

## פתרון הבחינה

# במתמטיקה

קיץ תש"פ, 2020, מועד ב', שאלון: 35581

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי  
ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



1. טל ואלון הם ספורטאים המשתתפים בתחרות טריאתלון.

התחרות מורכבת משלושה מקצים רצופים: המקצה הראשון הוא שחייה, המקצה השני הוא רכיבה על אופניים ואורכו 180 קילומטרים, והמקצה השלישי הוא ריצה ואורכו 42 קילומטרים. בפתרון השאלה, הנח שמהירות השחייה, מהירות הרכיבה ומהירות הריצה של כל אחד מן הספורטאים, טל ואלון, הן קבועות לאורך כל אחד מן המקצים.

ריצה	רכיבה על אופניים	שחייה
------	------------------	-------

נתון: טל התחיל את מקצה הריצה בשעה 13:30 ואלון התחיל את מקצה הריצה בשעה 15:00.

טל הגיע לקו הסיום של הטריאתלון חצי שעה לפני אלון.

מהירות הריצה של אלון גדולה ב-1 קמ"ש ממהירות הריצה של טל.

א. באיזו שעה סיים אלון את מקצה הריצה?

באותו היום התחיל אלון את מקצה השחייה בשעה 6:00 וסיים אותו לפני השעה 10:00.

ב. לפניך שני היגדים I-II. קבע בנוגע לכל אחד מהם אם הוא אפשרי או אינו אפשרי.

I מהירות הרכיבה על אופניים של אלון היא 18 קמ"ש.

II מהירות הרכיבה על אופניים של אלון היא 25 קמ"ש.

נאציף :  
מהירות - ריצה - 42 - x  
מהירות - ריצה - 180 - x+1

S	t	V
42	$\frac{42}{x}$	x
42	$\frac{42}{x+1}$	x+1

פירגורן :  
ריצה 13:30  
ריצה 15:00

$$\frac{42}{x+1} - \frac{x(x+1)}{1} = \frac{x}{42} \quad / \cdot x(x+1)$$

$$42(x+1) - x(x+1) = 42x$$

$$42x + 42 - x^2 - x = 42x$$

$$0 = x^2 + x - 42$$

$$x_1 = -7 \quad x_2 = 6$$

x אינו מסתדר ולכן חוזבי

מהירותו של אלון 7 קמ"ש הוא 42 קמ"ש  $\leq 6$  ס"מ

אלון הוא מסתדר ב- 15:00 ולכן אלון סיים לריצה ב- 21:00

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**



I לא אפסתי (1) (2)

אם מהירות הרכיבה על אופניים של אלון היא 18 קמ"ש (והמשולש = 180 קמ"ש הרי שמשן הרכיבה = 10 שעות וזה אומר שהוא החל לרכוב על אופניים בשעה 05:00 ... וכל כחוקן סגירה לעולם

II בן אפסתי

אם מהירות הרכיבה על אופניים של אלון היא 25 קמ"ש אז הוא צבר 180 קמ"ש ב- 7.2 שעות (7 שעות + 12 דקות) וזה אומר שהוא החל לרכוב על אופניים בשעה 7:48 וזה אפסתי כי הוא החל לשהות ב- 6:00 והוא לרכוב לפני 40:00

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



מתמטיקה, קיץ תש"ף, מועד ב, מס' 035581 + נספח

- 3 -

2. בסדרה  $a_n$  נתון כי לכל  $n$  טבעי, סכום  $n$  האיברים הראשונים של הסדרה הוא  $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$ .

א. (1) מצא את  $a_1$  ואת האיבר הכללי של הסדרה  $a_n$  בעבור  $n > 1$ .

(2) הראה כי  $a_n$  היא סדרה הנדסית, ומצא את המנה שלה.

נתונה הסדרה  $c_n = S_{n+1} - S_n$ .

ב. (1) הראה כי הסדרה  $c_n$  היא סדרה הנדסית.

(2) הראה כי לכל  $k$  טבעי הסכום של  $k$  האיברים הראשונים בסדרה  $c_n$  גדול פי 3 מן הסכום של

$k$  האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$ .

(k) (1)  $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$

$S_1 = 2 \cdot 3^1 - 2$

נתון את  $S_1$  :

$S_1 = 4 \rightarrow a_1 = 4$

( $n > 1$ )  $a_n = S_n - S_{n-1}$

נחסר פה :

$S_n = 2 \cdot 3^n - 2$

$S_{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} - 2$

$a_n = 2 \cdot 3^n - 2 - (2 \cdot 3^{n-1} - 2)$

נצ' ונקבל :

$a_n = 2 \cdot 3^n - 2 - 2 \cdot 3^{n-1} + 2 = 2 \cdot 3^n - \frac{2 \cdot 3^n}{3}$

$a_n = \frac{6 \cdot 3^n - 2 \cdot 3^n}{3} = \frac{4 \cdot 3^n}{3}$

$a_n = \frac{4 \cdot 3^n}{3} = 4 \cdot 3^{n-1} = \frac{4}{3} \cdot 3^n$





$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\text{זוגל}}{\text{קרוס}} = 3 \quad (2)$$

$$a_n = \frac{4 \cdot 3^n}{3} \quad \text{קולטו}$$

$$a_{n+1} = \frac{4 \cdot 3^{n+1}}{3}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{4 \cdot 3^{n+1}}{3}}{\frac{4 \cdot 3^n}{3}} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{3^n \cdot 3^1}{3^n} = 3$$

קבלתי  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$ , אם גמולי הנקמה  $q=3$

הערה: קצו עוזבו להסביר הנקמה, כזו ו-1 א טוסמג  
 סקבלתי -8 א-8 ונדקוק האם מתקום וס הטלל  
 קערבו -8 א-8 מתקום קמסיף א(1) ס יזי גבול.  
 גוימיו. ס ס

$$a_n = \frac{4 \cdot 3^n}{3}$$

(ס קולטו  $a_1=4$ )

$$a_1 (n=1) = \frac{4 \cdot 3^1}{3} = 4 \rightarrow \rightarrow \rightarrow$$

הסבר הנקמה  
 $a_1=4, q=3$



$$C_n = S_{n+1} - S_n \quad (1) \quad (*)$$

כדי ש  $C_n$  , יהיה קבוע , נניח  $C_n = C_{n+1}$

$$S_n = 2 \cdot 3^n - 2$$

$$S_{n+1} = 2 \cdot 3^{n+1} - 2$$

$$C_n = S_{n+1} - S_n = 2 \cdot 3^{n+1} - 2 - (2 \cdot 3^n - 2)$$

$$C_n = 2 \cdot 3^n \cdot 3 - 2 - 2 \cdot 3^n + 2$$

$$C_n = 6 \cdot 3^n - 2 \cdot 3^n = 4 \cdot 3^n$$

$$\overbrace{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}}^{S_n} = S_{n+1}$$

$$C_n = S_{n+1} - S_n$$

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$$



$C_n = a_{n+1}$  : נקרא:

$a_{n+1} = \frac{4 \cdot 3^{n+1}}{3}$  ←  $a_n = \frac{4 \cdot 3^n}{3}$  נקרא

$a_{n+1} = 4 \cdot 3^n$

↓  
 $C_n = 4 \cdot 3^n$

$C_{n+1} = 4 \cdot 3^{n+1}$  :  $C_{n+1}$  נקרא

$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{4 \cdot 3^{n+1}}{4 \cdot 3^n} = 3$

$\frac{C_{n+1}}{C_n} = 3$  →

$C_n$  הנקרא  
שגור 3.





קבוצה 1-2 זרימה

4, 12, 36, ...

סדרת an

(P) (2)

$a_1 = 4$

$q = 3$

$$S_{an}^k = \frac{4(3^k - 1)}{3 - 1} = 2(3^k - 1)$$

$C_n = 4 \cdot 3^n$

סדרת cn

$C_1 = 12$

12, 36, 108, ...

$$S_{cn}^k = \frac{12(3^k - 1)}{3 - 1} = 6(3^k - 1)$$

$$\frac{S_{cn}^k}{S_{an}^k}$$

$$= \frac{6(3^k - 1)}{2(3^k - 1)}$$

**3**

→

סכום k האיברים הראשונים הוא 3 פעמים סכום האיברים הראשונים.

דוגמה: an.

an 4, 12, 36, ...

זרימה 1 - ניתן לראות

cn 12, 36, 108, ...

כי כל איברי קבוצת an זוגיים כי 3 מהאיברי הצמודים

קבוצת an מקיפה קבוצת an, לכן מביא כי איברים ראשונים

קבוצת an תמיד זוגיים כי 3 מהאיברי של קבוצת an קבוצת an

למידע על פסיכומטרי  
 ביואל גבע ←

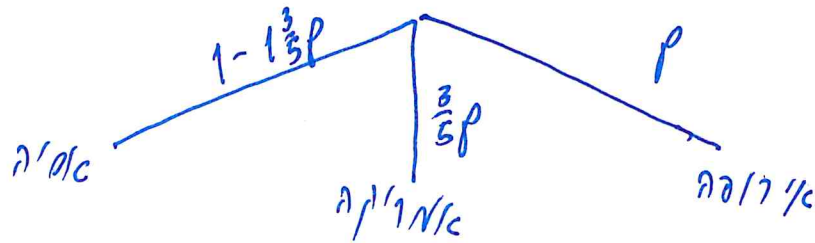
**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**

**אל תתפשר עליה.**





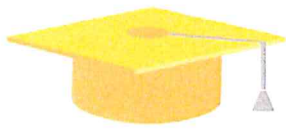
3. יעדי הטיסות של חברת תעופה מסוימת הם היבשות: אירופה, אמריקה ואסיה בלבד (אין טיסות ללא נוסעים). נתון כי מבין הנוסעים בחברה, מספר הנוסעים לאמריקה הוא  $\frac{3}{5}$  ממספר הנוסעים לאירופה. בוחרים באקראי נוסע מבין הנוסעים בחברה. נסמן ב- $P$  את ההסתברות שנוסע זה טס לאירופה. בוחרים באקראי 2 נוסעים מבין הנוסעים בחברה. נתון כי ההסתברות ש-2 הנוסעים שנבחרו אינם טסים לאותה היבשת היא 0.62.
- נתון:  $P > 0.4$ .
- מצא את  $P$ .
  - בוחרים באקראי 5 נוסעים מבין הנוסעים בחברה. מהי ההסתברות שלפחות 2 מן הנוסעים שנבחרו טסים לאמריקה וגם לפחות 2 מהם אינם טסים לאמריקה? באוטובוס לנמל התעופה היו 50 נוסעים שטסים בחברה זו. התפלגות יעדי הטיסה של הנוסעים באוטובוס זהה להתפלגות יעדי הטיסה של כל הנוסעים בחברת התעופה. בחרו באקראי 2 נוסעים מן האוטובוס זה אחר זה (ללא החזרה), והתברר ששניהם טסים לאותה היבשת. מהי ההסתברות ש-2 הנוסעים שנבחרו טסים לאמריקה?



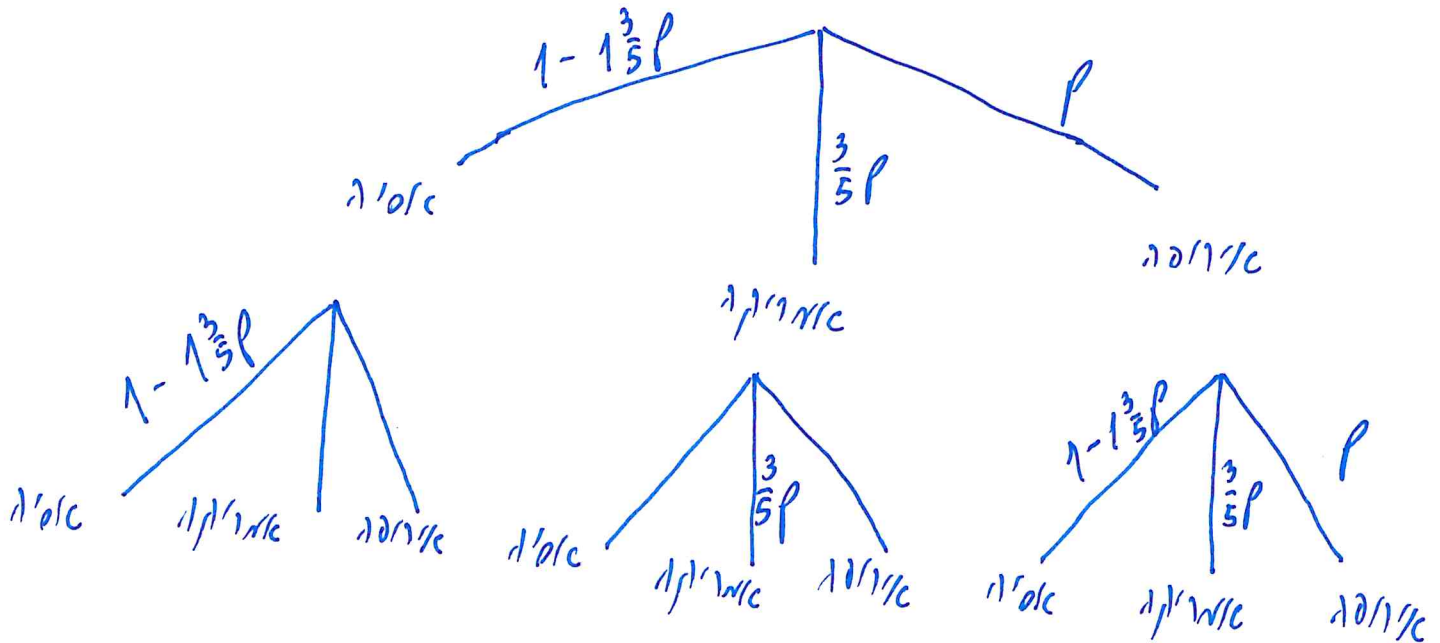
נתון כי  $P(\text{אמריקה} | \text{נוסע}) = P$

מספר הנוסעים לאמריקה הוא  $\frac{3}{5}$  ממספר הנוסעים לאירופה  
 מספר הנוסעים לאסיה הוא  $\frac{3}{5}$  ממספר הנוסעים לאירופה, כלומר  $\frac{3}{5}P$

הסתברות שנוסע לא יטוס לאסיה או לאירופה היא  $1 - P - \frac{3}{5}P$   
 (אסיה, אסיה)  $P(\text{אסיה} | \text{נוסע}) = 1 - P - \frac{3}{5}P = 1 - 1.6P$



בקנה ביאורים על המתאור 2 טפסים :



$$P \left( \begin{matrix} \text{אסיה} \\ \text{אסיה} \\ \text{אמריקה} \\ \text{אירופה} \end{matrix} \right) = 0.62$$

$$\downarrow$$

$$P \left( \begin{matrix} \text{אסיה} \\ \text{אמריקה} \\ \text{אירופה} \end{matrix} \right) = 1 - 0.62 = 0.38$$

$$P \left( \begin{matrix} \text{אירופה} \\ \text{אירופה} \end{matrix} \right) + P \left( \begin{matrix} \text{אמריקה} \\ \text{אמריקה} \end{matrix} \right) + P \left( \begin{matrix} \text{אסיה} \\ \text{אסיה} \end{matrix} \right) \underbrace{= 0.38}_{\text{3 מסלולים מתאימים}}$$

$$p \cdot p + \frac{3}{5} p \cdot \frac{3}{5} p + (1 - \frac{3}{5} p)(1 - \frac{3}{5} p) = 0.38$$

נחידע עכ פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**





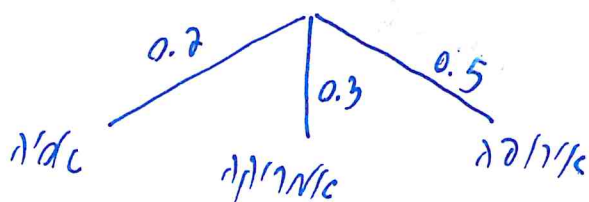
$$p^2 + \frac{9}{25}p^2 + 1 - 3\frac{1}{5}p + 2.56p^2 = 0.38$$

$$3.96p^2 - 3.2p + 0.62 = 0$$

$$p_1 = 0.5$$

$$p_2 = \frac{31}{98}$$

נכון,  $p > 0.4$ , למק  $p = 0.5$



נכון  $p = 0.5$

$$p(\text{אמריקה}) = 0.3$$

$$p(\text{לא אמריקה}) = 0.7$$

ביטוי דנומה ונומי.  
נומין את כלל התקיים.  
ונומי אילו מקיים מתאמים לבונום הספיד:

		0	1	2	3	4	5
כן אמריקה 0.3							
לא אמריקה 0.7		5	4	3	2	1	0

נחמ את  
2 התקיים  
המתאמים



$$P \left( \begin{array}{l} \text{לפחות 2 אמצעיות} \\ \text{ולפחות 2 איש} \\ \text{לפחות 1 אמצעית} \end{array} \right) = P \left( \begin{array}{l} \text{2 או 3} \\ \text{ט"ס} \\ \text{אמצעיות} \end{array} \right)$$

$$= P \left( \begin{array}{l} \text{2 מתוך 5} \\ \text{ט"ס} \\ \text{אמצעיות} \end{array} \right) + P \left( \begin{array}{l} \text{3 מתוך 5} \\ \text{ט"ס} \\ \text{אמצעיות} \end{array} \right)$$

גיוס 1587 גיוסות גיוס וזקנים:

$$0.3^2 \cdot 0.7^3 \cdot \binom{5}{2} + 0.3^3 \cdot 0.7^2 \cdot \binom{5}{3}$$

$$0.3087 + 0.1323 = \boxed{0.441}$$

50 גיוסות וסך הכל.

(2)

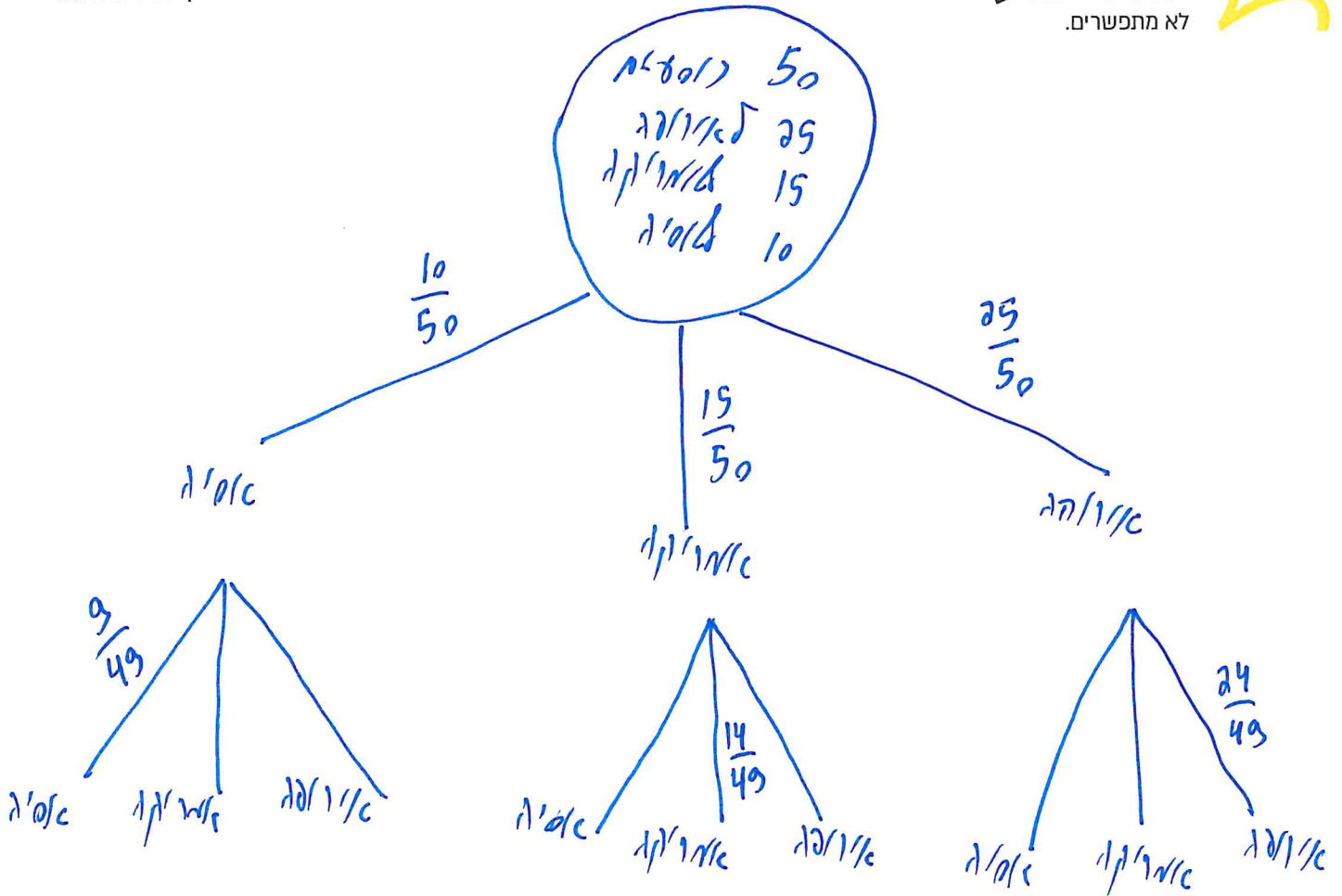
גיוסות לפיכך אהלים 0.5 מתוך 50,

כאשר 25.

הגיוסות אמצעיות אהלים 0.5 מתוך 50, כאשר 15.

אליהן 1 גיוס מתוך 50, כאשר 10.





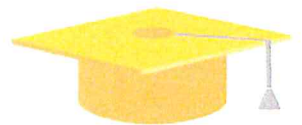
כאן הסתוות מולנית:

$$P(\text{שני הכדורים אדום / שני הכדורים ירוק}) = \frac{P(\text{אדום אדום})}{P(\text{אדום אדום}) + P(\text{אדום ירוק}) + P(\text{אדום כחול})}$$

$$\frac{\frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49}}{\frac{25}{50} \cdot \frac{24}{49} + \frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49} + \frac{10}{50} \cdot \frac{9}{49}} = \frac{\frac{3}{35}}{\frac{12}{49} + \frac{3}{35} + \frac{9}{245}} = \boxed{\frac{7}{30}}$$

לחידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

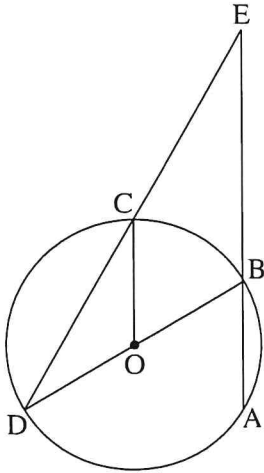
**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
אל תתפשר עליה.



**פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור** (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

**שים לב:** אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O.

הרדיוס OC מקביל למיתר AB, כמתואר בציור.

BD הוא קוטר במעגל.

הנקודה E היא מפגש הישרים AB ו-DC (ראה ציור).

א. הוכח:  $\angle AED = \angle CDO$ .

ב. הוכח כי CO חוצה את הזווית DCA.

נתון:  $\frac{EB}{BA} = 2$ .

ג. הוכח כי המשולש ABO הוא שווה צלעות.

ד. נתון: שטח הטרפז COBE הוא 9.

מצא את סכום שטחי המשולשים COD ו-ABO ( $S_{\Delta COD} + S_{\Delta ABO}$ ).

פתרון:

הנחה

①  $OC \parallel AB$

② BD קוטר

③  $OC = OD = R$

④  $\angle ODC = \angle OCB = \alpha$

\*היא שווה לזו בסוף הפרק

⑤  $\angle OCD = \angle BED$

נימוך

נתון

נתון

הנחה כדל

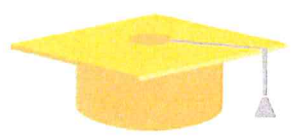
במשולש ABO זווית שווה  
מאחר ש OC || AB אז זווית  
שלושת זוויות שוות.

זווית שווה לזו בסוף הפרק

לדבליק שווה לזו לזו. ①

נחידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**





טעם

$\angle AED = \angle CDO$  (3)



$\angle ABD = 2\alpha$  (7)

$\angle ACD = \angle ABD = 2\alpha$  (8)

$\angle ACO = \alpha$  (5)

$\angle COA$  חזקה של  $\angle A$  (10)



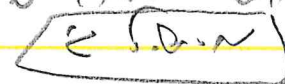
$\frac{EB}{BA} = 2$  (11)

$BE = BD = 2R$  (12)

$BA = R$  (13)

$OA = OB = R$  (14)

$\angle AOC$  חזקה של  $\angle A$  חזקה של  $\angle A$  (15)



נימוק

כאן המקרה (5), (7)

זווית חילוקייה במשולש שווה  
לכיוון הזווית שאינן  
קטופה זהה. (5), (7)

זווית היקפית הנשענת  
על זווית קטנה שווה

חייבונו זווית. (5), (7)

האזנה חזקה של  $\angle A$  (10)

נימוק

במשולש  $\triangle AOC$  זווית שווה  
נמצאת בקצה שווה. (5), (7)

חייבונו. (12), (10)

האזנה חזקה של  $\angle A$

האזנה חזקה של  $\angle A$  חזקה של  $\angle A$  (13), (14)



נילוי

בנייה של

נילוי

נוסחת שטח טרפז

אבי (17), (18), (13), (3)

חישוק

נוסחת שטח משולש (16), (20)

שטח צלעון S.S

יחס הצלעון (3), (12), (22)

יחס השטחים בשולשיק

קואליט שלוק ארי קואליט

הצלעון השלוק (23), (22)

חיבוק שטחים

חישובי אבי (17), (24), (25)

חיבוק שטחים

למשל 3'

טענות

(16) נוכי 3 לוקה OE  
5 קצת AB

$$S_{COBE} = 9 \quad (17)$$

$$S_{COBE} = \frac{(BE + CO) \cdot OE}{2} \quad (18)$$

$$9 = \frac{(2R + R) \cdot OE}{2} \quad (19)$$

$$R \cdot OE = 6 \quad (20)$$

$$S_{ABO} = \frac{R \cdot OE}{2} = 3 \quad (21)$$

$$S_{DOC} \sim S_{OEB} \quad (22)$$

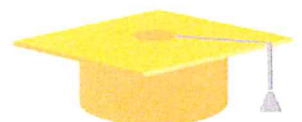
$$\frac{BE}{CO} = \frac{2R}{R} = 2 \quad (23)$$

$$\frac{S_{DOC}}{S_{DBE}} = \frac{1}{4} \quad (24)$$

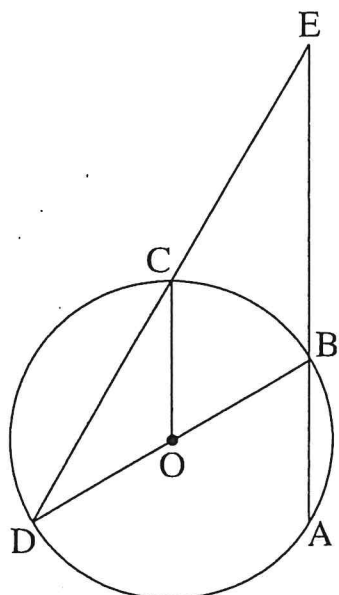
$$S_{DOC} + S_{COBE} = S_{DBE} \quad (25)$$

$$S_{COD} = 3 \quad (26)$$

$$S_{COD} + S_{ABO} = 6 \quad (27)$$





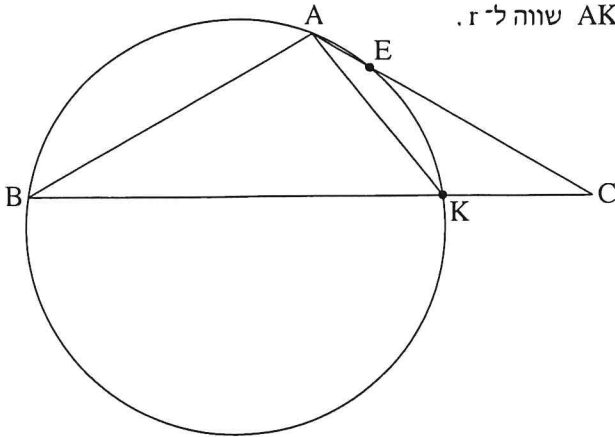


למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



5. ABC הוא משולש שווה שוקיים ( $AB = AC$ ) ששניים מקודקודיו, A ו-B, נמצאים על מעגל שרדיוסו r, כמתואר בציור. המעגל חותך את הצלעות AC ו-BC בנקודות E ו-K בהתאמה. נסמן:  $\angle KAC = \beta$ ,  $\angle BAK = \alpha$ .



א. (1) הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AKC שווה ל-r.

(2) הוכח:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{BK}{KC}$

ידוע:  $\beta < \angle ABK$ , נתון:  $\alpha + \beta = 120^\circ$ .

ב. הראה כי  $\alpha$  היא זווית קהה.

נתון:  $BK = 55$ ,  $AK = 28$ .

ג. חשב את  $\alpha$  ואת אורך הקטע BC.

המשך בעמוד 5

פתרון:  
נוסיף את הנקודה אסוסט:

1.  $\triangle ABC$

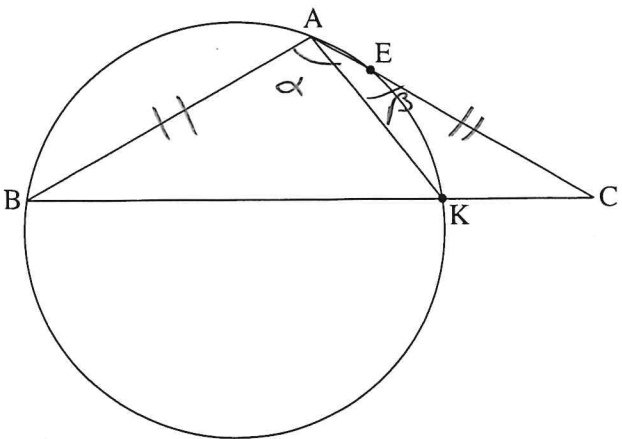
$\angle ABC = \angle ACB = 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$

$\triangle ABK$

מסמ הסינוסים:

$\frac{AK}{\sin(90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2})} = 2r$

$AK = 2r \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$



למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



ΔAKC  
(סל/אל - הרדיוס R - ו/ולתל דלסל)

גס/ולס:

$$\frac{AK}{\sin(90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2})} = 2R$$

$$\frac{2r \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = 2R$$

$$\boxed{r = R}$$

ΔABK (2)

$$\frac{BK}{\sin \alpha} = 2r$$

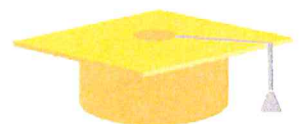
$$\frac{KC}{\sin \beta} = 2r$$

ΔAKC

דכול:

$$\frac{KC}{\sin \beta} = \frac{BK}{\sin \alpha}$$

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{BK}{KC}}$$



ה. נתון:  $\alpha + \beta = 120^\circ$ ,  $\beta < \angle ABK$

$\Downarrow$

$\angle ABC = \angle ACB = 90^\circ - \frac{120^\circ}{2} = 30^\circ$

נכון:  $\angle ABK = 30^\circ$

$\Downarrow$

$\beta < 30^\circ$

$\Downarrow$

$\alpha > 90^\circ$

$\Downarrow$

$\alpha$  חריף זהה

ד. נתון:  $BK = 55$ ,  $AK = 28$

המשפט הקוסנוס של  $\triangle ABK$ :

$$\frac{AK}{\sin \angle ABK} = 2r \Rightarrow \frac{28}{\sin 30^\circ} = 2r \Rightarrow r = 28$$

המשפט הקוסנוס של  $\triangle ABK$ :

$$\frac{BK}{\sin \alpha} = 2r \Rightarrow \frac{55}{\sin \alpha} = 56 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{55}{56}$$

$\alpha = 79.756^\circ$

נכון:

$\Downarrow$   $\alpha = 100.844^\circ$



$\alpha = 100.844^\circ$   $\alpha // S$  - דהיינו, וכן

(כיוון) - כא  $\neq$  שולט : AKC

$\beta = 170^\circ - \alpha = 19.156^\circ$

משפט הסינוסים:

$\frac{KC}{\sin 19.156^\circ} = 2.78 \Rightarrow KC = 78.376$

נחבר הישגים, יחד פה:

$BC = 73.376$



6. נתונה הפונקציה  $f(x) = (x + 3)^4(2 - x)$  המוגדרת לכל  $x$ .

- א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.  
 (2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.  
 (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{1}{f(x-3)}$ .

- ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ ?  
 (2) האם הפונקציה  $g(x)$  חותכת את הצירים, ואם כן, באילו נקודות? נמק את תשובתך.  
 (3) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $g(x)$ ?  
 (4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .
- ג. (1) הראה כי  $f(x) \geq 48$  לכל  $-1 \leq x \leq 1$ .

(2) הסבר מדוע  $\int_2^4 g(x) dx \leq \frac{1}{24}$ .

פתרון:  
א.ל

$$f(x) = (x+3)^4(2-x)$$

$$f(0) = (0+3)^4(2-0) = 162$$

(1) ציר y:

$(0, 162)$

$$(x+3)^4(2-x) = 0$$

ציר x:

$(2, 0)$

↙ ↘  
 $x = -3$     $x = 2$

$(-3, 0)$

$(-3, 0) \quad (2, 0) \quad (0, 162)$

אסימטות:





(2) נגזרת:

$$f'(x) = 4(x+3)^3(2-x) - (x+3)^4$$

$$f'(x) = (x+3)^3 \cdot [8 - 4x - x - 3] = (x+3)^3(5-5x)$$

נשווה לאפס ונסתור:

$$(x+3)^3(5-5x) = 0$$

$$\begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ x = -3 & x = 1 \end{matrix}$$

$$f(1) = (1+3)^4(2-1) = 256 \quad \text{ש.י. פ.}$$

$$f(-3) = 0$$

הנדודות הן:  $(-3, 0)$ ,  $(1, 256)$

נדגף אף - סוג הנדודות:

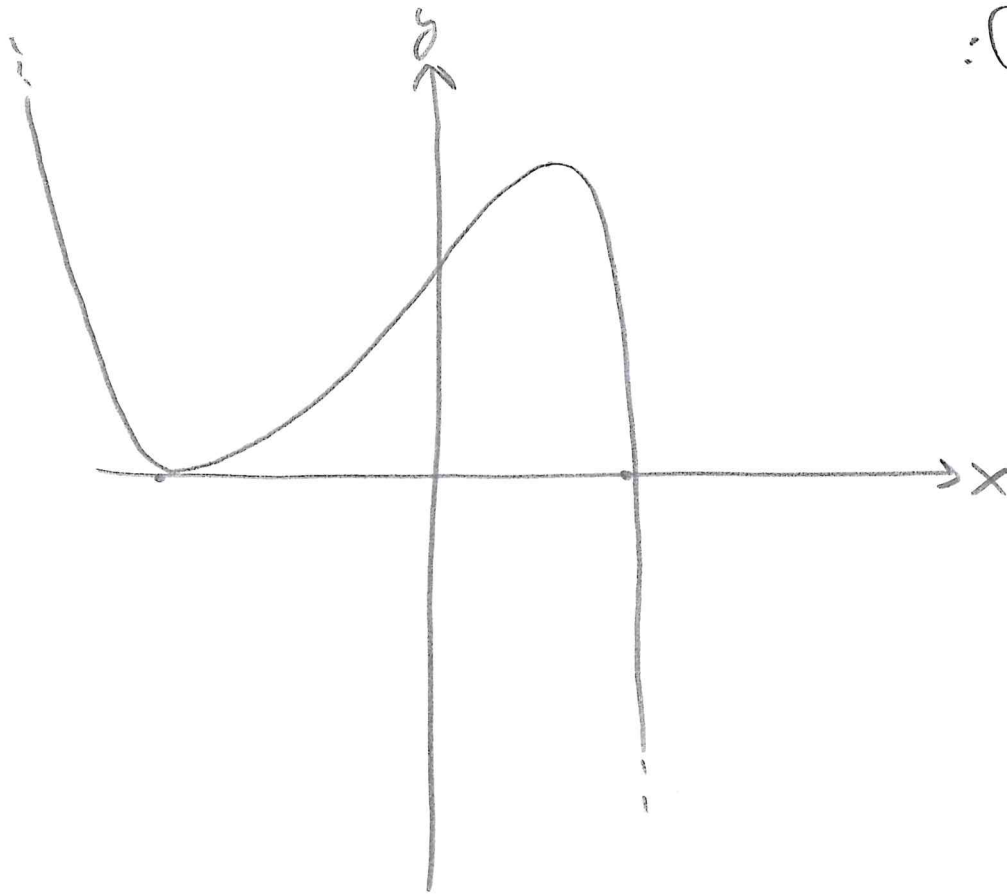
x	-4	-3	0	1	2
f'(x)	-	0	+	0	-
f(x)	↘	.	↗	.	↘

אם הסבלה:

$(1, 256)$  - נקודת מקסימום  
 $(-3, 0)$  - נקודת מינימום



(3) נסרס:



ג. נתון הפונקציה  $g(x) = \frac{1}{f(x-3)}$

$$f(x-3) = (x-3+3)^4 (2-(x-3)) = x^4 (5-x)$$

$\Downarrow$

$$g(x) = \frac{1}{x^4(5-x)}$$

(1) תחום הגדרה:  $x \neq 0, 5$

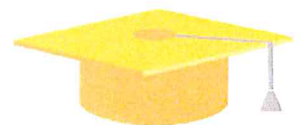
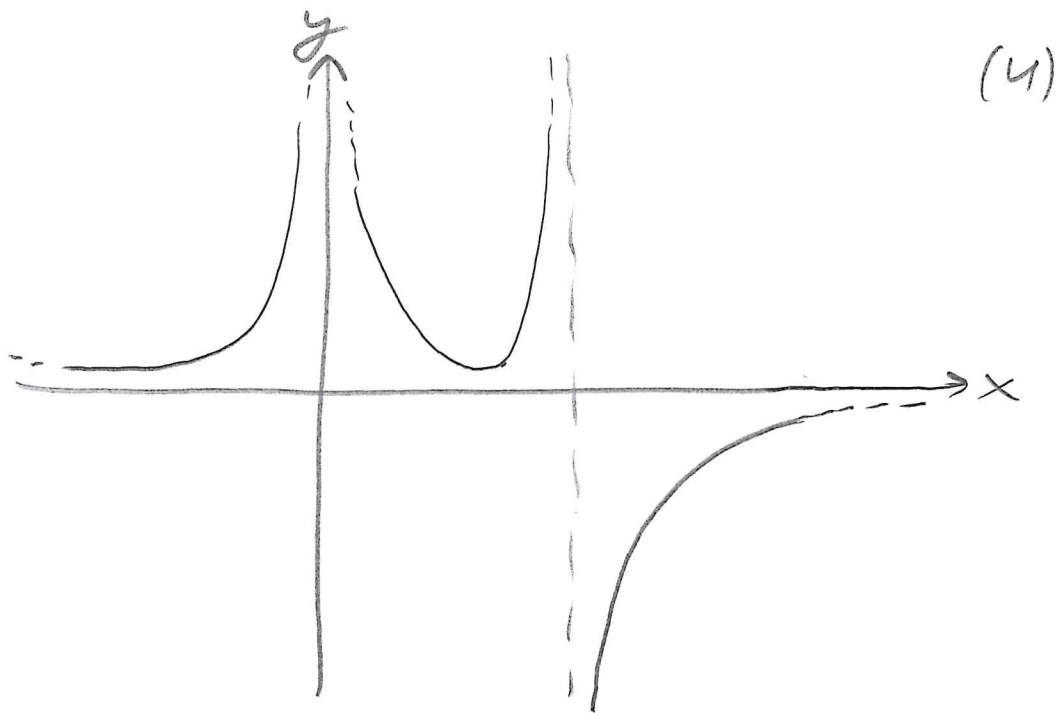
(2)  $g(x)$  לא מוגדרת יחד עם  $x=0$  כי  $x=0$  לא בתחום הגדרה, והשאלה לא מופיעה בלחץ.



(3) הפונקציה  $f(x-3)$  היא הצגה ימנית של  $f(x)$ , זכור וקדומה הדירוג של  $f(x-3)$  הן  $(4, 256) \sim$  קטילינג  $(0, 0) \sim$  ניו-לוג.

הפונקציה  $f(x)$  היא הפונקציה הפוכה של  $f(x-3)$ , זכור תחומי הפיה והיחידה של הפונקציה. כולן:

עליה:  $x < 0, 4 < x < 5, x > 5$   
יניצה:  $0 < x < 4$



ד. (1)  $f(x)$  קצה בתחום  $-1 < x < 1$ .

נמצא את  $f(-1)$ :

$$f(-1) = (-1+3)^4 \cdot (2-(-1)) = 2^4 \cdot 3 = 48$$

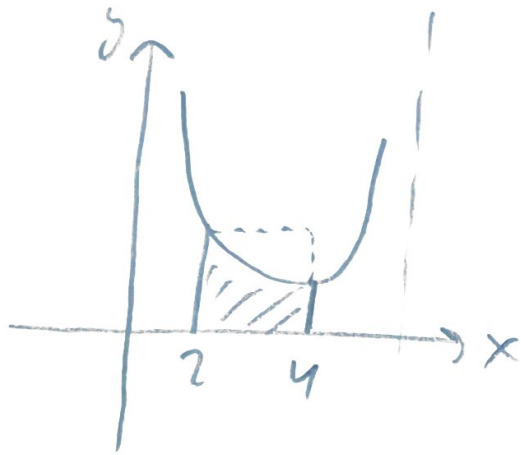
הנקודה  $(-1, 48)$  היא המינימום האפשרי

של  $f(x)$  בתחום  $-1 < x < 1$ , ולכן

מתקיים  $f(x) \leq 48$  לכל  $-1 < x < 1$ .

(2) האינטגרל  $\int_2^4 f(x) dx$  מייצג את

השטח שהפונקציה  $f(x)$  סוגרת עם



קצה ה- $x$ :

לא יפוג האם

הפונקציה

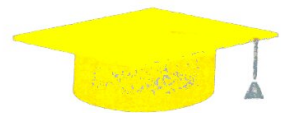
קצה כלפי

מטה או כלפי

מטה בתחום הזה, ולכן נמצא את

שטח האופן המינימלי, ששטחו בלתי

קטן מהשטח שאיננו האינטגרל:



להסקים ההולמים יקוץ:

$$g(2) = \frac{1}{f(2)} = \frac{1}{48}$$

$$g(4) = \frac{1}{f(4)} = \frac{1}{256}$$

לכן שטח המשולש הוא

$$S = \frac{1}{48} \cdot 2 = \frac{1}{24}$$

$$\int_2^4 g(x) dx \leq \frac{1}{24} \quad \checkmark \text{ כיון שגדלים}$$





מתמטיקה, קיץ תש"ף, מועד ב, מס' 035581 + נספח

- 6 -

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2}$ .  $a \neq 0$  הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות  $a$ , והבחן בין  $a > 0$  ובין  $a < 0$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ . (1)
  - מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה). (2)
  - הראה שהפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה זוגית. (3)
  - מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים (אם יש כאלה). (4)
  - מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ . (5)
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בעבור  $a > 0$  וסקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בעבור  $a < 0$ .  
בעבור כל גרף שסרטטת כתוב את התחום המתאים של הפרמטר  $a$ .
- ג. מצא בעבור אילו ערכים של הפרמטר  $a$  גרף הפונקציה  $f(x)$  חותך את הישר  $y = 1$  או משיק לו.

$a < 0$

I:  $x \neq 0$

II:  $x^2 - a \geq 0$

אכיוון  $a$  שלילי (קבל)  
תיאור של  $x^2 - a \geq 0$  ביסודיים  
תיוגיה ולכן הטו שיווין  
נבין ללא  $x$ .

$|x \neq 0|$

(1) איון חיתוך עם ציר  $y$   
( $x=0$  לא בתחום)

$$0 = \frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2}$$

$$x^2 - a = 0 \rightarrow x^2 = a$$

$\emptyset$  אכיוון  $a$  שלילי

(2) איון חיתוך עם ציר  $x$

10

$a > 0$

I:  $x \neq 0$

II:  $x^2 - a \geq 0$

$x^2 - a = 0$

$x^2 = a$

$x = \pm\sqrt{a}$



(1)

$| -\sqrt{a} \geq x \text{ ו} x \geq \sqrt{a} |$

(2) איון חיתוך עם ציר  $y$   
( $x=0$  בתחום)

$$0 = \frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2}$$

$$\sqrt{x^2 - a} = 0 \rightarrow x^2 = a$$

$(\sqrt{a}, 0), (-\sqrt{a}, 0)$

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**





$a < 0$

$a \geq 0$

$f(x) = f(-x)$       (1) כיון  $x > 0$       (3)

$$\frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2} = \frac{\sqrt{(-x)^2 - a}}{(-x)^2}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2}$$

י.ע.ו

אין סוגי פונקציה אנכית  
(כאשר  $x$  לא שואף לאינסוף ולא גאוס)  
(אין סוגי פונקציה)

אין סוגי פונקציה אנכית      (2)

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2 - a}}{\sqrt{x^4}} = \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{a}{x^4}} = 0$$

\* אפשר לראות שהאסימטוטה אנכית היא  $y=0$  מכיוון שהפונקציה שואפת לאינסוף כאשר  $x$  שואף לאינסוף או גאוס.

$y=0$

$y=0$



$a < 0$

$a > 0$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a}} \cdot x^2 - \sqrt{x^2-a} \cdot 2x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x^3}{\sqrt{x^2-a}} - 2x\sqrt{x^2-a}}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x^3 - 2x(x^2-a)}{\sqrt{x^2-a}}}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-x^3 + 2ax}{x^4 \sqrt{x^2-a}}$$

$$\frac{-x^3 + 2ax}{x^4 \sqrt{x^2-a}} = 0$$

$$x(-x^2 + 2a) = 0$$

↓  
אם  $x \neq 0$

↓  
 $x^2 = 2a$

$x^2 = 2a$   
 $\emptyset$

$x^2 = 2a$   
 $x = \pm\sqrt{2a}$

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



$a < 0$

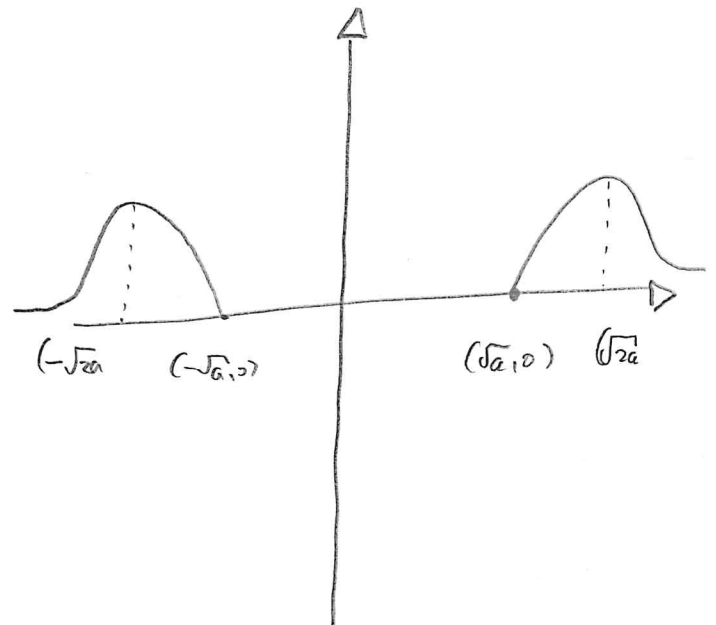
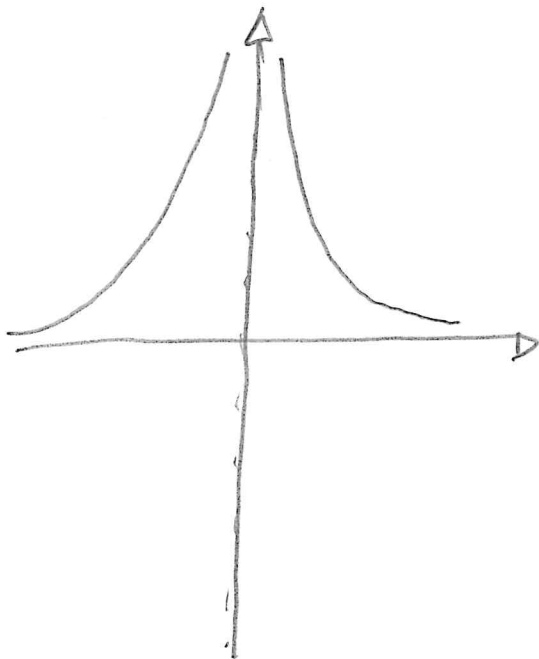
	$x < 0$	$0$	$x > 0$
$x$			
$y'$	+		-
$y$	↗		↘

$x < 0$  : חיובי  
 $x > 0$  : שלילי

$a > 0$

	$x < -\sqrt{2a}$	$-\sqrt{2a}$	$-\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{2a}$	$x > \sqrt{2a}$
$x$						
$y'$	+	-		+	-	
$y$	↗	↘		↗	↘	

$x < -\sqrt{2a}$  ו  $\sqrt{a} < x < \sqrt{2a}$  : חיובי  
 $-\sqrt{2a} < x < \sqrt{2a}$  ו  $x > \sqrt{2a}$  : שלילי



למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**



ז. עבור  $a < 0$  תהייה תמיד שתי נקודות חיתוך.  
 עבור  $a > 0$  נרשם שטוחה ה- $y$  של נקודת הקיצון  
 והיא  $y = 1$  או  $y = 0$

$$f(\sqrt{2a}) = \frac{\sqrt{2a-a}}{2a} = \frac{\sqrt{a}}{2a}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{2a} \geq 1 \quad | \cdot 2a > 0$$

$$\sqrt{a} \geq 2a$$

$$2a - \sqrt{a} \leq 0$$

$$2a - \sqrt{a} = 0$$

$$2a = \sqrt{a}$$

$$4a^2 = a$$

$$4a^2 - a = 0$$

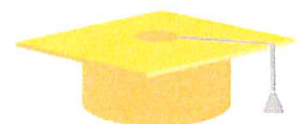
$$a(4a - 1) = 0$$

$$\begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ a=0 & a=\frac{1}{4} \\ \delta & \end{matrix}$$



$$0 < a \leq \frac{1}{4} \rightarrow$$

$$\boxed{0 < a \leq \frac{1}{4} \quad \vee \quad a < 0}$$



8. המשולש ABC חסום במעגל.

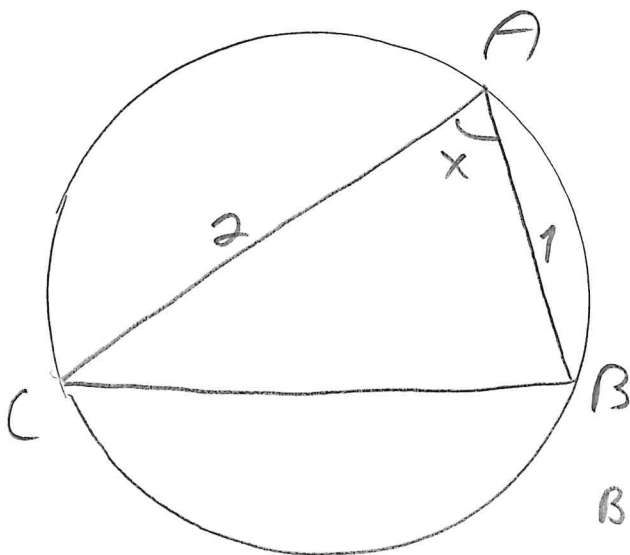
נתון:  $AC = 2$ ,  $AB = 1$ .

נסמן:  $\sphericalangle BAC = x$ .

א. (1) הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC שווה ל-  $\frac{\sqrt{5-4\cos x}}{2\sin x}$ .

(2) מצא את הערך של  $x$  שבעבורו רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא מינימלי.

ב. מצא את קוטר המעגל בעבור ערך ה-  $x$  שמצאת בסעיף א(2).



פתרון:  
(שני) את הנתונים.

א. (1) נניח  $R$  רדיוס המעגל  
נניח  $R$  רדיוס המעגל  
ההוכחה:

$$BC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos x$$

$$BC^2 = 5 - 4 \cos x$$

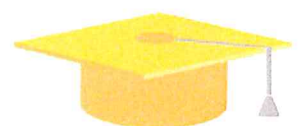
$$BC = \sqrt{5 - 4 \cos x}$$

נניח  $R$  רדיוס המעגל  $\rightarrow R > \frac{BC}{2}$  הוכחה:

$$\frac{BC}{\sin x} = 2R$$

$$2R = \frac{\sqrt{5 - 4 \cos x}}{\sin x}$$

$$R = \frac{\sqrt{5 - 4 \cos x}}{2 \sin x}$$





(2) בונד ל"ה הרפיוס היא

$$f(x) = \frac{\sqrt{5-4\cos x}}{2\sin x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{4\sin x}{2\sqrt{5-4\cos x}} \cdot 2\sin x - 2\cos x \cdot \sqrt{5-4\cos x}}{4\sin^2 x} \quad (5/7)$$

$$f'(x) = \frac{\frac{4\sin^2 x}{\sqrt{5-4\cos x}} - 2\cos x \cdot \sqrt{5-4\cos x}}{4\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{4\sin^2 x - 2\cos x(5-4\cos x)}{\sqrt{5-4\cos x}}}{4\sin^2 x}$$

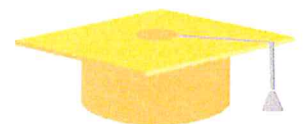
$$f'(x) = \frac{4\sin^2 x - 10\cos x + 8\cos^2 x}{4\sin^2 x \cdot \sqrt{5-4\cos x}}$$

$$f'(x) = \frac{2\sin^2 x - 5\cos x + 4\cos^2 x}{2\sin^2 x \cdot \sqrt{5-4\cos x}}$$

(שווה ל- הנאמר אלוס ונרלו לניחוח:

$$2\sin^2 x - 5\cos x + 4\cos^2 x = 0$$

$$: \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{נסתה} \quad \sqrt{\phantom{x}}$$



$$2(1 - \cos^2 x) - 5 \cos x + 4 \cos^2 x = 0$$

$$2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$$

נסתור משוואה דיכוטומית ונדבר:

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{או} \quad \cos x = 2$$

למשוואה  $\cos x = 2$  אין פתרון.

נסתור את המשוואה השנייה:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm 60^\circ + 720^\circ$$

בהחופ של  $x \in [0, 360^\circ]$  נקבל  $x = 60^\circ$

נראה שיש נקודות מינימום:

$$f'(45^\circ) = -0.76 < 0$$

$$f'(90^\circ) = 0.44 > 0 \Rightarrow \text{נקודת מינימום}$$

תשובה: עבור  $x = 60^\circ$  יהיה זה כדאי.

נמצא חוסם מינימלי.

ד. נחשב את הזווית:

$$2R = 2 \cdot \frac{\sqrt{5 - 4 \cos 60^\circ}}{2 \sin 60^\circ} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{2}$$

