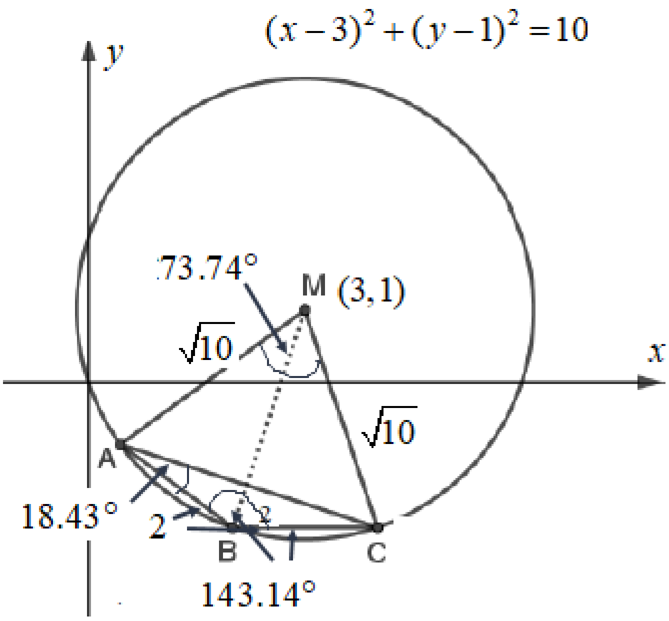
$$\frac{BC}{\sin\sphericalangle BAC}=2R$$

$$\frac{2}{2\sqrt{10}}=\sin\sphericalangle BAC$$

$$\boxed{\sphericalangle BAC=18.43^\circ}$$

תשובה: גודל זווית BAC **הוא** 18.43°.

(2) נחשב את היחס בין שטחי המשולשים AMC ו- ABC .



$$\sphericalangle CMC=2\cdot 18.43^\circ=36.87^\circ$$

$$\sphericalangle AMC=2\cdot 36.87^\circ=73.74^\circ$$

$$S_{\Delta AMC}=\frac{MA\cdot MC\cdot\sin\sphericalangle AMC}{2}$$

$$S_{\Delta AMC}==\frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\sin\sphericalangle 73.74^\circ}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta AMC}=4.8}$$

$$AB=BC\quad\rightarrow\sphericalangle ACB=\sphericalangle BAC=18.43^\circ$$

$$\sphericalangle ABC=180^\circ-2\cdot 18.43^\circ=143.14^\circ$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot BC\cdot\sin\sphericalangle AMC}{2}$$

$$S_{\Delta ABC}==\frac{2\cdot 2\cdot\sin 143.14^\circ}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=1.2}$$

$$\frac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{4.8}{1.2}=4$$

תשובה: שטח משולש AMC **גדול פי** 4 **משטח משולש** ABC .

הערה: ניתן לחשב גם את שיעורי (T) **נקודת המפגש של המיתר** AC **עם הרדיוס** MB ,

ואז יחס השטחים יהייה יחס הגבהים $MT:BT$, **לצלע המשותפת** AC .

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x+2}$.

בתחום ההגדרה, ביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי.

$$x+2\ge 0$$

$$\boxed{x\ge -2}$$

תשובה: $x\ge -2$

ב. בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ונקבל את הנקודה** $(0,0)$.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **ונקבל את הנקודות** $(0,0)$ **,** $(-2,0)$.

תשובה: $(0,0)$ **,** $(-2,0)$.

ג. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן. $(-2,0)$ **בהכרח נקודת קיצון קצה.**

$$f'(x)=\sqrt{x+2}+\frac{x}{2\sqrt{x+2}}$$

$$f'(x)=\frac{2(x+2)+x}{2\sqrt{x+2}}$$

$$f'(x)=\frac{2x+4+x}{2\sqrt{x+2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}}$$

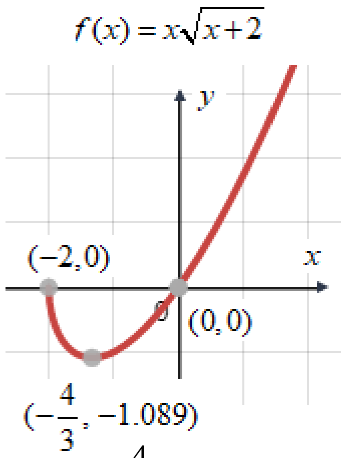
$$0=3x+4\quad\rightarrow x=-\frac{4}{3}\quad\rightarrow(-\frac{4}{3},-1.089)$$

$$f'(-1.5)<0\,,\ f'(-1)>0\quad\rightarrow\boxed{(-\frac{4}{3},-1.089),\min}$$

כיוון שהפונקציה יורדת מנקודת הקצה $(-2,0)$ **לנקודת המינימום, הרי שנקודת הקצה היא נקודת מקסימום.**

תשובה: $(-\frac{4}{3},-1.089)$ **מינימום ,** $(-2,0)$ **מקסימום.**

ד. הסקיצה משמאל.



ה. נתונה הפונקציה $g(x)=x\sqrt{x+2}+k$,

שהיא הזזה אנכית ב- $+k$ **יחידות של** $f(x)=x\sqrt{x+2}$.

(1) הערך המינימלי של $f(x)$ **הוא** -1.089,

כך שנדרש $k>1.089$.

תשובה: לדוגמה $k=2$.

(2) התזוזה האנכית של $f(x)$ **היא** 2 **יחידות כלפי מעלה.**

$0+2=2$ **ולכן** $(-2,2)$ **מקסימום.** $-1.089+2=0.911$ **ולכן** $(-\frac{4}{3},0.911)$ **מינימום.**

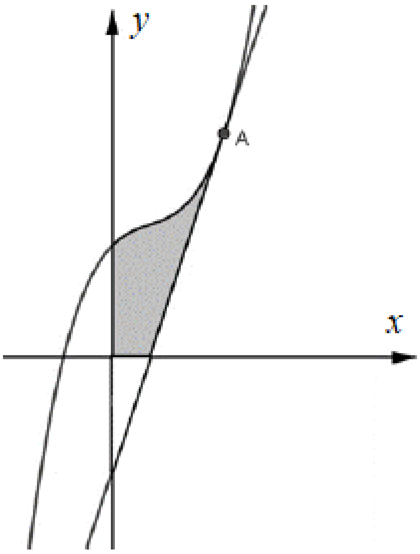
תשובה: $(-2,2)$ **מקסימום,** $(-\frac{4}{3},0.911)$ **מינימום.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=2x^3-2x^2+x+b$ (b פרמטר).

$f'(x)=6x^2-4x+1$

למשוואה $0=6x^2-4x+1$ אין פתרון, ולכן לפונקציה אין נקודת קיצון.

תשובה: הראינו כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות קיצון.



ב. בנקודה A שיפוע המשיק הוא 3 ושיעור ה- y שווה ל- 2.

(1) בנקודה A $f'(x)=3$.

$3=6x^2-4x+1$

$0=6x^2-4x-2$

$x=1\,,\ \cancel{x=-\frac{1}{3}}$

תשובה: $x_{\mathrm{A}}=1$, כי A ברביע הראשון.

(2) נמצא את משוואת המשיק, שעובר בנקודה $\mathrm{A}(1,2)$, ששיפועו 3.

$y-2=3(x-1)$

$y-2=3x-3$

$\boxed{y=3x-1}$

תשובה: משוואת המשיק היא $y=3x-1$.

(3) נציב את שיעורי הנקודה $\mathrm{A}(1,2)$.

$2=2\cdot1^3-2\cdot1^2+1+b$

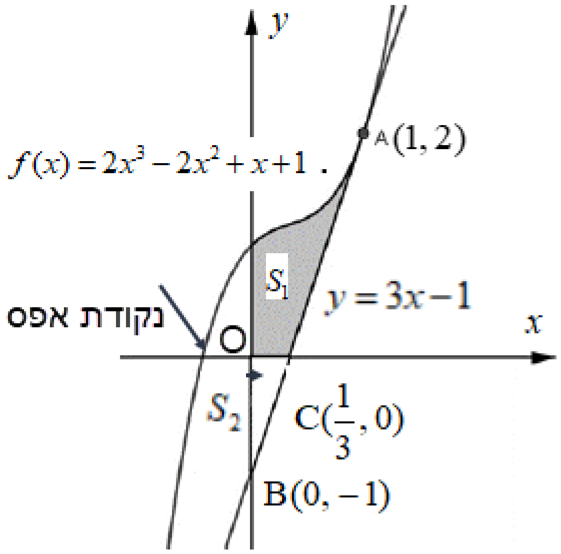
$2=1+b$

$\boxed{b=1}$

תשובה: $b=1$.

ג. $f(x)=2x^3-2x^2+x+1$ **. נחשב את השטח המבוקש, בעזרת חיסור שטחים.**

נחשב תחילה את שני השטחים המסומנים, ביחד.



$$S_1+S_2=\int_0^1\left[2x^3-2x^2+x+1-(3x-1)\right]dx$$

$$S_1+S_2=\int_0^1(2x^3-2x^2+x+1-3x+1)\,dx$$

$$S_1+S_2=\int_0^1(2x^3-2x^2-2x+2)\,dx$$

$$S_1+S_2=\frac{2x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+2x\Big]_0^1$$

$x=1:\quad \frac{5}{6}$

$x=0:\quad 0$

$$\boxed{S_1+S_2=\frac{5}{6}}$$

נחשב את S_2.

C **על ציר ה-** x **ועל המשיק** $y=3x-1$ **, ולכן** $C(\frac{1}{3},0)$.

B **על ציר ה-** y **ועל המשיק** $y=3x-1$ **, ולכן** $B(0,-1)$.

$$S_2=S_{\Delta BOC}=\frac{OC\cdot OB}{2}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{2}=\frac{1}{6}$$

וגודל השטח האפור הוא : $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

תשובה: השטח המוגבל הוא $\frac{2}{3}$.

ד. $g(x)=\frac{1}{f(x)}\quad \rightarrow g(x)=\frac{1}{2x^3-2x^2+x+1}$

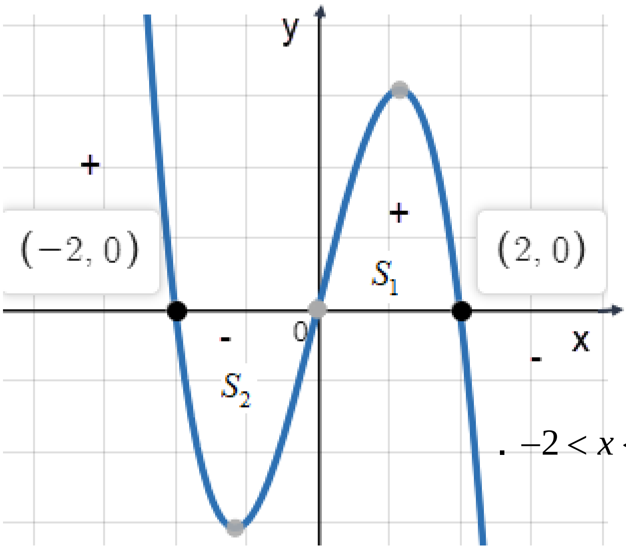
(1) חזקת המכנה (3) גדולה מחזקת המונה (0) ולכן $y=0$ **אסימפטוטה אופקית.**

תשובה: $y=0$ **אסימפטוטה המקבילה לציר ה-** x **של הפונקציה** $g(x)$.

(2) כיוון שלפונקציה $f(x)$ **יש נקודת אפס אחת (מסומנת בציור בחץ),**

הרי שקיים x **שמאפס את המכנה של** $g(x)$ **ולא את המונה, ומכאן שיש אסימפטוטה אנכית אחת.**

תשובה: קיימת אסימפטוטה המאונכת לציר ה- x **של הפונקציה** $g(x)$.



א. הגרף המצורף מתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$, של $f(x)$.

בהתאם לסימני הנגזרת, ניתן לבנות טבלת עליה-ירידה.

x		-2		0		2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
מסקנה	↗	**Max**	↘	**Min**	↗	Max	↘

תשובה: $x=2$ **מינימום,** $x=0$ **מינימום,** $x=-2$ **מקסימום.**

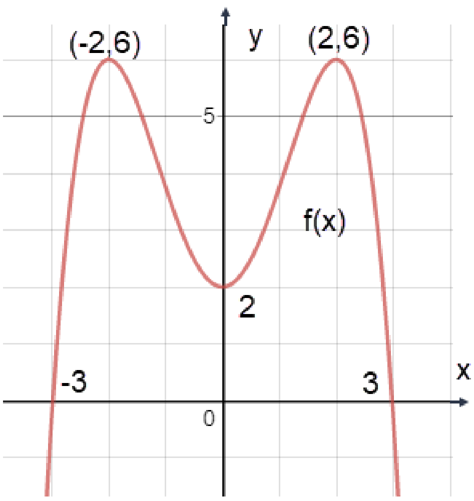
ב. תשובה: עלייה $0<x<2$ **או** $x<-2$ **, ירידה** $x>2$ **או** $-2<x<0$.

ג. ידוע כי הפונקציה $f(x)$ **זוגית, כלומר** $f(-x)=f(x)$.

(1) נתון $f(2)=6$ **ולכן גם** $f(-2)=6$.

תשובה: $f(-2)=6$.

(2) בהתאם לשיעורי נקודות הקיצון וסוגן, נסרטט את גרף הפונקציה.



תשובה: הסרטוט מעל.

ד. $f(x)$ **פונקציה זוגית (סימטרית לציר** y **, ולכן** $f'(x)$ **פונקציה אי זוגית (סימטרית לראשית).**

מכאן ש- $S_1=S_2$

$$S_1=\int_0^2 (f'(x)-0)\,dx = f(x)\Big]_0^2$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=2: & f(2)=6 \\ x=0: & f(0)=2 \end{array}\right\} \boxed{S_1=4}$$

ולכן גודל כל השטח הוא: $2\cdot 4=8$.

תשובה: גודל השטח הוא 8.