

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תש"פ, פ, 2020, שאלון: 35582

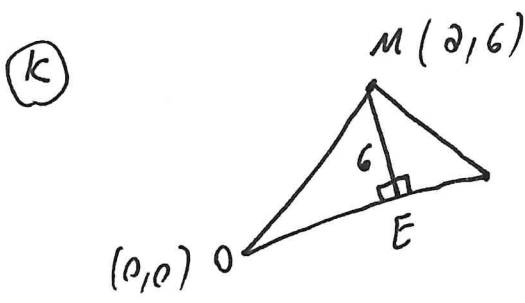
מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. OMG הוא משולש. הנקודה O היא ראשית הצירים.
- מן הנקודה $M(2, 6)$ הורידו גובה לצלע OG .
- נתון כי אורך הגובה שהורידו הוא 6.
- א. הראה כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות G המתקבלות באופן הזה נמצא על שני ישרים, ומצא את משוואותיהם של הישרים.
- מעגל שמרכזו בנקודה M משיק לשני הישרים שמצאת בסעיף א בנקודות P ו- Q .
- ב. (1) רשום את משוואת המעגל.
(2) מצא את שיעורי הנקודות P ו- Q .
- ג. האם המרובע $OPMQ$ הוא בר חסימה במעגל? נמק. אם כן, מצא את משוואת המעגל החוסם אותו.



כסוף: $G(x_1, y_1)$

כדי למצוא קשר בין x_1 ו- y_1 , נניח את $G(x_1, y_1)$

נרמק הנקודה M מהישר OG ונשווה 6-5.

נניח משוואת הישר OG

$$\frac{OG}{OG} = \frac{y_1 - 0}{x_1 - 0} = \frac{y_1}{x_1}$$

$$y - 0 = \frac{y_1}{x_1} (x - 0) \rightarrow y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x$$

$$\boxed{x_1 \cdot y - y_1 \cdot x = 0} \rightarrow \boxed{-y_1 \cdot x + x_1 \cdot y = 0}$$



נדיע את הנקודה $M(2,6)$ הנקודה
 והישר $0 = x + y - 6$ את הנקודה $J-6$.

$$6 = \frac{|1 \cdot 2 + x_1 \cdot 6|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}}$$

$$36(x_1^2 + y_1^2) = (6x_1 - y_1)^2$$

$$36y_1^2 + 36x_1^2 = 36x_1^2 - 12x_1y_1 + y_1^2$$

$$32y^2 + 12xy = 0$$

$$y(32y + 12x) = 0$$

$$y = 0$$

$$\text{או } 32y + 12x = 0$$

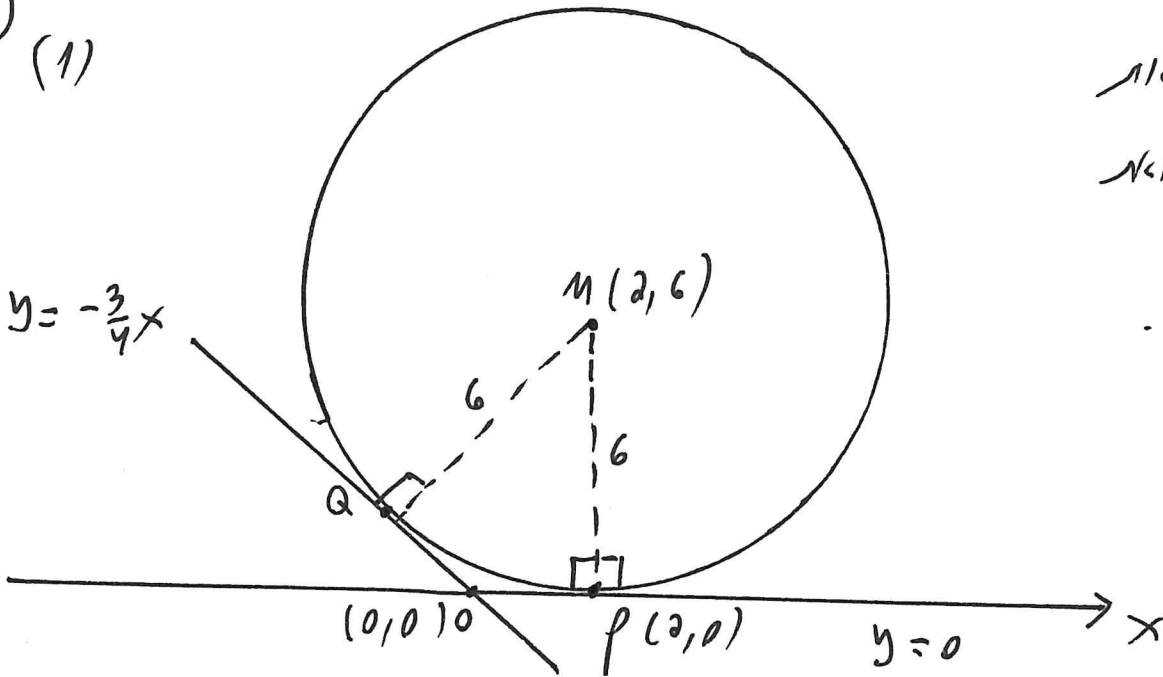
$$32y = -12x$$

$$y = -\frac{3}{8}x$$

הנקודות הנמצאות על הישר הנ"ל.



7
(1)

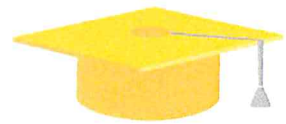


בטורט אור
המעט ואל
היטריס
לחצוא.

כדי לחצוא אל מלוא המעט כציון עגור
המעט, $M(2, 6)$ וציון Q אל M .
ציון עוואל $P(2, 0)$, עין הציון הוא 6.

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 = 36$$

(2) $P(2, 0)$ הציון קולו. Q הציון קולו.
הציון מאלן ערציוס הצויר הציון קולו.
 $\frac{4}{3} =$ שיוע אלן



שאלה שני

$$y - 6 = \frac{4}{3}(x - 2)$$

$$y - 6 = \frac{4}{3}x - 2\frac{2}{3}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}}$$

נקודת Q, חיתוך ישרים

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x \\ y = \frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$-\frac{3}{4}x = \frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$$

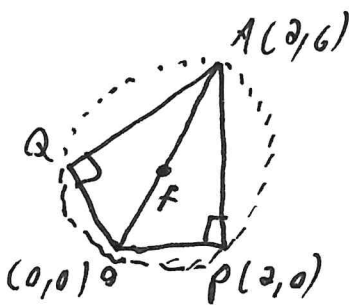
$$x = -1\frac{2}{5}, y = 1\frac{1}{5}$$

$$\boxed{Q(-1\frac{2}{5}, 1\frac{1}{5})}$$

2) (1) גורמים ΔQPM סכום כל מיתרים (גזירה)

$$\angle P + \angle Q = 180^\circ \quad \therefore 180^\circ - \alpha$$

סכום זוויות דמיונית הוא 360° , וכן $\angle M + \angle O = 180^\circ$



גודל זווית המעגל החוסם.

AO הוא הקוטר. נמצא F נקודת אמצע

AO. נקודת F(1,3), $R = OF = \sqrt{10}$

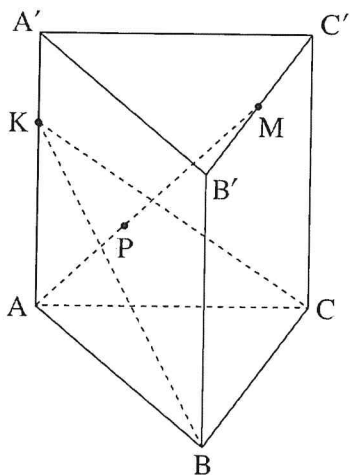
$$\boxed{(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10}$$

שאלה
המעגל הוא:



מתמטיקה, קיץ תש"ף, מס' 035582 + נספח

- 3 -



2. נתונה מנסרה ישרה משולשת $ABCA'B'C'$.
 נתון: הנקודה M היא אמצע הקטע $B'C'$.
 הנקודה K נמצאת על הקטע AA' ומקיימת $AK = 2KA'$.
 נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{KC} = \underline{v}$, $\vec{KB} = \underline{u}$.
 א. הבע את \vec{AM} באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} .
 B. מצא את α ו- β .
 P היא נקודה על AM המקיימת: $\vec{KP} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v}$ (α ו- β הם סקלרים).
 ג. מצא את α ו- β .

- נתון: $\underline{v} = (10, -5, 0)$, $\underline{u} = (5, 5, -5)$, $P(0, 4, 6)$.
 ג. (1) הסבר מדוע הנקודה P נמצאת על המישור KBC.
 (2) מצא את משוואת המישור KBC.
 (3) מצא את שיעורי הנקודה K.

Handwritten signature

$$\begin{aligned} \vec{AM} &= \vec{AK} + \vec{KB} + \vec{BB'} + \vec{B'M} \\ &= \frac{2}{3}\underline{w} + \underline{u} + \underline{w} + \frac{1}{2}\vec{B'C'} \\ &= \frac{5}{3}\underline{w} + \underline{u} + \frac{1}{2}(\vec{BC}) \\ &= \frac{5}{3}\underline{w} + \underline{u} + \frac{1}{2}(\vec{BK} + \vec{KC}) \\ &= \frac{5}{3}\underline{w} + \underline{u} + \frac{1}{2}(-\underline{u} + \underline{v}) \\ &= \boxed{\frac{5}{3}\underline{w} + \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}} \end{aligned}$$

.lc



ב. נתון: $\vec{K}P = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v}$

(גילוי) $\vec{K}P > 0$ (אם):

$$\vec{K}P = K\vec{A} + A\vec{P} = -\frac{2}{3}\underline{u} + t \cdot A\vec{M}$$

$$\vec{K}P = -\frac{2}{3}\underline{u} + \frac{5t}{3}\underline{u} + \frac{t}{2}\underline{u} + \frac{t}{2}\underline{v}$$

כך (פרוש ומיפה) ה (אם) איתנו: $\vec{K}P$

$$\alpha \underline{u} + \beta \underline{v} = \frac{5t-2}{3}\underline{u} + \frac{t}{2}\underline{u} + \frac{t}{2}\underline{v}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{t}{2} \\ \beta = \frac{t}{2} \\ 0 = \frac{5t-2}{3} \end{array} \right.$$

$$t = \frac{2}{5}$$

$$\boxed{\alpha = \beta = \frac{1}{5}}$$



ד. (1) (1) (1) : $P(0, 4, 6)$

$Q = (5, 5, -5)$

$R = (10, -5, 0)$

הנקודה P נמצאת על הגישה ABC

משום שהוקטור \vec{PQ} הוא דו-מינלי
 איננו כיוון של \vec{AB} או \vec{AC} , והנקודה
 K נמצאת על הגישה.

(2) הנקודה ברמת-הים של גישה ABC:

$X = (0, 4, 6) + t(1, 1, -1) + s(2, -1, 0)$

עבור זוויות:

$(a, b, c) \cdot (1, 1, -1) = 0$

$(a, b, c) \cdot (2, -1, 0) = 0$

||

$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = 3a \end{cases}$



נתון: $a=1$ ונדרש:

$$b=2, c=3$$

נאמר: $x + 2y + 3z + d = 0$

נרצה להחזיק נקודה P :

$$0 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + d = 0 \Rightarrow d = -26$$

משוואת המישור היא:

$$x + 2y + 3z - 26 = 0$$

(3) נשתמש בתוואי מסתמים:

$$\vec{r} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

$$P - K = \frac{7}{5}(5, 5, -5) + \frac{7}{5}(19, -5, 0)$$

$$(0, 4, 0) - (x, y, z) = (7, 7, -7) + (2, -7, 0)$$

אסימטר:

$$x = -3$$

$$y = 4$$

$$z = 7$$

$$K(-3, 4, 7)$$



3. z_1 ו- z_2 הם שני מספרים מרוכבים שונים.

נתון: $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $z_2 = \cos \frac{7\alpha}{3} + i \sin \frac{7\alpha}{3}$,

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi,$$

$\frac{z_1}{z_2}$ הוא מספר ממשי.

א. (1) מצא את α ואת $\frac{z_1}{z_2}$.

(2) הראה כי $z_1 \cdot z_2$ הוא מספר מדומה.

נתון: $w = \frac{z_1}{z_2} + z_1 \cdot z_2$.

ב. מצא את כל פתרונות המשוואה $z^3 = w^6$.

ג. (1) האם הפתרונות שמצאת בסעיף ב יכולים להתאים לקודקודים של משושה משוכלל במישור גאוס?

אם כן, מצא את שיעוריהם של שאר קודקודי המשושה.

(2) תן דוגמה למספר טבעי $n > 6$ שבעבורו הפתרונות שמצאת בסעיף ב מהווים קודקודים של מצולע משוכלל

בעל n קודקודים.

פתרון:
1. c

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\text{cis } \alpha}{\text{cis } \frac{7\alpha}{3}} = \text{cis} \left(-\frac{4}{3}\alpha\right)$$

נתון כי הביטוי $\frac{z_1}{z_2}$ ממשי, כלומר:

$$\sin \left(-\frac{4}{3}\alpha\right) = 0$$

||

$$-\frac{4}{3}\alpha = \pi k$$

$$\alpha = -\frac{3}{4}\pi k$$

במחצית הנמוכה, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ נקבל $\alpha = \frac{3}{4}\pi$



(3) אן אן

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\cos \frac{4}{3} \alpha = \cos (\pi) \right) = \boxed{-1}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \left(\cos \frac{3}{4} \pi \right) \cdot \left(\cos \frac{7}{4} \pi \right) = \left(\cos \frac{10}{4} \pi \right) \quad (2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \left(\cos \frac{\pi}{2} \right) = \boxed{i}$$

הנכפלה נכונה.

$$w = \frac{z_1}{z_2} + z_1 \cdot z_2 = -1 + i \quad . \quad ?$$

נעבוד על השאלה הקטנה:

$$w = -1 + i = \sqrt{2} \cos 135^\circ$$

$$w^6 = \left(\sqrt{2} \cos 135^\circ \right)^6 = 8 \cos 810^\circ$$

$$w^6 = 8 \cos 90^\circ = 8 \cos \frac{\pi}{2}$$

, (כי בלשונות ו/או במחור):

$$z^3 = w^6 = 8 \cos \frac{\pi}{2}$$

נולציה שורט טאיי:



$$z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$$

$$z_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$$

$$z_3 = 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$$

d. (1) הפונקציה יכולה להיות זקוקה לזווית של משוואה שיש לה שני צדדים שיש להם את אותו המודולוס. נראה וזה פה הוא המודולוס שלהם שווה. הקדקדוקים הם סה"כ 3, כי כן, אלא שיש להם את אותו המודולוס וזוהי הפונקציה.

$$2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = (0, 2)$$

$$2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6} = (-\sqrt{3}, -1)$$

$$2 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{6} = (\sqrt{3}, -1)$$

(2) אם יש לנו $n=9$, $n=12$, $n=11$ כל אחד מהם סה"כ של n שהיה כפולה שלהם של 3.



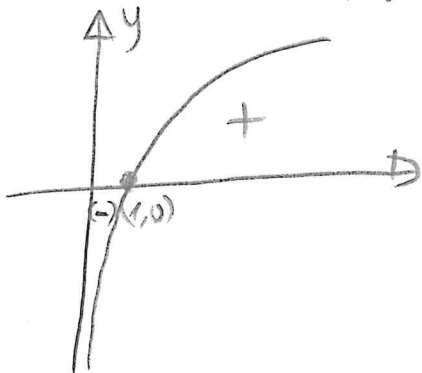
4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln((e^x - b)^2 + 1)$. b הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות b .

- א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
 - (2) נמק מדוע $f(x) \geq 0$ בכל תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 - (3) מצא את המשוואה של האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.
 - (4) קבע בעבור אילו ערכים של b יש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון, ואם יש כזאת, מצא את שיעורה, והראה שהיא נקודת מינימום.
 - (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ עבור $b = 2$.
- ב. מצא את כל הערכים של b שבעבורם הישר $y = \ln 5$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$. נמק.
- ג. נתון כי בעבור אחד מן הערכים של b שמצאת בסעיף ב, אין לפונקציה $f(x)$ נקודות קיצון. בעבור הערך הזה של b , קבע אם הפונקציה $f(x)$ עולה או יורדת. נמק.

א (1) ג.ה.ש. $f(x)$ הוא כל x לאחר $1 - (e^x - b)^2$ הוא ביטוי אי-שלילי וכתוספת 1 , הארזומנט של פונקציה - \ln חיובי אמיר.

(2) כמו שראינו בסעיף הקודם, הארזומנט של פונקציה \ln - \ln צריך או שווה לאחת וכיבוד פונקציה \ln שהארזומנט שלה גדול לאחת חיובי אמיר, וכאשר הארזומנט שווה לאחת פונקציה \ln שווה לאחת. גמבורג: פונקציה $y = \ln(x)$ נראית כק:



$f(\infty) = \ln((e^{\infty}-b)^2+1) = \ln(\infty) = \infty$ (3) א
אין אופקית כאשר $x \rightarrow \infty$

$f(-\infty) = \ln((e^{-\infty}-b)^2+1) = \ln((-b)^2+1) = \ln(b^2+1)$
 $y = \ln(b^2+1)$ - קו אופקית יש כאשר $x \rightarrow -\infty$

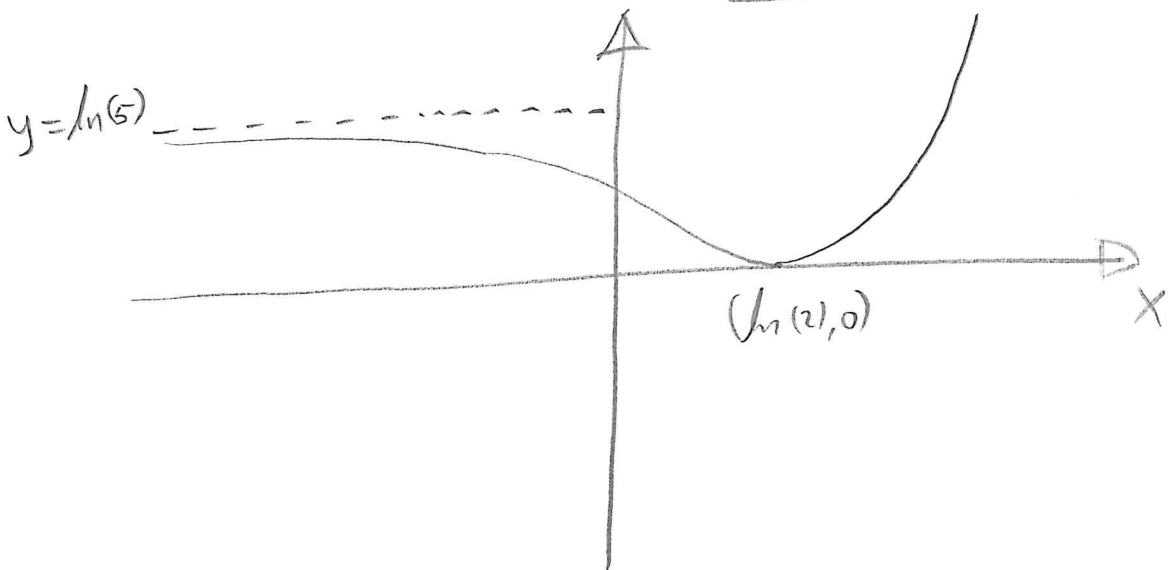
$f'(x) = \frac{2(e^x-b) \cdot e^x}{(e^x-b)^2+1} = 0 \rightarrow e^x-b=0 \rightarrow e^x=b$ (4) א
 $x = \ln(b)$

אם $b > 0$ נאמר $\ln(0.5b)$ ורק $\ln(2b)$

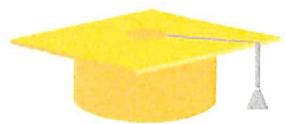
x	$x < \ln(0.5b)$	$\ln(b)$	$x > \ln(2b)$
$f'(x)$	(-)	0	(+)
$f(x)$	↘	min	↗

יש נקודה $e^x=b$ ויש נקודה $e^x=b$

$f'(\ln(0.5b)) = e^{\ln(0.5b)} - b = -\frac{1}{2}b = (-)$
 $f'(\ln(2b)) = e^{\ln(2b)} - b = b = (+)$
 $f(\ln(b)) = \ln((e^{\ln(b)}-b)^2+1) = \ln(1) = 0$
 $\min(\ln(b), 0)$



(5) א



2. האסימטה האופקית היא $y = \ln(b^2 + 1)$
 עבור $b = \pm 2$ האופקית נמצאת ב- $y = \ln(5)$?
 עבור $b = -2$ אין קיצון מסוג נאחר (הגנאי)
 קיצון יהיה $b > 0$.
 כאשר $b = -2$ הפונקציה נמצאת וכל רכיבי

הנצורה חיוביים.
 גזירה: הנצורה היא

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x - b)}{(e^x - b)^2 + 1}$$

- # המכנה חיובי תמיד. (הוסדר בסעיף א)
- # $2e^x$ חיובי תמיד מאחר ומדובר בגנאי גנאי בעל מקדם חיובי
- # $e^x - b$ חיובי כאשר $b < 0$ מאחר ומדובר בגנאי גנאי + קבוצת חיובי.

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



מתמטיקה, קיץ תש"ף, מס' 035582 + נספח

- 5 -

5. נתונה הפונקציה $f(x) = e^x(x - 5)$, המוגדרת לכל x .
- א. הראה כי $f'(x) = e^x(x - 4)$ וכי $f''(x) = e^x(x - 3)$.
 - ב. מצא את $f'''(x)$, והראה כי החוקיות הנתונה מתקיימת בעבורה. ענה על סעיף ג. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות n .
 - ג. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f^{(n)}(x)$ עם הצירים.
 (2) מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f^{(n)}(x)$.
 (3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f^{(n)}(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.
 (4) הראה כי הגרפים של הפונקציות $f^{(m)}(x)$ ו- $f^{(k)}(x)$ אינם נחתכים בעבור שני מספרים טבעיים שונים m ו- k .
 - (5) סרטט על מערכת צירים אחת סקיצה של הגרפים של הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$, ו- $f''(x)$, וכתוב איזה מן הגרפים מתאים לכל אחת מן הפונקציות.
 - ד. הסתמך על החוקיות הנתונה, ומצא לפונקציה $f(x)$ פונקציה קדומה, $F(x)$, אם נתון כי הגרף של הפונקציה $F(x)$ עובר בראשית הצירים. אמת את תשובתך על ידי גזירה.

פתרון:
א. $f'(x) = e^x(x-5) + e^x \cdot 1 = e^x(x-4)$

$f''(x) = e^x(x-4) + e^x \cdot 1 = e^x(x-3)$

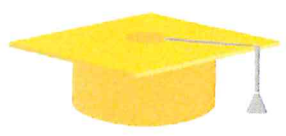
$f'''(x) = e^x(x-3) + e^x \cdot 1 = e^x(x-2)$

$f^{(3)}(x) = e^x(x-5+3) = e^x(x-2)$

הביטויים של $f^{(n)}$ כוללים את החוקיות $f^{(n)}(x) = e^x(x-5+n)$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



$x=0 \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0(0-5+n) = n-5$ (1) ציר y

$(0, n-5)$

$y=0 \Rightarrow e^x(x-5+n)=0$

ציר x

$x=5-n$

$(5-n, 0)$

(2) האסימטוטה מתקיימת בשלילי

$y=0$ לא ניתן אינפוז (היא)

$(f^{(n)}(x))' = e^x(x-4+n)$

(3) נגזרת

$e^x(x-4+n)=0$

$x=4-n$



$f^{(n)}(4-n) = e^{4-n}(4-n-5+n) = -e^{4-n}$

$(4-n, -e^{4-n})$

$(f^{(n)}(x))'' = e^x(x-3+n)$

$(f^{(n)}(4-n))'' = e^{4-n}(4-n-3+n) = e^{4-n} > 0$ נ.י.ל. (פנימי)

$(4-n, -e^{4-n})$ נ.י.ל. (פנימי)



(4) נש/ה א — הפונקציות:

$$f^{(n)}(x) = f^{(m)}(x)$$

$$e^x(x-5+k) = e^x(x-5+m)$$

$$x-5+k = x-5+m$$

$$k = m$$

נתון $m \neq k$, זכנו אין נדו צר חיתוך בין הפונקציות, כלומר האנפ. לא מתכנס.

(5) לפי הסגפ. הקוצמיק,

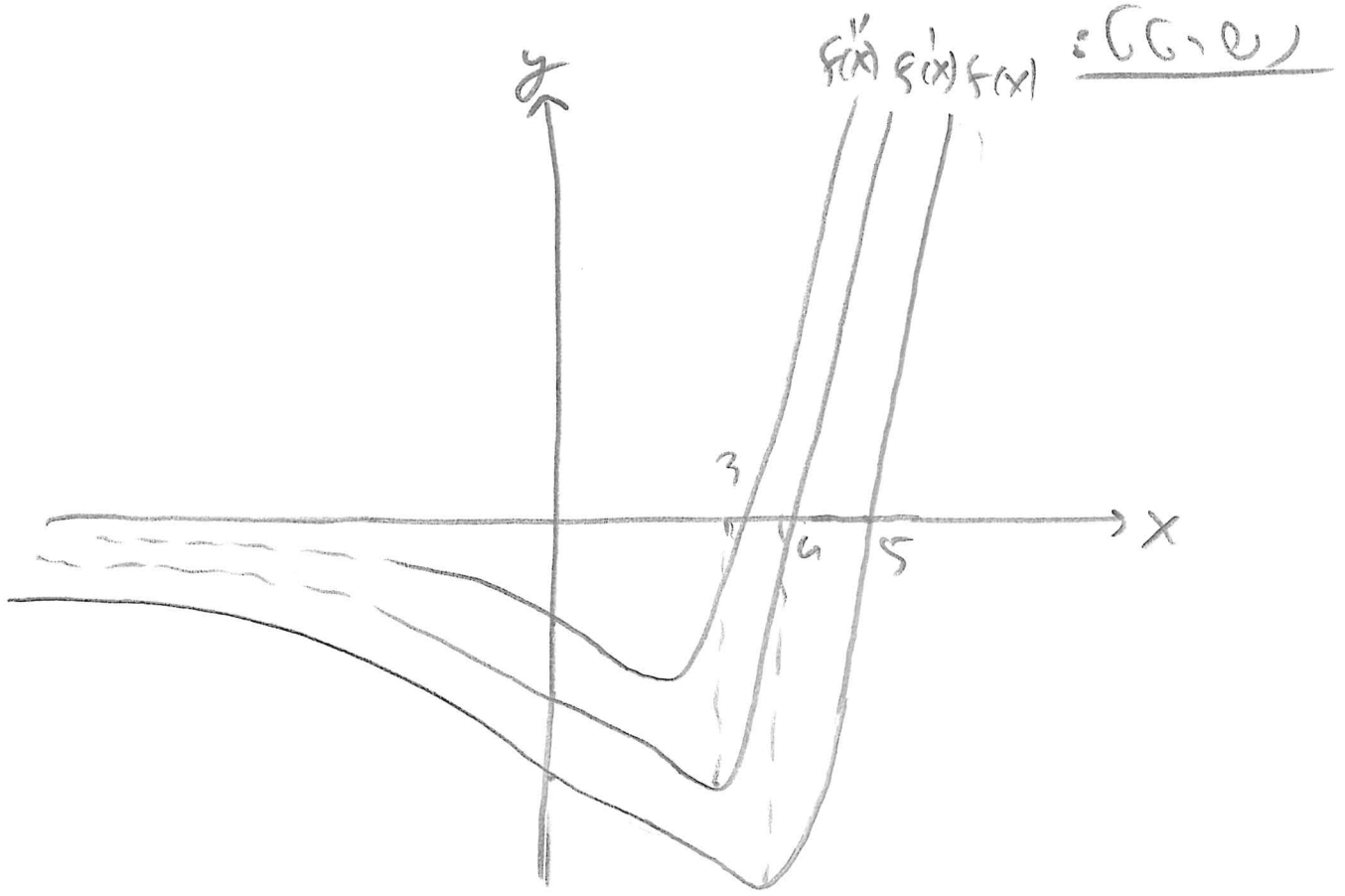
$f'(x)$	$f(x)$	דילגון
$f'(x) = (2-e^2)x$	$f(x) = (4, -e^4)$	חיתוך עם ציר x
$(3, 0)$	$(5, 0)$	
$(0, -3)$	$(0, -5)$	חיתוך עם ציר y

לכל הפונקציה מסתמטת זאבקה טעם לביר פ - א → x

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





3. נקבע את האינטגרל - כל האינטגרלים בתנאי:

$$F(x) = \int f(x) dx = \int e^x(x-5) dx = e^x(x-6) + C$$

(צבא - הנחיה) $(0,0)$:

$$0 = e^0(0-6) + C$$

$$C = 6$$

$$F(x) = e^x(x-6) + 6$$

סביבות:

