

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תש"פ, 2020, מועד ב', שאלון: 35582

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. הישר $4x - 3y = 0$ משיק למעגל שמרכזו $(5a, 0)$. a הוא פרמטר חיובי.
א. הבע את משוואת המעגל באמצעות a .

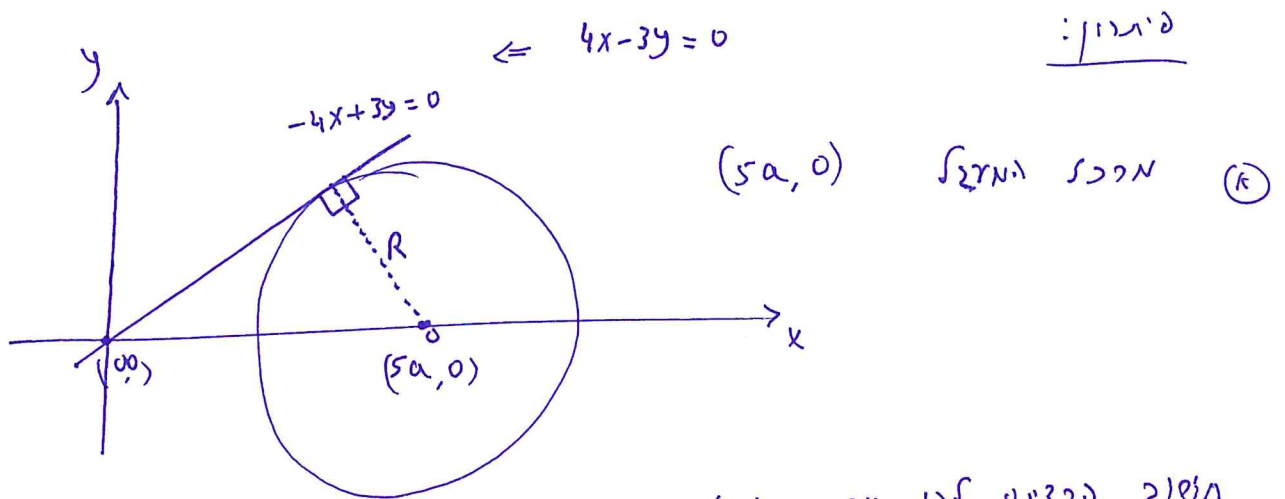
מנקודה G , הנמצאת מחוץ למעגל, העבירו ישר, המשיק למעגל בנקודה K .

ב. הבע באמצעות a את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות G שבעבורן המרחק GK שווה למרחק שלהן מן הישר $x = -3a$ וצייר סקיצה שלו.

נתון: אורך הקטע GK הקצר ביותר האפשרי הוא 7.5.

ג. (1) מה הם שיעורי הנקודה G שבעבורה אורך הקטע GK הוא 7.5? נמק.

(2) מצא את ערכו של הפרמטר a . נמק.



השלב הראשון לפי ארוך נק' $(5a, 0)$ מהישר $-4x + 3y = 0$

קצוץ המעגל $R = -\frac{-4(5a) + 0}{\sqrt{16+9}} \Rightarrow \frac{20a}{5} \Rightarrow 4a$

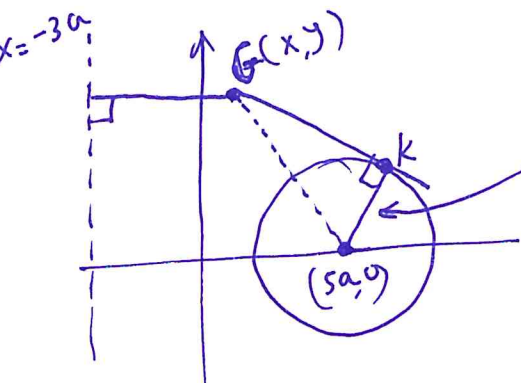
$$(x-5a)^2 + y^2 = 16a^2$$

משוואת המעגל:



המשך בגריון שאינה 1:

נסמן $G(x, y)$ מרחק G מהישר $x = -3a$ $x+3a$



אורך המשיק GK שני פה גורם:

$$GO = \sqrt{(x-5a)^2 + (y-0)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-5a)^2 + y^2} \right)^2 = Gk^2 + (4a)^2 \quad \text{פה גורם:}$$

$$x^2 - 10ax + 25a^2 + y^2 = Gk^2 + 16a^2$$

$$x^2 - 10ax + 9a^2 + y^2 = Gk$$

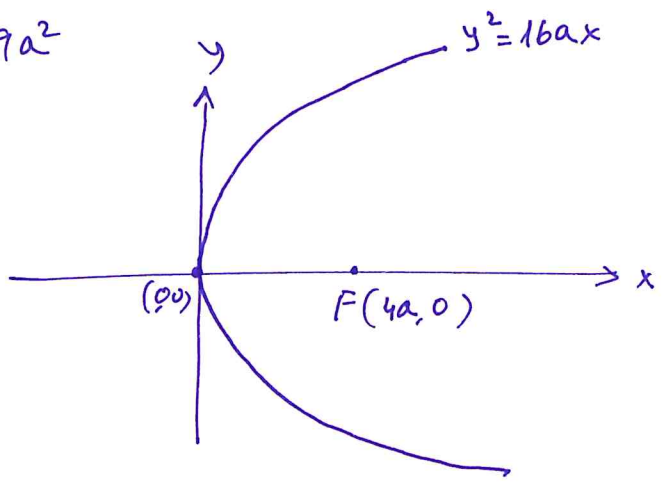
$$Gk = \sqrt{x^2 - 10ax + 9a^2 + y^2}$$

$$\sqrt{x^2 - 10ax + 9a^2 + y^2} = x + 3a \quad \uparrow \text{מכתיבים שווים וריבון:}$$

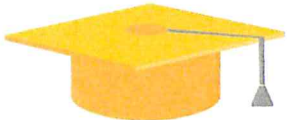
$$x^2 - 10ax + 9a^2 + y^2 = x^2 + 6ax + 9a^2$$

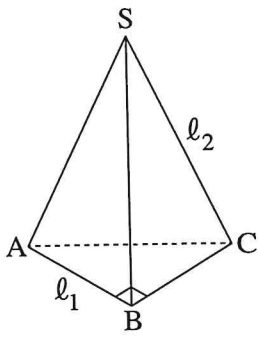
$$y^2 = 16ax$$

פריבולת קנונית



הנתון פירוקו של 1 :
 $GK = x + 3a$
 ומכיוון ש $x \geq 0$ ה"י ש GK יקצי גיוג
 ומקבל $\sqrt{\text{כאשר } x=0}$
 G ש המקום הסימטרי שמצאנו $y^2 = 16ax$
 $x=0$ ולכן $y=0$ $G(0,0)$
 כמו כן GK יקצי גיוג $3a =$
 $3a = 7.5$ נתון
 \Downarrow
 $a = 2.5$





2. נתונים שני ישרים: $l_1: \underline{x} = (6, 10, -7) + k(3, 5, -4)$

$l_2: \underline{x} = (15, 0, 6) + t(9, 0, 13)$

ונתון הווקטור $\underline{u} = (6, 0, -8)$.

הנקודה A נמצאת על הישר l_1 והנקודה C נמצאת על הישר l_2 כך ש- $\overrightarrow{AC} = \underline{u}$.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-C.

SABC היא פירמידה ישרה שבסיסה, ABC, הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle ABC = 90^\circ$).

הנקודה S נמצאת על הישר l_2 והנקודה B נמצאת על הישר l_1 .

ב. מצא את שיעורי הנקודה B.

ג. מצא את משוואת המישור ABC.

ד. חשב את הזווית שבין האנך ובין הישר l_2 .

ה. חשב את הזווית שבין האנך ובין הישר l_1 .

א. נגזיר את C ! A נצורה ב-10

$C(15+9t, 0, 6+13t)$

$A(6+3k, 10+5k, -7-4k)$

$\overrightarrow{AC} = (15+9t - (6+3k), -(10+5k), 6+13t - (-7-4k))$

$\overrightarrow{AC} = (9+9t-3k, -10-5k, 13+13t+4k)$

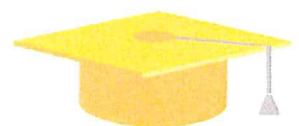
I $9+9t-3k=6$

נניח כי: $\overrightarrow{AC} = \underline{u} = (6, 0, -8)$ ולכן:

II $-10-5k=0 \rightarrow k=-2$

III $13+13t+4k=-8$

III \rightarrow I: $9+9t+6=6$
 $t=-1$



נציב את $k \neq 0$! אכן הנקודה הנקראת:

$$\underline{C(6, 0, -7)} \quad \underline{A(0, 0, 1)}$$

הנקודה הנקראת B בצורה כללית:

$$B(6+3k, 10+5k, -7-4k)$$

אנחנו ש $\angle ABC = 90^\circ$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CB} = 0$$

$$(6+3k, 10+5k, -7-4k-1) \cdot (6+3k-6, 10+5k, -7-4k+7) = 0$$

$$3k(6+3k) + (10+5k)^2 - 4k(-8-4k) = 0$$

$$18k + 9k^2 + 100 + 100k + 25k^2 + 32k + 16k^2 = 0$$

$$50k^2 + 150k + 100 = 0$$

$$k = -1$$

$$k = -2$$

(שם כי זה)

נתון את נק' A

נציב $k = -1$ בנקודה הנקראת:

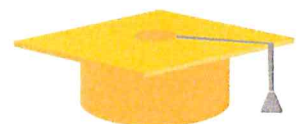
$$\underline{B(3, 5, -3)}$$

$$\underline{C} = (6, 0, -8)$$

$$\vec{AB} = (3, 5, -4)$$

ABC

נקודה שני כיוליים קבועים



נמצא את הווקטור הנורמלי ל-ABC:

$$(6, 0, -8) \cdot (a, b, c) = 0$$

$$(3, 5, -4) \cdot (a, b, c) = 0$$

$$I: 6a - 8c = 0 \rightarrow a = \frac{4}{3}c$$

$$II: 3a + 5b - 4c = 0$$

$$I \rightarrow II: 4c + 5b - 4c = 0$$

$$b = 0$$

$$\left(\frac{4}{3}c, 0, c\right)$$

כיוון הוקטור: $(4, 0, 3)$

$$4x + 3z + d = 0$$

$$4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + d = 0$$

$$d = -3$$

נקודה A נמצאת ב- d :

$$\boxed{4x + 3z - 3 = 0}$$

3. הזווית הנורמלית ל-ABC היא כיוון הוקטור הנורמלי ל-ABC ולכן:

$$\cos \theta = \frac{|(4, 0, 3) \cdot (9, 0, 13)|}{|(4, 0, 3)| \cdot |(9, 0, 13)|} \rightarrow \frac{|36 + 39|}{\sqrt{16 + 9} \cdot \sqrt{81 + 169}}$$

$$\cos \theta = \frac{75}{5 \cdot \sqrt{250}} \quad \theta = 18.435^\circ$$



מתמטיקה, קיץ תש"ף, מועד ב, מס' 035582 + נספח

- 3 -

3. z הוא מספר מרוכב.

א. פתור את המשוואה $z^5 = 2^5$.

הנקודות A_1, A_2, \dots, A_n במישור גאוס מתאימות לפתרונות המשוואה $z^n = 2^n$ ($n \geq 3$ הוא מספר טבעי).
חיברו את הנקודות A_1, A_2, \dots, A_n ויצרו מצולע משוכלל קמור.
נתון כי שטח המצולע שהתקבל שווה ל- n .

ב. מצא את n .

ענה על הסעיפים ג-ד בעבור הערך של n שמצאת בסעיף ב.

ג. באילו רביעים נמצאים פתרונות w כאלה?
הוא פתרון של המשוואה $z^n = 2^n$ כך ש- $a \cdot b > 0$ [כלומר: $\text{Re}(w) \cdot \text{Im}(w) > 0$].

ד. מצא את הזווית θ . נמק.
ארבע הנקודות הנמצאות ברביעים שמצאת בסעיף ג הן קודקודיו של מלבן.
אם מכפילים כל אחד מן המספרים המתאימים לארבע הנקודות הללו במספר $z_0 = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$), מתקבל מלבן חדש, שצלעותיו מקבילות לצירים.

פתרון:
/c

$$z^5 = 2^5$$

$$\Downarrow$$

$$z^5 = 32$$

$$z^5 = 32 \text{cis } 50^\circ$$

$$\Downarrow$$

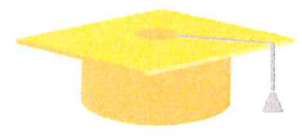
$$z_k = \sqrt[5]{32} \text{cis } \frac{360^\circ k}{5}; k=0,1,2,3,4$$

(ז ט):

$z = 2 \text{cis } 216^\circ$	$z = 2$
$z = 2 \text{cis } 288^\circ$	$z = 2 \text{cis } 72^\circ$
	$z = 2 \text{cis } 144^\circ$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



$z^n = 2^n$ ה.

הפרונט A_1, A_2, \dots, A_n
 הם הצדדים של מולך שווה שלישו
 בראשית התיק.
 הנולך מהפך א-ח שאשין חופים,
 אשלי שוקיים, שאוכן השוד אלה 2, וכולי-
 הוואש אלה בת $\frac{360}{n}$ גלגל.
 מכאן, ששה הנולך הווא:

$$S = \frac{n \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{360}{n}\right)}{2}$$

נשואי א- השטה א-ח:

$$n = n \cdot 2 \sin\left(\frac{360}{n}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\sin\left(\frac{360}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{360}{n} = 150 + 360k \quad \vee \quad \frac{360}{n} = 30 + 360k$$

\Downarrow
 חא אשק, אכיל הווא
 מתאים

$$\Downarrow$$

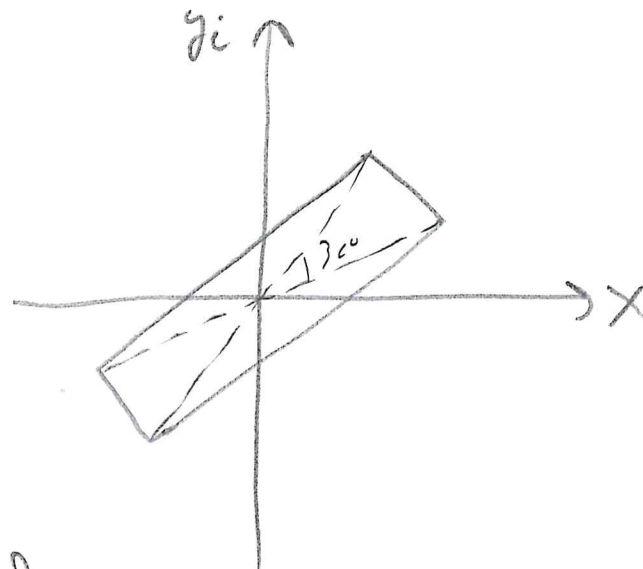
$n = 12$



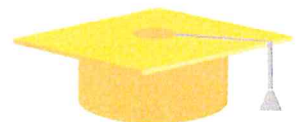
d. כפי שמתקיים במישור שני ההכיוון
 בהכיוון קהילת הירוקים או ששניהם לא ייתנו

ואכן רביע I או רביע III

3. הנדסות של קואני הן $\cos 30^\circ$,
 $\cos 60^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\cos 45^\circ$



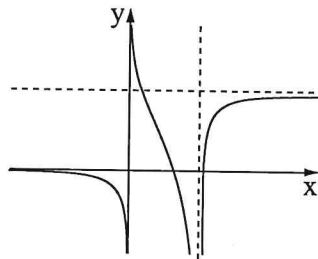
אזכרון הנצטרך נחתך בהמשך הליכה, והכל
 ביניהם הם \cos . כפי שהצגנו החשבון יסתדר
 בן שני הצדדים ידועו הצדדים, ציור יחיד
 הצדדים שבין האזכרונות, זמן הגרמניה לרינה
 אהיה סיבוב של 45° , וזה כן, $\theta = 45^\circ$, ואיך
 סכמך ב - θ - \cos סדוק אסימטרית באלה θ .



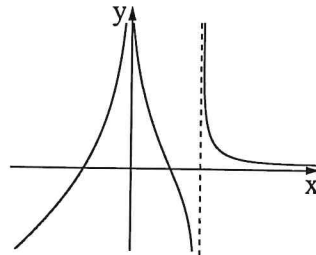
4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - ae^x + 3}$. a הוא פרמטר.

הפונקציה $f(x)$ אינה מוגדרת בעבור $x = 0$.

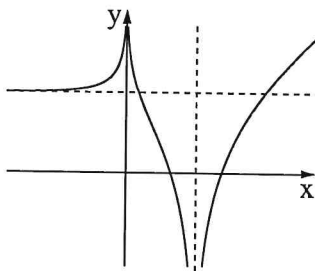
- א. (1) מצא את a ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
 (3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ג. אחד מן הגרפים IV-I שבסוף השאלה מתאר פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$, המוגדרת בתחום ההגדרה של $f(x)$. איזה מהם מתאר אותה? נמק.
- ד. נתונה הפונקציה $h(x) = f(x + k)$. עבור איזה ערך של $k \neq 0$ יש לפונקציה $h(x)$ אסימפטוטה שמשוואתה היא $x = 0$? נמק.



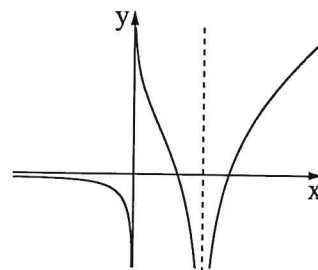
II



I



IV



III

פתרון:
 א. (1) $f(x)$ אינה מוגדרת עבור $x=0$, כלומר
 המכנה שווה לאפס עבור $x=0$:

$$e^{2 \cdot 0} - a \cdot e^0 + 3 = 0 \rightarrow \boxed{a=4}$$



$$f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 4e^x + 3}$$

הפונקציה היא

$$e^{2x} - 4e^x + 3 \neq 0$$

תחום הלציה:

$$(e^x - 3)(e^x - 1) \neq 0$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \quad \searrow \\ e^x \neq 3 \quad e^x \neq 1 \\ x \neq \ln 3 \quad x \neq 0 \end{array}$$

$$\boxed{x \neq \ln 3, \quad x \neq 0}$$

לסיכום

(2) אסימטות אנכיות: $x = \ln 3, \quad x = 0$

אסימטות אופקיות:

$$x \rightarrow \infty \quad y = 2$$

$$x \rightarrow -\infty \quad y = 0$$

$$\boxed{y = 2, \quad y = 0, \quad x = \ln 3, \quad x = 0}$$

לסיכום

(3) נגזרת:

$$f'(x) = \frac{4e^{2x}(e^{2x} - 4e^x + 3) - 2e^{2x}(2e^{2x} - 4e^x)}{(e^{2x} - 4e^x + 3)^2}$$



$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(2e^{2x} - 8e^x + 6 - 2e^2 + 4e^x)}{(e^{2x} - 4e^x + 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(6 - 4e^x)}{(e^{2x} - 4e^x + 3)^2}$$

(שאלה לא פה):

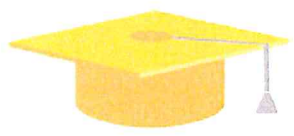
$$2e^{2x}(6 - 4e^x) = 0$$

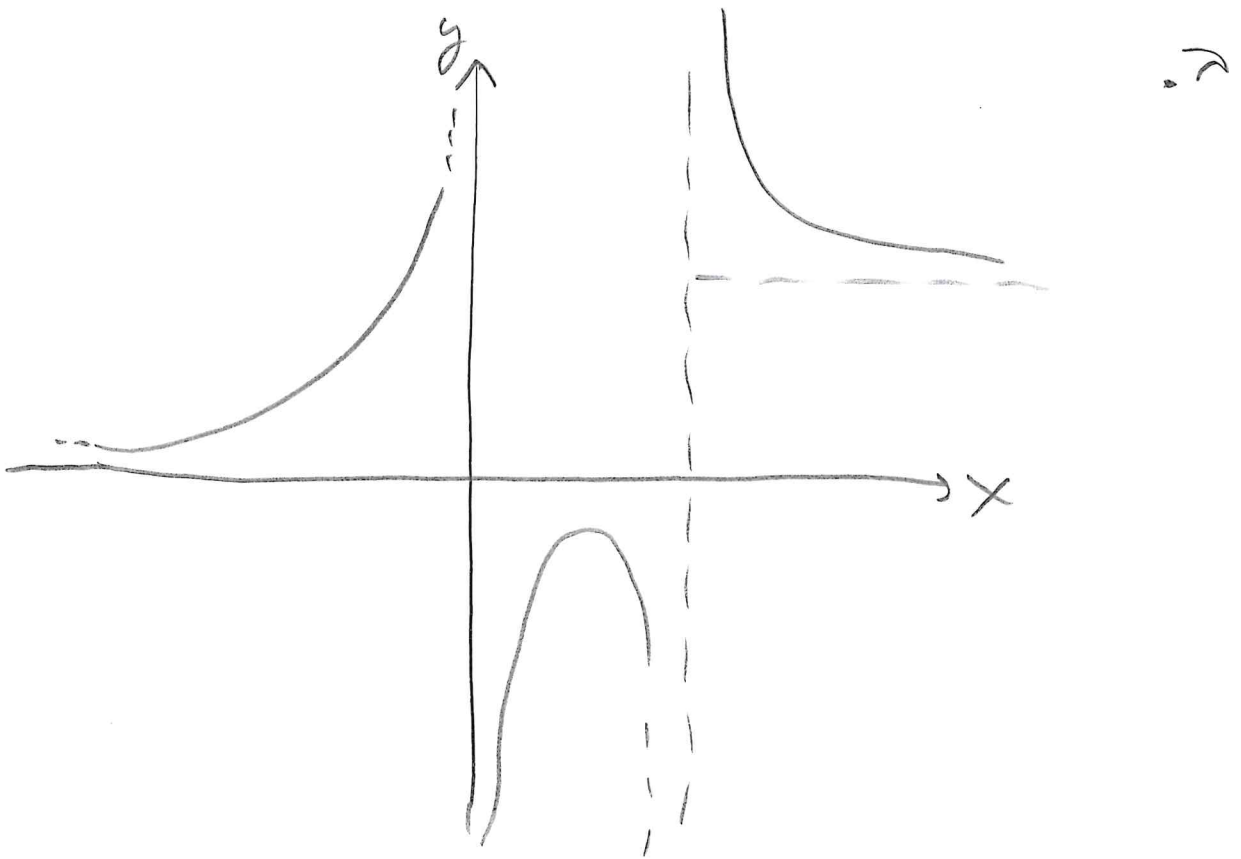
\checkmark $\rightarrow e^x = 1.5$
 ϕ $x = \ln 1.5$

(פ.י. > < > < > < > < >):

x	$\ln 0.9$	0	$\ln 1.2$	$\ln 1.5$	$\ln 2$	$\ln 3$	$\ln 4$
$f'(x)$	+	/	+	0	-	/	-
$f(x)$	\rightarrow	/	\rightarrow		\downarrow	/	\downarrow

מחזורי עלייה: $0 < x < \ln 1.5$, $x < 0$
 מחזורי ירידה: $\ln 1.5 < x < \ln 3$, $\ln 3 < x$





• שיצר צ של נקודה הקיבון שלי, והיא נקודת
המשימה, אכן זו נקודת המשימה.

ד. את Π הוא הנקודת המשימה, משוק

שהפונקציה הדפונה עולה גדור $x < 0$

כי אצל חידות, והיא עולה גדור

$x > 0$ הוא משולש סיכה, וזה הנקודת

היא חיצונית שלמה נא.



$$h(x) = f(x+k) \quad 3.$$

$h(x)$ היא הפנה אפדיון של $f(x)$

ל- $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית $x = h_3$

וכפי שהיא גזוץ אהיה $x = 0$

חייב להיות $k = |h_3|$



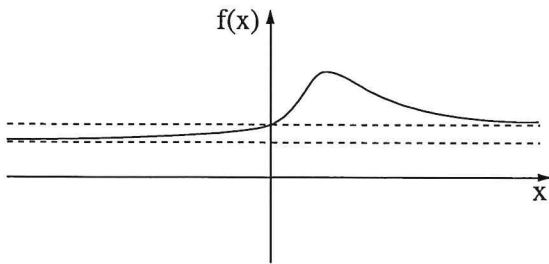
מתמטיקה, קיץ תש"ף, מועד ב, מס' 035582 + נספח

- 5 -

5. הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x) = \ln(f(x))$ מוגדרות וגזירות לכל x .

א. הראה כי לפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $\ln(f(x))$ יש נקודות קיצון באותם שיעורי x ושיעורי הקיצון הללו הן מאותו הסוג (מינימום/מקסימום).

בציור שלפניך מתואר גרף של פונקציה $f(x)$, כך ש- $f(x)$ ו- $g(x) = \ln(f(x))$ מוגדרות וגזירות לכל x . לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון יחידה ששיעוריה הם $(1, 2)$, ושתי אסימפטוטות:



אסימפטוטה שמשוואתה היא $y = 1$,

ואסימפטוטה נוספת שמשוואתה היא $y = \frac{2}{3}$.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y כאשר $y = 1$.

ענה על סעיף ב בהסתמך על הגרף המתואר בציור.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$? נמק.

(2) מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$?

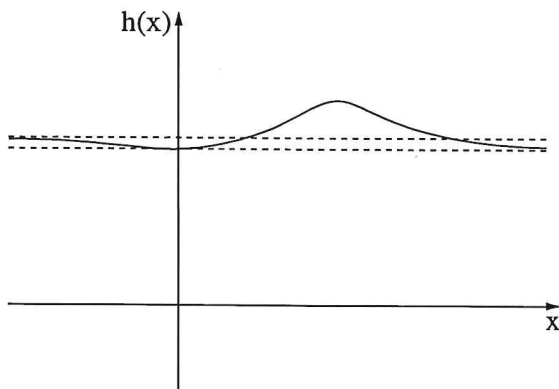
(3) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים?

(4) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$. נמק.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נגדיר: $h(x) = f(x) - g(x)$.

לפניך סרטוט של גרף הפונקציה $h(x)$.



ג. (1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$.

קבע את סוגן בעזרת הגרף.

(2) הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$

כך שהקטע AB מאונך לציר ה- x .

מהו שיעור ה- x שבעבורו אורך הקטע AB הוא 1?

נמה.



(5) (10) הביטויים מוגדרים ונצייגם לכל x .
 בראשית שנת לימודיך בתיכון של $f(x)$.
 הנגזרת היא $f'(x)$.
 בשליל, נמצא נקודות: $f'(x) = 0$
 ערכי x המתקבלים
 מסומנים כנקודות.
 נתון: פונקציה $g(x)$:

$$g(x) = h(f(x))$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

נמצא נקודות קיצון
 (ה) (ה) נקודות:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 0$$

נמצא נקודות קיצון.

$$f'(x) = 0$$

קיבלנו משוואה פשוטה למציאת נקודות קיצון של $f(x)$.
 למתקדם: נשאל: כיצד למצוא נקודות קיצון של $f(x)$?
 עין יש $f-2$ הנוקליאר קיצון האמת
 שינויי x .



כס'י מרוב קבוצת הקיבוץ הן מיליון ש"ח.

הנגזרת של $g(x)$ היא $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

כאן $g(x) = \ln(f(x))$

מנגזרת של x , כלומר $f(x)$ מיליון ש"ח.

נקודת המפנה $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

המפנה $f(x)$ מאז מיליון ש"ח, ולכן המיליון ש"ח

$g'(x)$ זוג מאז המיליון ש"ח, כלומר

מיליון ש"ח $f(x) - 1$ מאז ש"ח

מיליון ש"ח מאז ירידה ונגזרת של מיליון ש"ח

סדרן יש קיבוץ ולכן המיליון ש"ח -

הקיבוץ הוא מיליון ש"ח.



Ⓢ (1) תחום הגזירה של $f(x)$ הוא $\frac{1}{x}$ על כיוון הגרף.

נוגד, אולי גם כן: $g(x) = \ln(f(x))$

תחום הגזירה הוא $f(x) > 0$

ואם כיוון הגזירה של $f(x)$ בקו $\frac{1}{x}$

Ⓢ (2) נחשב: $g(x) = \ln f(x)$

מגזירי כיוון $f(x)$ שפירושה $f(x)$ יש קיצון

כאשר $x=1$ ויש קיצון הוא מקסימום.

עם קונקסיה של $f(x)$ כמעט כן, גם $g(x)$

יש מקסימום $x=1$.

כיוון $g(x)$ יש $g(x)$:

$g(1) = \ln(f(1)) = \ln(1) \rightarrow \boxed{\max(1, 1)}$

Ⓢ (3) אסימטוטה אנכית: $f(x) = 0$ (כיוון $f(x)$)

על כיוון הגזירה של $f(x)$ ל $f(x)$ יש קיצון.

עם כיוון אסימטוטה אנכית $g(x)$.



אנטי-לוגריתם - האנטי-לוג של $F(x)$ (כאשר $x \rightarrow \infty$)
היא $y=1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln F(x))$$

נרצות מה קיוד $f(x) - 5$
כאשר $x \rightarrow \infty$

$$= \ln 1 = 0 \rightarrow \boxed{y=0}$$

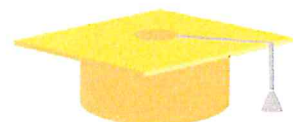
אנטי-לוגריתם של $F(x)$ (כאשר $x \rightarrow -\infty$)
היא $y = \frac{2}{3}$

נרצות מה קיוד $f(x) - 5$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(F(x)) = \boxed{\ln \frac{2}{3}}$$

האנטי-לוג (היא) $y = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ (היא)

כאשר $y = -0.41$



(4) תחומי חלוקה של $g(x)$: $g(x) = h(F(x))$

$g(x) > 0$ רצף

$h(F(x)) > 0$

$F(x) > c^0$

$F(x) > 1$

על ידי הציון, הנתן של $F(x)$ של $1-n$

סכא נטור

דיון ק' - כפי שהיטור $h(F(x))$

יבוא חלוקה, הקטור של $h - h$

חלוקה של $1-n$, עט $F(x) > 1$

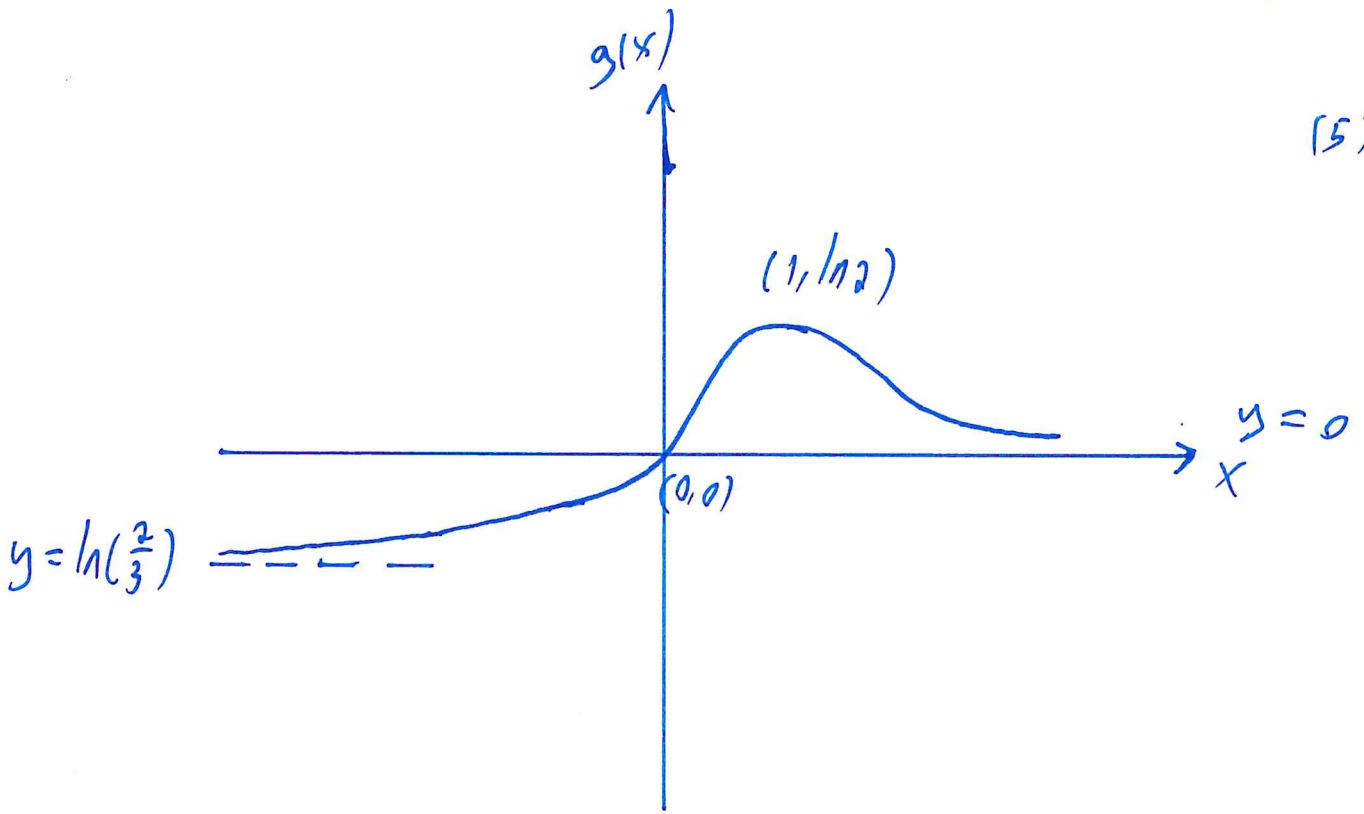
סכא ונקוד

תחומי שליליות: כמות ורצף חזרה

סכא ונקוד $x < 0$



2
(5)



$$h(x) = F(x) - g(x) \quad (1) \text{ 2}$$

$$h(x) = F(x) - h \cdot F(x)$$

$$h'(x) = F'(x) - \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{F'(x) \cdot F(x) - F'(x)}{F(x)}$$

$$F'(x) \cdot [F(x) - 1] = 0 \quad \text{כלומר}$$

$$F'(x) = 0$$

$$\rightarrow F(x) = 1$$

כל כו
הוא
F(x) כל

$$x = 1$$

$$x = 0 \rightarrow$$

כל כו
הוא
F(x)

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



נקבלו נקודות קיצון
 $x=0$ ו- $x=1$ - נקודות קיצון
 על ידי הנדסה של (אזרח) סצ (הקיצון) (ואם):

$x=0$
 מומ

$x=1$
 מומ

נמצא את שיעורי ה- g :

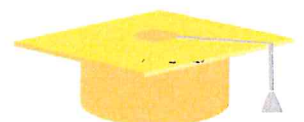
$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - hf(x)$$

$$h(0) = f(0) - hf(0) = 1 - 0 = 1 \quad \text{נקודת } x=0$$

מומ (0,1)

$$h(1) = f(1) - hf(1) = 2 - 1 = 1 \quad \text{נקודת } x=1$$

Max (1, 2-1)



(2) אזור הירוק הוא ההגדרה בין שיעור ה-y

ש בקווי A לשיעור ה-y של הנקודה B.

אם נסת
 $A(x, F(x))$
 $B(x, g(x))$

אם
 $AB = F(x) - g(x)$

ואם
 $AB = h(x)$

נסת, $AB = 1$, לכן $h(x) = 1$

נרצה למצוא נקודות על $h(x)$

שגד עוקר המעקציה הוא 1.

עם כי הציור יו נקודה אחת כ-1

ולכן שיעור ה-x הוא אדם.

למינוס, $h(0) = 1$,

נסת $x=0$

