

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תש"פ, 2020, מועד ב', שאלון: 35481

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

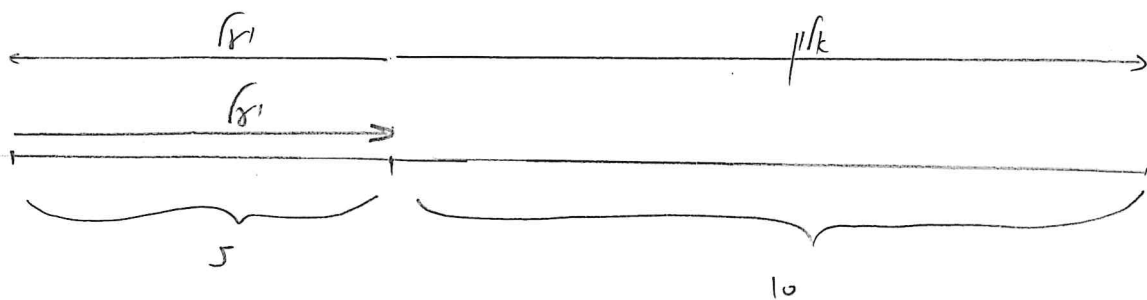
למידע על פסיכומטרי
ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. יעל ואלון השתתפו במרוץ שליחים במסלול שאורכו 15 קילומטרים סך הכול. בתחילת המרוץ עמדה יעל בנקודת ההתחלה של המסלול ואילו אלון עמד על המסלול, במרחק של 5 קילומטרים ממנה. יעל רצה במהירות קבועה של V קמ"ש עד שהיא הגיעה לאלון. מייד אחרי שהגיעה יעל לאלון, אלון התחיל לרוץ עד שהגיע לסוף המסלול ויעל חזרה לנקודת ההתחלה. אלון רץ במהירות קבועה הגדולה ב-2 קמ"ש מן המהירות ההתחלתית של יעל. יעל חזרה לנקודת ההתחלה במהירות קבועה של $\frac{5}{6}V$ קמ"ש. אלון הגיע לסוף המסלול 15 דקות אחרי שיעל הגיעה בחזרה לנקודת ההתחלה.
- א. (1) הבע באמצעות V את זמן הריצה של יעל מנקודת ההתחלה ועד שהיא הגיעה לאלון.
 (2) הבע באמצעות V את הזמן שנדרש ליעל כדי לחזור (הזמן שעבר מן הרגע שהיא פגשה את אלון ועד שחזרה לנקודת ההתחלה).
 (3) מצא את V (מצא את שתי האפשרויות).
- ב. ידוע שהמרוץ כולו (מן הרגע שיעל החלה לרוץ ועד שאלון הגיע לסוף המסלול) נמשך פחות משעתיים. איזו משתי האפשרויות שמצאת בתת-סעיף א(3) היא V ? נמק.

א. (1) t_1 זמן הריצה של יעל עד לאלון



נרכס אר היעלם מסלול:

זמן	מהירות	מרחק	יעל
t_1	V	$\frac{5}{V}$	יעל

מסלול היעל: t_1 זמן הריצה של יעל עד לאלון. $\frac{5}{V}$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



א. (2)

5	מחזור $\frac{5}{6}V$	מס $\frac{5}{\frac{5}{6}V} \rightarrow \frac{6}{V}$	זרם
10	$V+2$	$\frac{10}{V+2}$	אמפין

א. (3)

מספר מספרים

מספרים + מספרים = מספרים

$$\frac{6}{V} + \frac{15}{60} = \frac{10}{V+2}$$

$$\frac{6}{V} + \frac{1}{4} = \frac{10}{V+2}$$

מכני למספר
 $4V(V+2)$

$$24(V+2) + V(V+2) = 40V$$

$$24V + 48 + V^2 + 2V = 40V$$

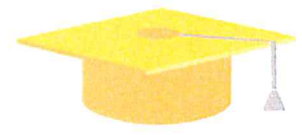
$$V^2 - 14V + 48 = 0$$

פתרון המשוואה (היולית)

$V = 6, V = 8$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



ז. הזמן הכולל של המרוץ מתבטא כ-10 ימי סוף המרוץ

טו יום לפני ספתי את אורך המרוץ (5) וזמן המרוץ לקוח

לפי אורך המרוץ, נמצא: $\frac{5}{v} + \frac{10}{v+2}$

נציב: $\frac{5}{6} + \frac{10}{6+2} = 2\frac{1}{2}$: $v=6$

המרוץ של מתבטא כי המרוץ נמשך 8 ימים לפני ספתי

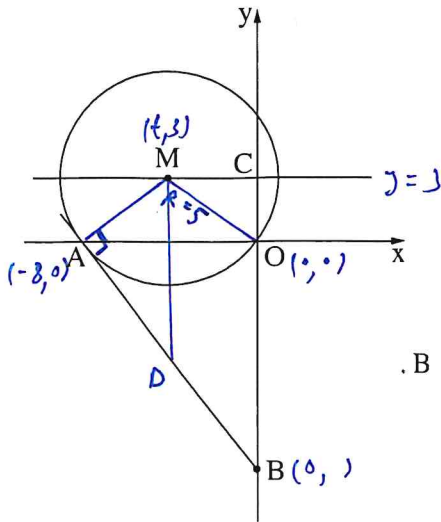
$\frac{5}{8} + \frac{10}{8+2} = 1\frac{5}{8}$: $v=8$

המרוץ של מתבטא כי המרוץ נמשך 8 ימים לפני ספתי



מתמטיקה, קיץ תש"ף, מועד ב, מס' 035481 + נספח

- 3 -



2. בציור שלפניך מתואר מעגל שמרכזו, M, נמצא ברביע השני. המעגל עובר בראשית הצירים, O, ורדיוסו הוא 5. נתון: מרכז המעגל, M, נמצא על הישר $y = 3$.
- מצא את משוואת המעגל.
 - המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה נוספת, A. מצא את שיעורי הנקודה A.
 - דרך הנקודה A העבירו משיק למעגל. המשיק הזה חותך את ציר ה- y בנקודה B. מצא את שיעורי הנקודה B.
 - הישר $y = 3$ חותך את ציר ה- y בנקודה C. מן הנקודה M העבירו ישר המקביל לציר ה- y וחותר את הישר AB בנקודה D.
 - חשב את שטח הטרפז MCBD.

פתרון

(1) מרכז המעגל נמצא על הישר $y = 3$, ולכן נוכל לכתוב: $M(t, 3)$.
 $MO = 5$ (רדיוס). נגד הניכון, $MO = \sqrt{(t-0)^2 + (3-0)^2} = 5$.

$$MO = \sqrt{(t-0)^2 + (3-0)^2}$$

$$\sqrt{(t-0)^2 + (3-0)^2} = 5 \quad | \quad ()^2$$

$$t^2 + 9 = 25$$

$$t^2 = 16$$

$$t_1 = 4$$

$$t_2 = -4$$

מרכז המעגל נמצא ב- $(-4, 3)$, ולכן נכתוב:

$$M(-4, 3)$$



נושא $r > 0$, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ (מרכז (a,b) רדיוס r)

נניח: $M(-4, 3)$, $r=5$

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 5^2$$

↓

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

$A(1, 0)$

$$(x+4)^2 + (0-3)^2 = 25$$

$$(x+4)^2 + 9 = 25$$

$$(x+4)^2 = 16$$

$$(x+4) = \pm \sqrt{16}$$

$$x+4 = \pm 4$$

↓

$$x+4 = 4$$

$$x = 0$$

↘

$$x+4 = -4$$

$$x = -8$$

$(0, 0)$ / $(1, 0)$

$A(-8, 0)$



2. נמצא את המשוואה של הישר הנשען על הנקודה A.
 הנקודה A היא נקודה (נקודה וינטק) הנמצאת במרכז הישר.
 (נקודה) M (-4, 3) - נמצאת על הישר.
 נמצא את המשוואה של הישר הנשען על הנקודה A.
 (נקודה) M (-4, 3) - נמצאת על הישר.

$$M(-4, 3); A(-8, 0)$$

$$m_{AM} = \frac{0-3}{-8-(-4)} = \frac{3}{4}$$

↓

$$m_{\perp AM} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

(אזי זני לאינני)

$$m = -1\frac{1}{3}$$

$$A(-8, 0)$$

$$y - 0 = -1\frac{1}{3}(x + 8)$$

$$y = -1\frac{1}{3}x - 10\frac{2}{3}$$



$$J = -1\frac{1}{3}x - 10\frac{2}{3}$$

$$\underline{B(0,)}$$

$$J = (-1\frac{1}{3}) \cdot 0 - 10\frac{2}{3}$$

$$J = -10\frac{2}{3}$$

$$B(0, -10\frac{2}{3})$$

נא נמצא את הערך המקסימלי של פונקציה זו.

C :

$$\begin{cases} x=0 \\ J=J \end{cases}$$



$$C(0, J)$$

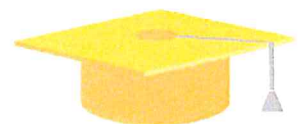
מאחר שהפונקציה היא קו ישר, נבדוק את הערכים של הפונקציה בנקודות הקודקודים של המלבט. $x = -4$.

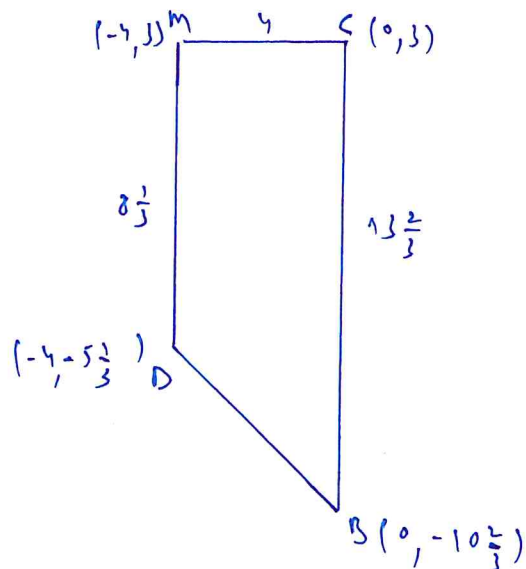
D :

$$\begin{cases} x = -4 \\ J = -1\frac{1}{3}x - 10\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\underline{J = (-1\frac{1}{3}) \cdot (-4) - 10\frac{2}{3} = -5\frac{1}{3}}$$

$$D(-4, -5\frac{1}{3})$$





$$BC = 3 - (-10 \frac{2}{3}) = 13 \frac{2}{3}$$

$$MD = 3 - (-5 \frac{1}{3}) = 8 \frac{1}{3}$$

$$MC = 0 - (-4) = 4$$

ניצוי קוסינוס (אני קרייג טאה) אופכ :

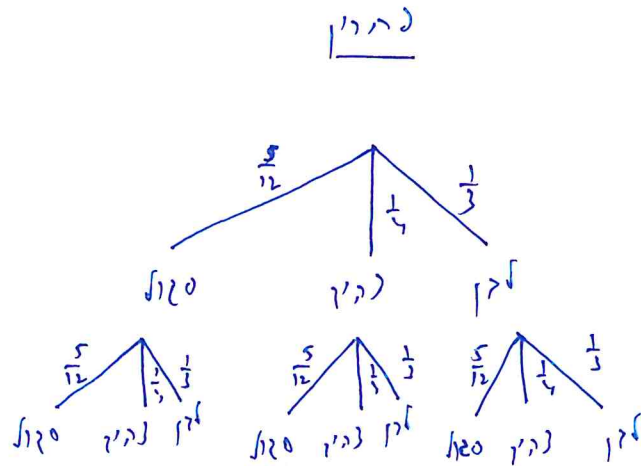
$$\int_{\text{קוסינוס}} = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$

$$\int_{MCBD} = \frac{(13 \frac{2}{3} + 8 \frac{1}{3}) \cdot 4}{2} = 44$$

ניקול :



3. בשדה פרחים גדול יש פרחים בשלושה צבעים.
 $\frac{1}{3}$ מן הפרחים לבנים, $\frac{1}{4}$ מן הפרחים צהובים וכל שאר הפרחים סגולים.
 יוסי וורד קטפו פרחים מן השדה.
 יוסי קטף שני פרחים באקראי.
- א. מהי ההסתברות ששני הפרחים שקטף יוסי היו באותו הצבע?
 ב. ידוע שיוסי קטף שני פרחים באותו הצבע.
 מהי ההסתברות ששני הפרחים צהובים?
- ורד מכינה זרים מפרחים שהיא קוטפת באקראי מן השדה. בכל זר יש 5 פרחים בדיוק.
- ג. (1) מהי ההסתברות שבזר אחד שורד מכינה יהיה לפחות פרח אחד סגול?
 (2) ורד הכינה 3 זרים. מהי ההסתברות שבכל אחד מן הזרים שהכינה יש לפחות פרח אחד סגול?



$$P(\text{לא סגול}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{72}$$



כך נוצר קוסמו לסיטי קריסה מהנה:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P\left(\begin{matrix} \text{שני} \\ \text{נבדק} \end{matrix} / \begin{matrix} \text{גילוי} \\ \text{רז} \end{matrix}\right) = \frac{P\left(\begin{matrix} \text{שני} \\ \text{נבדק} \end{matrix} \cap \begin{matrix} \text{גילוי} \\ \text{רז} \end{matrix}\right)}{P\left(\begin{matrix} \text{גילוי} \\ \text{רז} \end{matrix}\right)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{25}{72}} = \frac{9}{50}$$

(1) נוצר קוסמו קרנולי.

	✓	✓	✓	✓	✓	
	0	1	2	3	4	5
						ניחה = $\frac{5}{12}$
	5	4	3	2	1	0
						גילוי = $\frac{7}{12}$

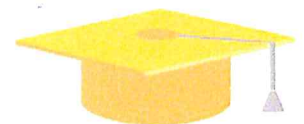
$$P\left(\begin{matrix} \text{לנהג} \\ \text{גילוי סקול} \end{matrix}\right) = 1 - \left(\frac{7}{12}\right)^5 = 0.932$$

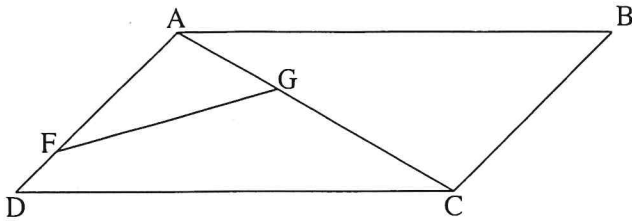
				✓	
	0	1	2	3	
					לנהג גילוי סקול = 0.932 (2)
	3	2	1	0	
					גילוי = 0.068

$$P = (0.932)^3 = 0.81$$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





4. בצויר שלפניך מתוארת המקבילית ABCD.

G היא נקודה על האלכסון AC במקבילית

ר-F היא נקודה על הצלע AD.

נתון: $\angle FGA = \angle ABC$.

א. (1) הוכח: $\triangle FGA \sim \triangle ABC$.

(2) הוכח: $AF \cdot DC = FG \cdot AC$.

נתון כי שטח המשולש ABC הוא 20, וכי שטח המשולש FGA הוא 5.

ב. חשב את היחס $\frac{AF}{AC}$.

נתון: $FG \parallel DB$,

אלכסוני המקבילית נחתכים בנקודה H.

ג. הוכח: $\triangle ABC \sim \triangle BHC$.

נימוק	טענה
נתון	$\angle FGA = \angle ABC$ (5) (1)
בצורה שלפנינו מקבילים	$AD \parallel BC$ (2)
מקבילים כן אלו	$\angle FAG = \angle BCA$ (5) (3)
אזורים מתחלפים קווים מקבילים (אני 2)	\Downarrow
משפט זוויות 5.5 (אני 1, 3)	$\triangle FGA \sim \triangle ABC$ (4)
משל' (1)	$\frac{FG}{AB} = \frac{GA}{BC} = \frac{FA}{AC}$ (5)
זהו (המשולש) הנתון	
בזווית (אני 4)	



נימוק	מציג
	$\frac{FG}{AB} = \frac{FA}{AC}$ (6)
	$FG \cdot AC = FA \cdot AB$ (7)
$AB = CD$	(8)
$AF \cdot DC = FG \cdot AC$	(9)
$S_{\Delta ABC} = 20$	(10)
$S_{DFGA} = 5$	(11)
$\frac{S_{DFGA}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{AF}{AC}\right)^2$	(12)
$\frac{5}{20} = \left(\frac{AF}{AC}\right)^2$	(13)
$\left(\frac{AF}{AC}\right)^2 = \frac{1}{4}$	(14)
$\frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}$	(15)

AB שווה ל-CD

הצדדים 8 ו-7

הצדדים (2)

הצדדים

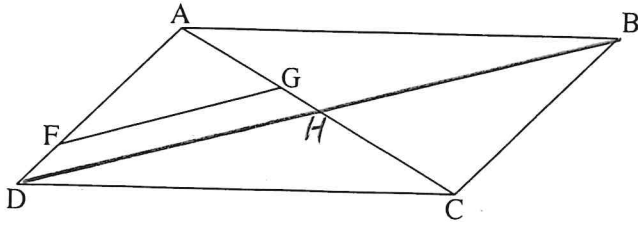
הצדדים

יש להשתמש בנתונים
הנתונים הם קצוות.

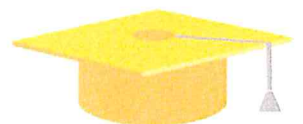
הנתונים (10, 11, 12)

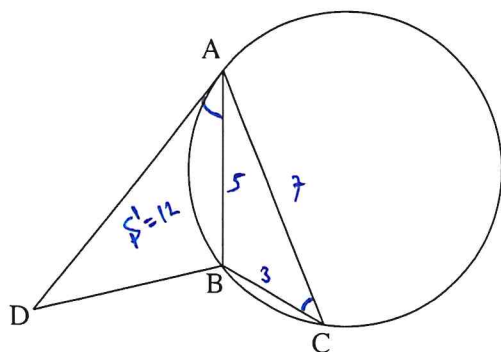
הצדדים $\frac{1}{2}$





נימוק	טענה
כיוון שגובה	$\angle ACB = \angle BCH$ (5) (16)
נתון	$FG \parallel DB$ (17)
כיוון שגובה שם 15/15	$\angle AHD = \angle AGF$ (18)
כיוון שגובה שם 15/15	$\angle BHC = \angle AHD$ (19)
כל הנתונים (17, 18, 19)	$\angle BHC = \angle ABC$ (5) (20)
לכן צדדים S-S	$\triangle ABC \sim \triangle BHC$
לכן	





5. המשולש ABC חסום במעגל (ראה ציור).

נתון: $AB = 5$, $BC = 3$, $AC = 7$.

א. (1) מצא את גודל הזווית ACB.

(2) מצא את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC.

בנקודה A העבירו משיק למעגל.

הנקודה D נמצאת על המשיק כך ששטח המשולש DBA הוא 12.

ב. מצא את אורך הצלע AD.

ג. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש DBA

ובין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC.

פתרון

(1) (2)

ΔABC :

נוגדני קטלני היקוטיים:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

↓

$$5^2 = 7^2 + 3^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot \cos \alpha$$

$$25 = 49 + 9 - 42 \cos \alpha$$

$$42 \cos \alpha = 33 \quad | : 42$$

$$\cos \alpha = \frac{33}{42}$$

↓

$$\alpha = 38.21^\circ$$



(2) (158 > 90) הסינוס:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R$$



$$\frac{5}{\sin 38.21^\circ} = 2R$$

$$2R = 8.082 \quad | :2$$

$$R = 4.042$$

$$\angle OAB = \angle ACB = 38.21^\circ \quad (2)$$

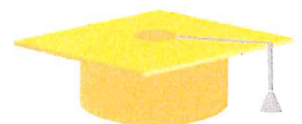
(צווה בין משך למרכז שווה לצווה בהיקפה הנגדה של
ואם ה- (נל) טעין (משך למרכז)

ניצו בניסיון ליישם טל-משולש ל- נא לה- הצווה טעין.

$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$$



$$S_{\Delta OBA} = \frac{AB \cdot AO \cdot \sin \angle OAB}{2}$$



נציג את הנתונים:

$$12 = \frac{5 \cdot AD \cdot \sin 38.2^\circ}{2}$$

$$\frac{2 \cdot 12}{5} = \frac{1 \cdot \sin 38.2^\circ \cdot AD}{1} \quad | \cdot 5$$

$$24 = 3.09 \cdot AD \quad | : 3.09$$

$$AD = 7.76$$

אם נישאר בגובה התיאטרון אז נגדל את BD.

DAO:

$$BD^2 = 5^2 + 7.76^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7.76 \cdot \cos 38.2^\circ$$

$$BD^2 = 24.24$$

$$BD = \sqrt{24.24}$$

$$BD = 4.92$$

נישאר בגובה התיאטרון אז נגדל את BD. (החוסק את DDBA)



$$\frac{4.923}{\sin 38.21} = 2R$$

↓

$$\frac{4.923}{\sin 38.21} = 2R$$

$$2R = 7.959 / : 2$$

$$R = 3.98$$

$$\frac{\text{רניע ו.הצקן ג.חוסק זק ד.ד.ב.א}}{\text{ר.ג.ויס ו.הצקן ג.חוסק זק ד.א.ב.צ}} = \frac{3.98}{4.042} = 0.985$$

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1} + 2$

- א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
- (2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
- (3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- (4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
- (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

בסוף השאלה מסורטטים ארבעה גרפים (I-IV). אחד מהם הוא גרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$.

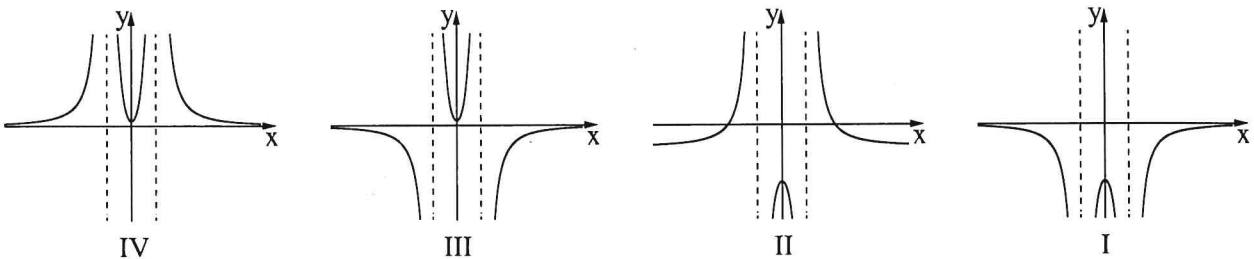
ב. איזה מן הגרפים IV-I הוא גרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$? נמק.

ג. $a > 3$ הוא פרמטר.

השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי הישרים $x = 3$ ו- $x = a$ ועל ידי ציר ה- x

שווה ל-0.5.

מצא את a .



פיתרון:

א. (1) נדרוש: מתנה שלילית מאסס: $x^2 - 1 \neq 0$

$x^2 \neq 1$ / $\sqrt{\quad}$

$x \neq \pm 1$

תחום ההגדרה: $x \neq 1$ ו- $x \neq -1$

המשק פתוח...

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



(2) אסימטוטות מאונכות לבניה x (אנכיות):

מתחום היקברת: $x=1$ או $x=-1$

ערכי x אלו מאפסים את המונה אך לא את המונה.

אסימטוטות מאונכות לבניה y (אופקיות):

נציג את הביטוי האלקברי של הפונקציה כק:

$$f(x) = \frac{3x}{x^2-1} + 2 = \frac{2x^2+3x-2}{x^2-1}$$

מעריך המצדק היקברת קצוב לזוג של x במונה שנה למעריך המצדק היקברת קצוב לזוג של x במונה עין האסימטוטה היא מנה המקדמים של x^2

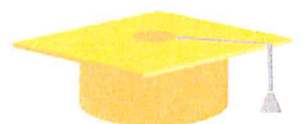
במנה חלקי זה למחנה:

$$y = \frac{2}{1} = 2$$

צדק אחרת: הביטוי $\frac{3x}{x^2-1}$ שואף לאפס עבור ערכי x השואפים למינוס אינסוף או לאינסוף. ותוספת של 2 יחידות מהווה יצג אנכי (קציר y) של 2 יחידות כלפי מעלה.

$$y = 0 + 2 = 2$$

עין



(3) חיתוך עם ציר x $(y=0)$:

$$f(x) = 0$$

$$\frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 1} = 0 \quad / \cdot (x^2 - 1)$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

סימנים: ישנן שני פתרונות:

$$x = -2 \quad \text{או} \quad x = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{(-2, 0)}$$

או

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}, 0\right)}$$

לפיכך:

חיתוך עם ציר y $(x=0)$:

$$f(0) = \frac{3 \cdot 0}{0^2 - 1} + 2 = 2$$

$$\boxed{(0, 2)}$$



(4) תמוצי עליה וריצה של f :

$$f(x) = \frac{3x}{x^2-1} + 2 \quad \text{נעציה:}$$

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (x^2-1) - 3x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-3x^2-3}{(x^2-1)^2}$$

נשווה אג הנעציה לאפס:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-3x^2-3}{(x^2-1)^2} = 0 \quad \Bigg/ \cdot (x^2-1)^2$$

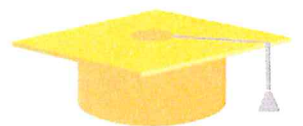
$$-3x^2-3 = 0 \quad \Bigg/ +3x^2$$

$$3x^2 = -3 \quad \Bigg/ :3$$

$$x^2 = -1$$

אין פתרון ממשי.

לכאן אין מאפסי ממשי עבונ, ונעציה
באנה גבא נתיג באבלה...



x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f(x)$			
$\text{sign}(f'(x))$	-	-	-
ייתכן/ייתכן עליו/ייתכן			

זוילויקים סקור האבלה:

$$f'(-2) = \frac{-3(-2)^2 - 3}{((-2)^2 - 1)^2} < 0$$

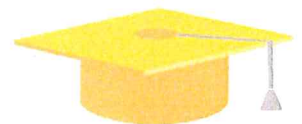
$$f'(0) = \frac{-3 \cdot 0^2 - 3}{(0^2 - 1)^2} < 0$$

$$f'(2) = \frac{-3 \cdot 2^2 - 3}{(2^2 - 1)^2} < 0$$

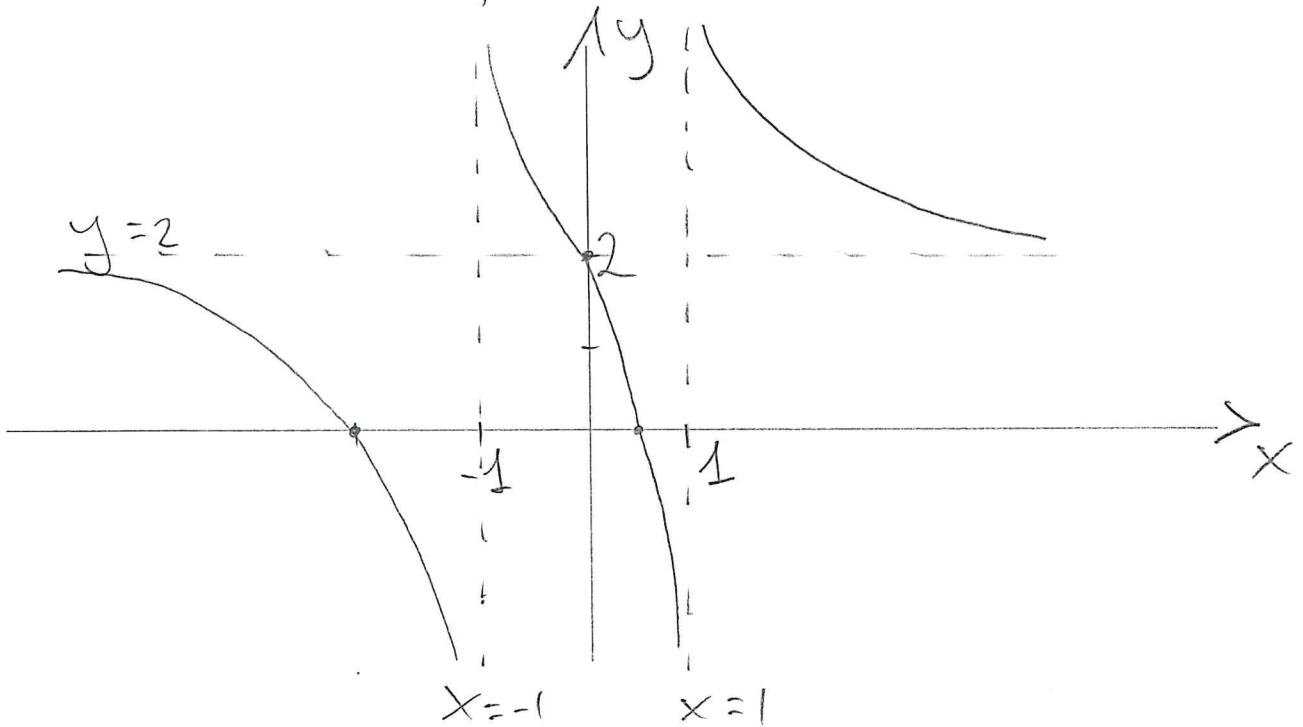
האבלה:
תמונת הייבשה של הפונקציה f :

$x < -1$ או $-1 < x < 1$ או $x > 1$

תמונת הייבשה של הפונקציה f : אין.



(5) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$:

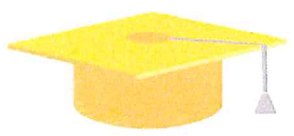


סעיף ג'

הפונקציה $f(x)$ יורדת בכל מחזור יקבירי.
 הנגזרת מתאנו כי אין מאפסי ממשיים ל- $f'(x)$.
 חק נוכל לסיק כי ערכי הפונקציה הנצריה $f(x)$
 שליליים בכל מחזור יקבירי (יזכה למחזור היקבירי

של $f(x)$.)

יגיל הימיה הסני את בנישה זי הוא גיל מס' I.
 מסן גיל מס' I הוא גיל הפונקציה הנצריה $f'(x)$.



גיל מס' II נספג כ קיימים בו ארכים

בהם יגיל מספג קיר ה-א - כלומר ארכים
חוקיים של הנצרה -

גיל מס' III נספג כ קיימים בו ארכים

בהם יגיל מספג קיר ה-א - כלומר ארכים
חוקיים של הנצרה -

גיל מס' IV נספג כ קיימים בו ארכים

בהם יגיל מספג קיר ה-א - כלומר ארכים
חוקיים של הנצרה -



ג. $a < 3$ (א פיתור).

נשתמש באינטגרל המסוים ככדי להגיע
אל השלם הברוט (נשים לב כי מסעיפי
החירה הקופאים, גרל הפוכה) ואז נמצא
כולו מתחל לבניו $(x-a)$:

$$\int_3^a (0 - f'(x)) dx = [-f(x)]_3^a =$$

$$= -f(a) + f(3) =$$

$$= -\left(\frac{3a}{a^2-1} + 2\right) + \frac{3 \cdot 3}{3^2-1} + 2 =$$

$$= \frac{9}{8} - \frac{3a}{a^2-1}$$

נשנה ביטוי זה לשלם הנקרא 0.5

השלם המילואי כשהוא גבוה

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



$$\frac{9}{8} - \frac{3a}{a^2-1} = 0.5$$

$$\frac{3a}{a^2-1} = \frac{5}{8} \quad / \cdot 8 \cdot (a^2-1)$$

$$24a = 5a^2 - 5$$

$$5a^2 - 24a - 5 = 0$$

סימיון - המשואה הריק/צ'ר הם :

$$a \neq \frac{1}{5} \quad \text{או} \quad \boxed{a=5}$$

נסו
כי ניתן $3 < a$



7. נתונה הפונקציה $f(x) = -2x \cdot \sqrt{-x^2 + 8}$.

- א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
- (2) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .
- (3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ג. עבור אילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בדיוק בשתי נקודות?
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $-f(x)$.

פתרון:

א. (1) נדרוש:

ביטוי ממשי מתחת לשורש מספר שלילי - אי-אפשר:

$$0 \leq -x^2 + 8$$

נמצא את אי-השוויון הריבועי שהקבל:

$$-x^2 + 8 = 0 \quad \text{מאפסים:}$$

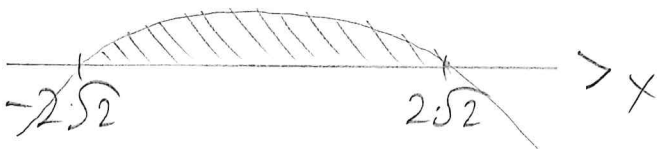
$$x^2 = 8 / \sqrt{\quad}$$

$$x_{1/2} = \pm 2\sqrt{2}$$

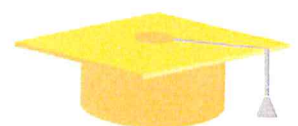
"נראה" של ציר x :

(התיקונים של x^2 שלילי).

תחום היגדרה של הפונקציה $f(x)$:



$$\boxed{-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}}$$



(2) חייץ עם ציר y $(x=0)$:

$$f(0) = -2 \cdot 0 \cdot \sqrt{-0^2 + 8} = 0$$

נקודה חייץ הפונקציה $f(x)$
 עם ציר y:

(הינאטי) $(0, 0)$

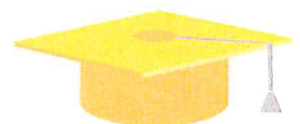
(3) נגזר:

$$f(x) = -2x \cdot \sqrt{-x^2 + 8}$$

$$f'(x) = -2 \cdot \sqrt{-x^2 + 8} - 2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{-x^2 + 8}} =$$

$$= \frac{-2 \cdot (-x^2 + 8) + 2x^2}{\sqrt{-x^2 + 8}} = \frac{4x^2 - 16}{\sqrt{-x^2 + 8}} = \frac{4(x^2 - 4)}{\sqrt{-x^2 + 8}}$$

... נשנה לאפס



$$f'(x) = 0$$

$$\frac{4 \cdot (x^2 - 4)}{\sqrt{-x^2 + 8}} = 0 \quad / \cdot \frac{\sqrt{-x^2 + 8}}{4}$$

$$x^2 - 4 = 0 \quad / +4$$

$$x^2 = 4 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$x_{1/2} = \pm 2$$

נציג טבלה:

x	$-2\sqrt{2}$	$-2 < x < -2$	-2	0	2	$2 < x < 2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$
f(x)							
Sign(f'(x))		+	0	-	0	+	
התנהגות f(x) עלייה/ירידה							

חישובים עבור הטבלה:

$$f'(-2.5) = \frac{4 \cdot (\frac{25}{4} - 4)}{\sqrt{-\frac{25}{4} + 8}} > 0$$

$$f'(0) = \frac{4 \cdot (0^2 - 4)}{\sqrt{-0^2 + 8}} < 0$$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



$$f'(2.5) = \frac{4 \cdot \left(\frac{25}{4} - 4\right)}{\sqrt{-\frac{25}{4} + 8}} > 0$$

שיעור ה-y של נקודת הקיצון הסנימלי:

$$f(-2) = -2 \cdot (-2) \cdot \sqrt{-(-2)^2 + 8} = 8$$

$$f(2) = -2 \cdot 2 \cdot \sqrt{-2^2 + 8} = -8$$

שיעור ה-y של נקודת הקיצון הקצה תמוס הנקודה:

$$f(-2\sqrt{2}) = -2 \cdot (-2\sqrt{2}) \cdot 0 = 0$$

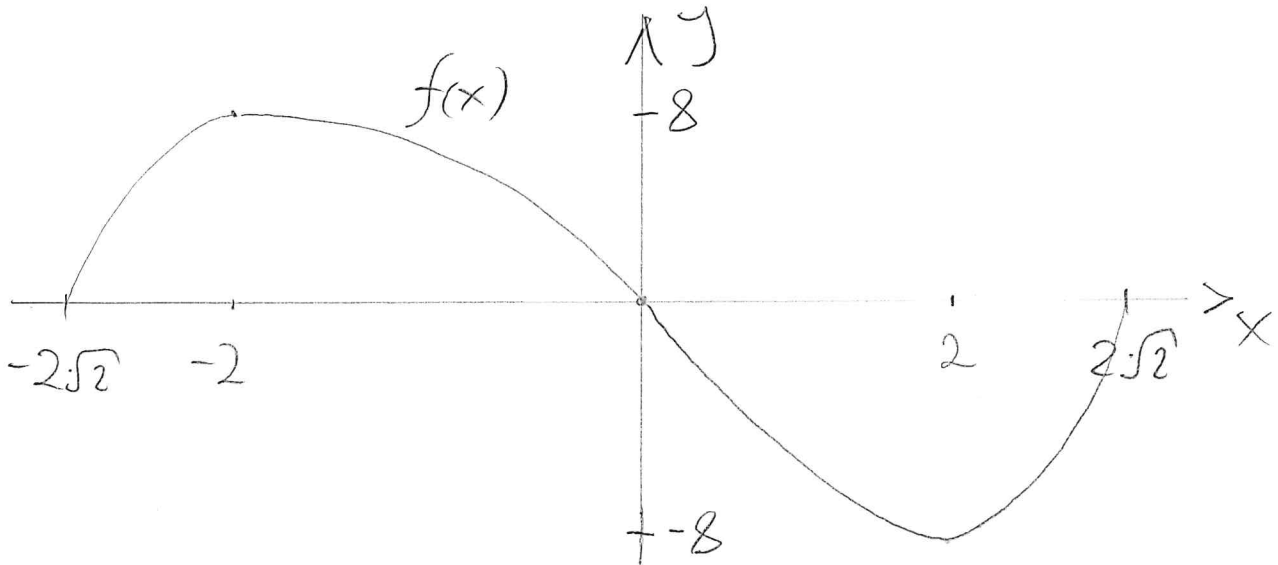
$$f(2\sqrt{2}) = -2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 0 = 0$$

נסכם:

$(-2\sqrt{2}, 0) \min$, $(-2, 8) \max$, $(2, -8) \min$, $(2\sqrt{2}, 0) \max$
 (קצה תמוס) , (קצה תמוס)



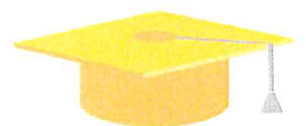
ד. סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$
עם סעיפי החקירה הקובעים:



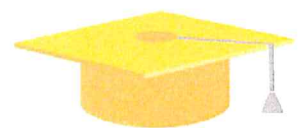
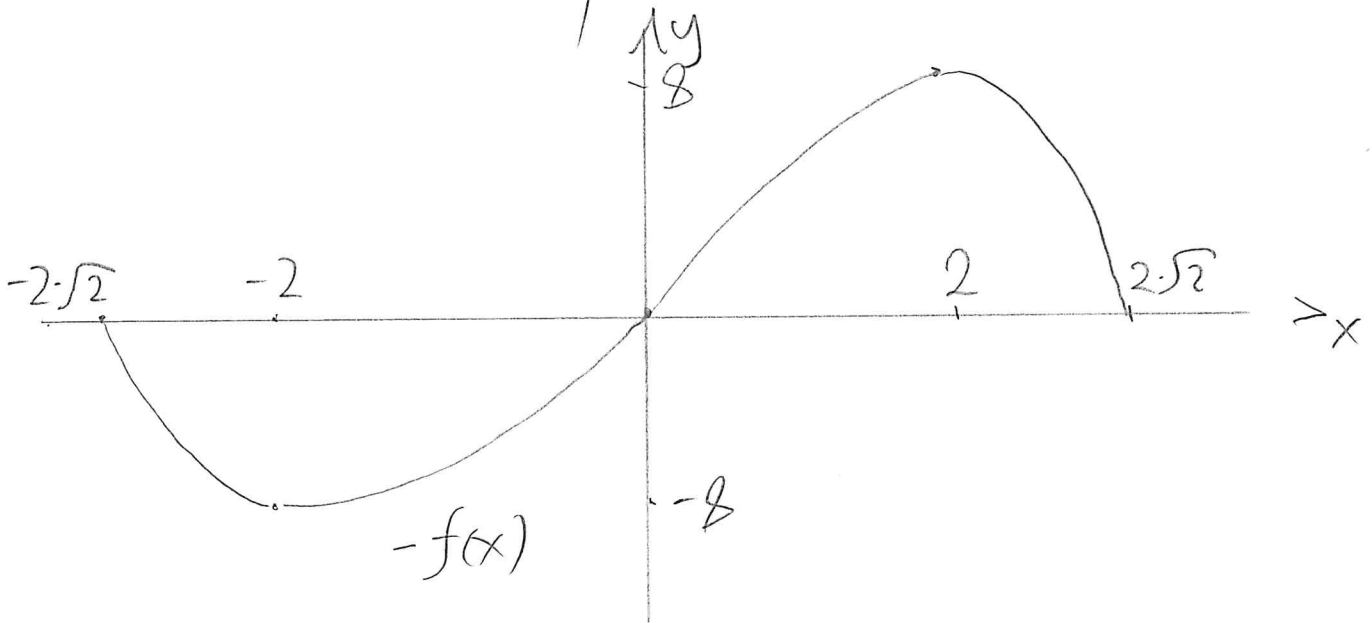
ג. פיתרון זרמי.
מסעיפי החקירה הקובעים מתאפשרת להגיד
נסק כי עבור

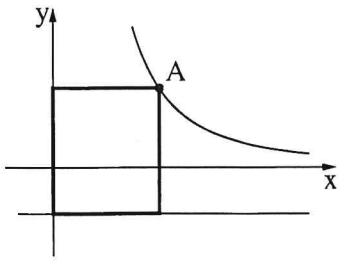
$$\boxed{-8 < a < 0 \quad \text{או} \quad 0 < a < 8}$$

הישר $y = a$ חוצה את גרף הפונקציה $f(x)$
בביתק בלבד נקודות.



ב. גרף הפונקציה $f(x)$ - מהווה שיקוף של גרף הפונקציה $f(x)$ ביחס לדירה $x - a$. לכן:





8. לפניך גרף הפונקציה $f(x) = \frac{4}{x^2}$, המוגדרת לכל $x > 0$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון.

מן הנקודה A הורידו אנכים לציר ה־y ולישר $y = -1$ כך שנוצר מלבן

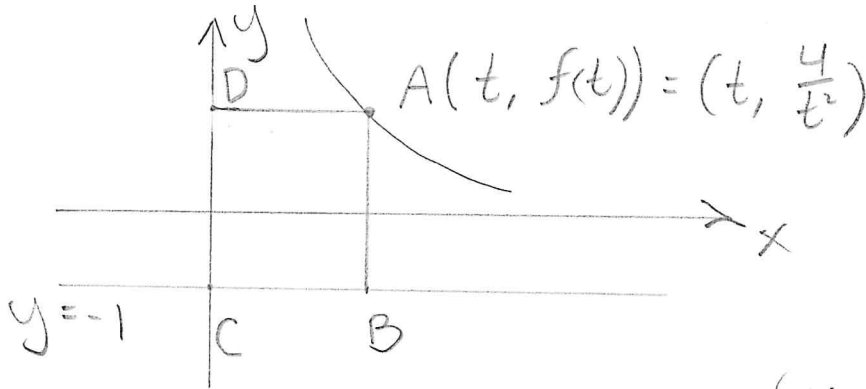
עם ציר ה־y ועם הישר $y = -1$, כמתואר בציור.

א. מה הם שיעורי הנקודה A שבעבורה שטח המלבן הוא מינימלי?

ב. האם קיימת נקודה A שבעבורה שטח המלבן הוא 3? נמק.

פתרון:
נסמן את שיעור ה־x של הנקודה A ב־t.
 $0 < x_A = t$

($t < 0$ כי נען שהנקודה A נמצאת ברביע הראשון).



שיעור ה־y של הנקודה A:

$$y_A = f(t) = \frac{4}{t^2}$$

$$A\left(t, \frac{4}{t^2}\right)$$

נבדוק אם יש שטח המלבן באמצעות t (ראו סימון קוביות בשטח)



$$AD = X_A - X_D = t - 0 = t$$

$$AB = y_A - y_B = \frac{4}{t^2} - (-1) = \frac{4}{t^2} + 1$$

שאלה המאבקין: $\infty < t$

$$S(t) = AD \cdot AB = t \cdot \left(\frac{4}{t^2} + 1\right) = \frac{4}{t} + t$$

גזירה:

$$S'(t) = -\frac{4}{t^2} + 1$$

נשווה את הנגזרת לאפס:

$$S'(t) = 0$$

$$-\frac{4}{t^2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{4}{t^2} = 1 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = 2$$

נבצע בדיקה:

t	$0 < t < 2$	$t = 2$	$t > 2$
$S(t)$			
Sign($S'(t)$)	-	0	+
התנהגות $S(t)$ (מינימום/מקסימום)		min	

קיימים מינימום מקומי... הוכחה...



$$f'(1) = -\frac{4}{1^2} + 1 = -3 < 0$$

$$f'(3) = -\frac{4}{3^2} + 1 = \frac{5}{9} > 0$$

כמו כן, נקודת המינימום של הפונקציה היא $x_A = t = 2$.
שיעור ה-y של הנקודה A במקרה זה:

$$y_A = f(t_{\min}) = f(2) = \frac{4}{2^2} = 1$$

נקודת המינימום של הפונקציה היא $A(2, 1)$.
סיווג: נקודה

נשנה את פונקציית ה- S של המלבן 3-5:

$$S(t) = 3$$

$$\frac{4}{t} + t = 3 \quad / \cdot t$$

$$4 + t^2 = 3t$$

$$t^2 - 3t + 4 = 0$$

אין פתרון ממשי למשוואה הריבועית (ועל כן בפרט אין פתרון חיובי) מסתבר: לא קיימת נקודה A שהעקומה של המלבן שווה ל-3 יחידות.

נחידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

