

פתרון הבחינה במתמטיקה

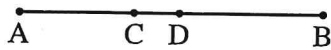
קיץ תש"פ, 2020, שאלון: 35581

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





1. רויטל מתאמנת ברכיבה על אופניים, וזיוה מתאמנת בהליכה ובריצה.

שתיהן יצאו באותו הזמן מן הנקודה A לכיוון הנקודה B.

רויטל רכבה במהירות קבועה, וזיוה הלכה במהירות קבועה.

רויטל הגיעה לנקודה B כאשר זיוה הגיעה לנקודה C, הנמצאת בין הנקודה A לנקודה B כך ש- $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{8}$.

א. מהו היחס בין מהירות ההליכה של זיוה למהירות הרכיבה של רויטל? נמק.

מייד לאחר מכן המשיכה זיוה ללכת מהנקודה C לכיוון הנקודה B במהירות ההתחלתית שלה,

ואילו רויטל חזרה ברכיבה מהנקודה B לכיוון הנקודה A במהירות שגבוהה ב- 3 קמ"ש ממהירות ההתחלתית.

רויטל וזיוה נפגשו בנקודה D, הנמצאת בין הנקודה C לנקודה B (ראה איור).

$$\text{נתון: } \frac{CD}{DB} = \frac{6}{19}$$

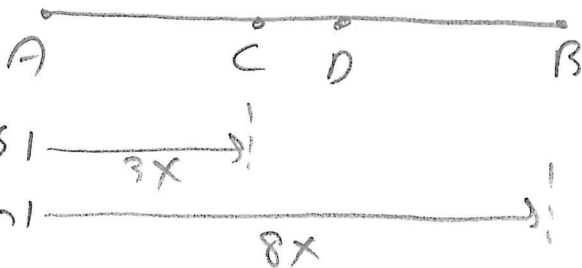
ב. חשב את המהירות ההתחלתית של רויטל, ואת המהירות ההתחלתית של זיוה.

מייד אחרי שרויטל וזיוה נפגשו בנקודה D, הן יצאו לכיוון הנקודה A : רויטל המשיכה לרכוב באותה המהירות

שבה רכבה לכיוון הנקודה A, ואילו זיוה הגבירה את מהירותה ב- k קמ"ש (k הוא מספר חיובי).

רויטל הגיעה אל הנקודה A לפני שזיוה הספיקה לעבור את מחצית הדרך מ- D ל- A.

ג. מהו תחום הערכים האפשריים בעבור k ? נמק.



$$\frac{AC}{AB} = \frac{3}{8}$$

נשמ, אל מהירות של רויטל
 ד- V_1 זיוה מהירות של זיוה
 ד- V_2

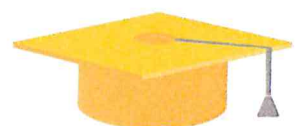
א. רויטל וזיוה יצאו באותו זמן, והגיעו באותו זמן

באותו זמן הרכיבה של רויטל שווה לזמן

ההליכה של זיוה. לכן יחס המהירות שווה

יחס המרחקים, כלומר

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{3}{8}$$



$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{3}{8}$$

ה. מסתף אי' יבוא

$$\frac{CD}{DB} = \frac{6}{19}$$

כח' נתון:

ה' הינה של קוטר (היא) $V_1 + 3$, V_1 יבוא:

$$\frac{V_2}{V_1 + 3} = \frac{6}{19}$$

(כח' א' ה' הינה):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V_2}{V_1} = \frac{3}{8} \\ \frac{V_2}{V_1 + 3} = \frac{6}{19} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_2 = \frac{3V_1}{8} \\ V_2 = \frac{6V_1 + 18}{19} \end{array} \right.$$

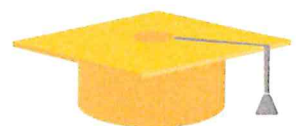
(ד' כ' א' =

$$\frac{3V_1}{8} = \frac{6V_1 + 18}{19}$$

$$57V_1 = 48V_1 + 144$$

$$9V_1 = 144$$

$$V_1 = 16$$



$$\Downarrow$$

$$V_2 = \frac{3}{8} \cdot 16 = 6$$

דב. כיוק:

✓ הייתה של ז'יה	6 ז'יה
✓ הייתה של כ'יה	16 ז'יה

ד. יחס הצרכים בסעיף הזה דאן ל- $\frac{7}{2}$
 ואכן יחס המהירות דאן להיות לא קר:

$$\frac{6+K}{19} < \frac{7}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$6+K < 9.5$$

$$K < 3.5$$

נתון שז'יה היא קורה של להיותם ואכן $K < 0$.

דב. כיוק, $\boxed{0 < K < 3.5}$



מתמטיקה, קיץ תש"ף, מס' 035581 + נספח

- 3 -

2. a_n היא סדרה הנדסית בעלת n איברים שהמנה שלה היא q .כל האיברים בסדרה a_n הם מספרים טבעיים.נתון: סכום $4 - n$ האיברים הראשונים של הסדרה קטן פי 16 מסכום איברי הסדרה החל באיבר החמישי (כולל).א. (1) הבע את סכום איברי הסדרה a_n החל באיבר החמישי (כולל) באמצעות a_5 ו- q .

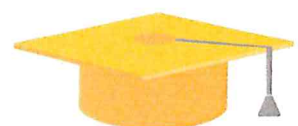
(2) מצא את מנת הסדרה.

נגדיר סדרה חדשה, b_k , בת $n - 2$ איברים, שבה מתקיים: $b_k = a_k + a_{k+1} + a_{k+2}$ לכל $k \leq n - 2$.ב. (1) הוכח שהסדרה b_k היא סדרה הנדסית.(2) הוכח כי כל אחד מאיברי הסדרה b_k מתחלק ב-7 ללא שארית.ג. c_n היא סדרה הנדסית אינסופית שבה $c_1 = \frac{1}{b_1}$ ו- $c_2 = \frac{1}{b_2}$.סכום הסדרה c_n שווה ל- $\frac{1}{91}$.חשב את a_1 .

$$k(1) \quad \sum_{\text{איברים } k-4}^n = \frac{a_5 (q^{n-4} - 1)}{q - 1}$$

$$(2) \quad 16 \cdot \sum_{\text{איברים } k-4}^n = \sum_{\text{איברים } k-4}^n$$

$$16 \cdot \frac{a_1 (q^{n-4} - 1)}{q - 1} = \frac{a_5 (q^{n-4} - 1)}{q - 1} \quad | \cdot (q - 1)$$





$$16a_1(q^{n-4}-1) = a_5(q^{n-4}-1) \quad | : (q^{n-4}-1) \neq 0$$

ובכיוון שסכום של אינו
אסיר איקריה אינו אסיר
 $q \neq 1$

$$16a_1 = a_5$$

$$16a_1 = a_1 q^4$$

$$| : a_1 \neq 0$$

ש א'קרי הסדר
א'קרי

$$16 = q^4$$

$$q = \pm 2$$

$$\underline{q = 2}$$

$q = -2$
(כסל ובכיוון של)
א'קרי הסדרה א'קרי

נראה כי

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \text{מספר קבוע}$$

אם הנדרש מספר קבוע:

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3}}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} = \frac{a_k q + a_k q^2 + a_k q^3}{a_k + a_k q + a_k q^2} = \frac{a_k q (1 + q + q^2)}{a_k (1 + q + q^2)}$$

$$= q = 2$$

הערה





$$\begin{aligned} \text{ד) } \frac{b_k}{7} &= \frac{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}}{7} = \frac{a_k + a_k q + a_k q^2}{7} \\ &= \frac{a_k (1 + q + q^2)}{7} = \frac{a_k (1 + 2 + 2^2)}{7} = \frac{a_k \cdot 7}{7} = a_k \end{aligned}$$

אנחנו רואים שכל a_k מתחלק ב-7 ולכן כל b_k מתחלק ב-7. מכאן נובע שכל a_k מתחלק ב-7.

$$c_1, c_2, c_3 \dots$$

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\frac{1}{b_2}}{\frac{1}{b_1}} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{c_1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$c_1 = \frac{1}{182}$$

$$c_1 = \frac{1}{b_1} \rightarrow \frac{1}{182} = \frac{1}{b_1} \Rightarrow b_1 = 182$$

$$b_1 = a_1 + a_2 + a_3$$

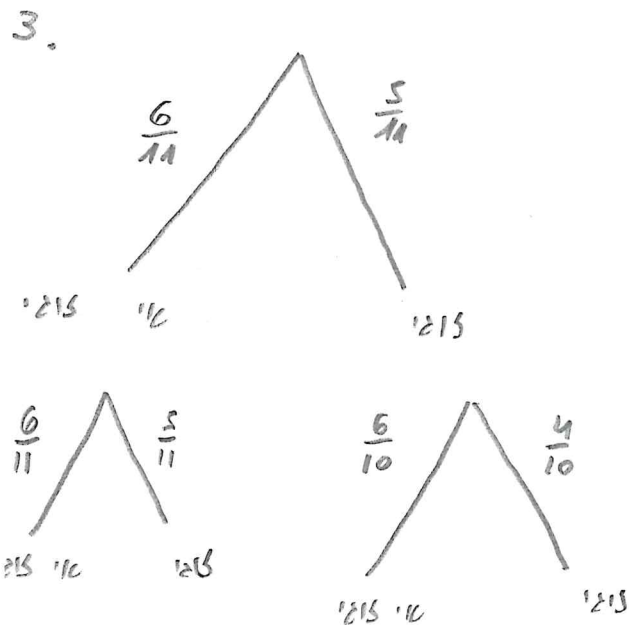
$$182 = a_1 + a_1 \cdot 2 + a_1 \cdot 2^2$$

$$182 = a_1 (1 + 2 + 4)$$

$$a_1 = 26$$



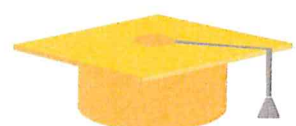
3. בכד יש 11 כדורים, הממוספרים בסדר עולה, מ-1 עד 11.
- מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעל הכדור.
- אם המספר שעל הכדור הוא אי-זוגי, מחזירים אותו לכד, ואם הוא זוגי, לא מחזירים אותו.
- לאחר מכן שוב מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעליו.
- א. מהי ההסתברות שנרשמו שני מספרים שמכפלתם זוגית?
- ב. ידוע שהמכפלה של שני המספרים שנרשמו היא זוגית.
- מצא את ההסתברות שהמספר שעל הכדור הראשון שהוציאו הוא אי-זוגי.
- בכד אחר יש מספר זוגי של כדורים הממוספרים בסדר עולה (1, 2, 3, ...).
- מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעל הכדור, מחזירים אותו לכד, ולאחר מכן שוב מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעליו.
- ג. (1) מצא את ההסתברות שמכפלת שני המספרים שנרשמו היא זוגית.
- (2) מוציאים מן הכד k כדורים. בכל פעם שמוציאים כדור, רושמים את המספר שעליו ומחזירים אותו לכד.
- הבע באמצעות k את ההסתברות שמכפלת כל המספרים שנרשמו היא זוגית.



כל מספר כפול מספר זוגי
 כל מספר זוגי כפול מספר זוגי
 כל מספר זוגי כפול מספר זוגי

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

נמסר על פסיכומטרי
 ביואל גבע



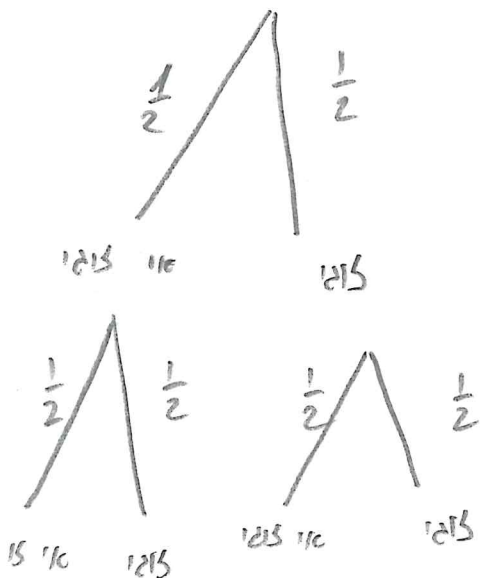


$$P(\text{המכנה של המספרים הוא 11} \mid \text{המספר של המכנה הוא 11}) = 1 - \left(\frac{6}{11} \cdot \frac{6}{11} \right) = \frac{85}{121}$$

$$P(\text{המכנה של המספרים הוא 11} \mid \text{המספר של המכנה הוא 11}) = P(\text{המכנה של המספרים הוא 11} \cap \text{המספר של המכנה הוא 11}) / P(\text{המספר של המכנה הוא 11})$$

$$= \frac{\frac{6}{11} \cdot \frac{5}{11}}{\frac{85}{121}} = \frac{6}{17}$$

(א) מכיוון שיש קבוצה
 מספר זוגי של כדורים
 על חצית השל המספר זוגי
 חל חצית השל המספר זוגי



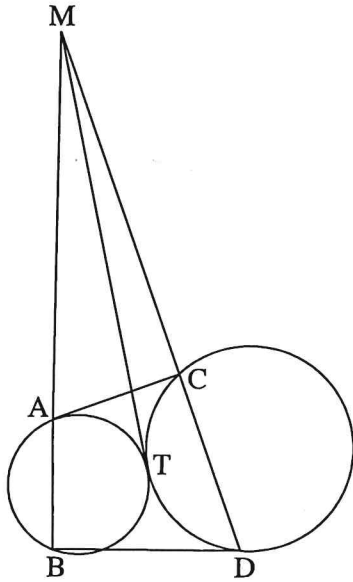
$$P(\text{המכנה של המספרים הוא 2} \mid \text{המספר של המכנה הוא 2}) = 1 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}$$



ב תוצאה של מכלול מספר (2) ל
 המספר צוי ניתן תוצאה צוי
 ולכן התוצאה הסופית תהיה אי צוי
 רק אם המספרים שיוכלו זהו אי צוי

$$\left(\begin{matrix} \text{מכלול} \\ \text{המספרים} \\ \text{שניתנו} \\ \text{צוי} \end{matrix} \right) = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n = 1 - \frac{1}{2^n}$$





4. נתונים שני מעגלים, המשיקים זה לזה מבחוץ בנקודה T.

דרך הנקודה T העבירו משיק המשותף לשני המעגלים.

מן הנקודה M שעל המשיק העבירו שני ישרים

החותכים את המעגלים בנקודות A, B, C, D, כמתואר בציור.

א. (1) הוכח: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

(2) הוכח כי המרובע ABDC הוא בר חסימה במעגל.

נתון: שטח המשולש MAC שווה לשטח המרובע ABDC.

ב. מצא את היחס $\frac{BD}{AC}$.

נתון: אלכסוני המרובע ABDC מאונכים זה לזה,

AD הוא קוטר במעגל החוסם את המרובע ABDC.

ג. הוכח כי המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים.

פתרון:

נימוק
נתון

נתון

נתון

טענה
(1) מT משיק משותף

(2) MAB חו"ן

(3) MCD חו"ן

(4) $MT^2 = MA \cdot MB$

$MT^2 = MC \cdot MD$

(5) $MA \cdot MB = MC \cdot MD$

נ.ע. א' (1)

אם הנקודה M היא
יוצאית של המעגל
ואז, אזי אורן של
הריבוע שלוה אלכסון
החותך בחלקו החיצוני
בא המעגל לפי 4





נלמד
נתי

$$S_{MAC} = S_{ABCD}$$

(13)

חיבור סטחים

$$S_{MDB} = S_{MAC} + S_{ABCD}$$

(14)

חישוב לפי (14, 13)

$$S_{MDB} = 2S_{MAC}$$

(15)

חישוב

$$\frac{S_{MDB}}{S_{MAC}} = 2$$

(16)

במשולש צולע, יחס
הסטחים שווה לריבוע

$$\frac{S_{MDB}}{S_{MAC}} = \left(\frac{BD}{AC}\right)^2$$

(17)

יחס הריבוע הנתון

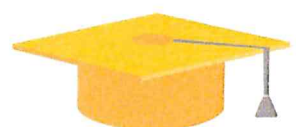
לפי (12)

חישוב לפי (17, 16)

$$\frac{BD}{AC} = \sqrt{2}$$

(18)

נ.ע.י. ב'




נימוק

נתון

נתון

כאילו הידפיה הנשענה על
 דוטר שווה 90° . אפי (20)

סימון (כאלו שוטאט) קטלוק
 חיסור זווית. אפי (21, 22)

סימון

אפי (19)

חיסור זווית. אפי (23, 25)

כאילו הידפיה הנשענה על
 אומם דל שווה זולא. אפי (22)

אפי (22, 27)
 מה זווית שווה בשאלה יש קלר
 שווה. אפי (28)

טעם

$$AD \perp BC \quad (19)$$

$$\angle ADB = 90^\circ \quad (20)$$

$$\angle ACD = 90^\circ \quad (21)$$

$$\angle ACB = \alpha \quad (22)$$

$$\angle BCD = 90^\circ - \alpha \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & (24) \text{ נסמן } \angle ADB = \angle ACD = 90^\circ \\ & \text{האלכסוניק } AD \\ & \therefore \angle BCD = 90^\circ - \alpha \end{aligned}$$

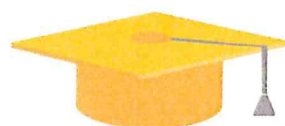
$$\angle CED = 90^\circ \quad (25)$$

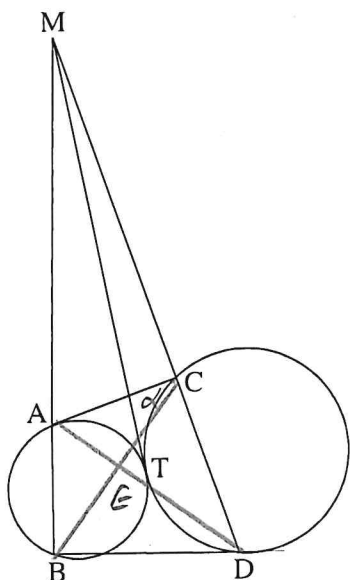
$$\angle CDE = \alpha \quad (26)$$

$$\angle ABC = \angle ADC = \alpha \quad (27)$$

$$\angle ACB = \angle ABC = \alpha \quad (28)$$

$$AB = AC \quad (29)$$





ניחוי

לגז

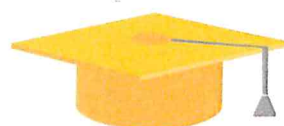
הלכרה
שם (29)

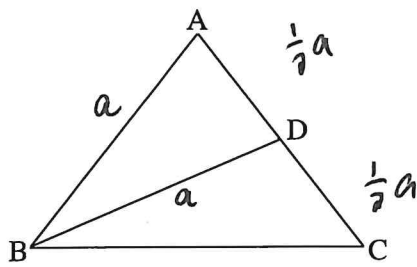
ש/ה שוקיי
SABC

(30)

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





5. ABC הוא משולש שווה שוקיים שבו $AB = AC = a$ (ראה ציור).

BD הוא תיכון במשולש ABC. נתון: $BD = a$.

הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC.

א. הבע את BC באמצעות a.

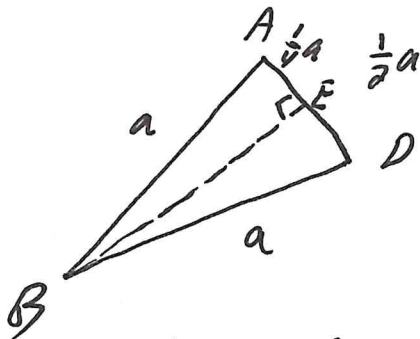
ב. חשב את זוויות המשולש BMC.

ג. נתון: $AM = 6$.

חשב את שטח המשולש ABC.

① בחרו את הזווית A לסימון המשולש ABD.
 בחרו את הזווית B לסימון המשולש ABC.

זווית ק' -



משולש זווית -
 הלווקים ABD זווית
 זווית AE זווית
 תיכון.

$$\cos \angle A = \frac{AE}{AB} = \frac{\frac{1}{4}a}{a} = \frac{1}{4}$$

$$\angle A = 75.52^\circ$$

בחרו זווית A

זווית א' -

משולש קוסינוסים:

$$a^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2}a \cdot \cos \angle A$$

$$a^2 = a^2 + \frac{1}{4}a^2 - a^2 \cdot \cos \angle A$$

$$0 = \frac{1}{4}a^2 - a^2 \cos \angle A \quad / : a^2 \neq 0$$

$$\cos \angle A = \frac{1}{4}$$

$$\angle A = 75.52^\circ$$



גזיר את B_c לפי משוואת הקוסינוסים 1 - ΔABC :

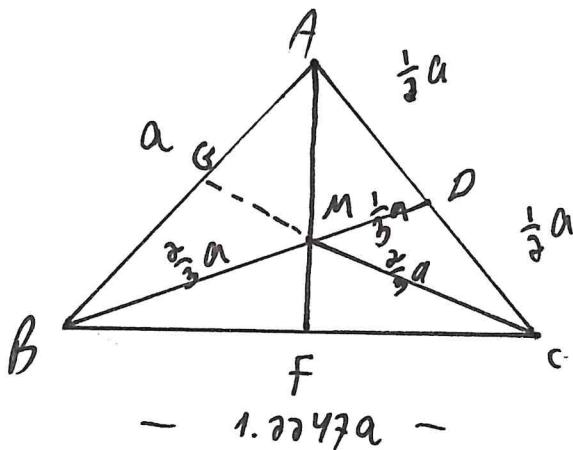
$$B_c^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos 75.52^\circ$$

$$B_c^2 = 1.5a^2$$

$$B_c = \pm \sqrt{1.5a^2} = \boxed{\sqrt{1.5}a} = \boxed{1.2247a}$$

הערה: אגלן הן גם פהר'ז זורג פ'ר'ז B_c .

Ⓜ - ממשל ת'כונ'פ.



$$BD = a$$

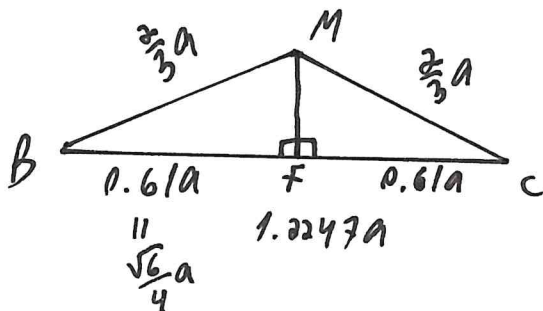
$$BM = \frac{2}{3}a \quad \text{פ'ר'}$$

Δ -7 לולו הלוק'פ

הת'כונ'פ פ'לוק'פ

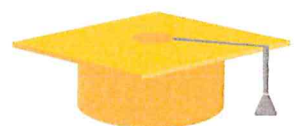
לוק'פ ז'ו פ'זו, פ'ר'ן $BD = CG$ ופ'ר'ן $BM = CM$.

ז'ורק א' - כחשק ז'וו'פ ז'ר'פ'ל BMC (המשולש הלולו-לוק'פ'פ) הוא



$$BF = CF = \frac{1.2247a}{2}$$

$$= 0.61a = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$




 ΔBMF

$$\cos \angle MBF = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}a}{\frac{2}{3}a} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

$$\angle MBF = 23.28^\circ$$

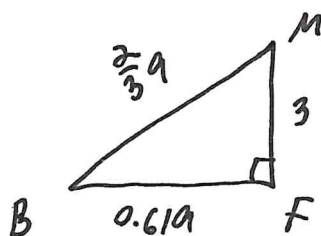
המשולש הוא שווה-זווית, ולכן $\angle MBF = 23.28^\circ$ וכל זווית במשולש

היא שווה לזווית במשולש BMF : \angle

$$23.28^\circ, 23.28^\circ, 133.44^\circ$$

$$(AM:MF = 2:1) \quad MF=3 \quad \text{כאשר} \quad AM=6 \quad (2)$$

משולש ABC הוא משולש שווה-זווית, ולכן a הוא הצלע

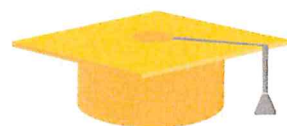
 ΔBMF


$$3^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}a\right)^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2$$

$$9 + \frac{3}{8}a^2 = \frac{4}{9}a^2$$

$$\frac{5}{72}a^2 = 9 \quad \rightarrow \quad a^2 = 129.6 \quad \rightarrow \quad a = \frac{18\sqrt{10}}{5} = 11.384$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot a \cdot \sin \angle BAC}{2} = \frac{81\sqrt{15}}{5} = 62.74$$





6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{(x+1)(x-a)}}{x-2}$. $a > 2$ הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. הבע באמצעות a אם צריך.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

נתון: $f(a+2) = -f(2-a)$.

ב. מצא את a .

הצב $a = 5$ וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x+2)$.

פתרון:

א. (1) הפונקציה שטח קטע בין -1 ל- a (האזרחים שיש להם זכות).

שיטה: $0 \leq (x+1)(x-a)$

$$(x+1)(x-a) \geq 0$$

$$(x+1)(x-a) = 0 \quad \text{נניח שיש פתרון}$$

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

$$x-a=0$$



(2) סרטט סקיצה של גרף

$$x \leq -1 \quad \text{או} \quad x \geq a$$





מכנה: $0 \neq$ מכנה

$$x-2 \neq 0$$

$$x \neq 2$$

מכיון $a > 2$ תחום הנשערה הסלם יהיה: $x \geq a$ או $x \leq -1$.

(2) נמצא את המין עם ציר x : $y=0$

$$0 = \frac{\sqrt{(x+1)(x-a)}}{x-2}$$

$$0 = \sqrt{(x+1)(x-a)} \quad | \cdot (x-2)$$

$$0 = (x+1)(x-a)$$

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

$$x-a=0$$

$$x=a$$

נקודות המין עם ציר x : $(-1, 0)$, $(a, 0)$.

אם קיימת אסימפטוטה אנכית עם ציר y - ה- y
מכיון שיש אסימפטוטה אנכית $x=0$.



(3) מצא את המסלול הנכון!

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

המסלול הנכון במרחב הוא המסלול הנכון

ואכן אין למסלול מסלול אחר

מצא את המסלול הנכון!

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 2}{x - 2}$$

נמצא את המסלול

באמצעות המסלול הנכון, נמצא את המסלול הנכון

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} - 2$$

המסלול הנכון הוא $\sqrt{x^2}$ וכן הוא חלקי במסלול.

במסלול $f = +\infty$: המסלול הנכון הוא חלקי במסלול

ואכן המסלול הנכון הוא $y = 1$

במסלול $f = -\infty$: המסלול הנכון הוא חלקי במסלול

ואכן המסלול הנכון הוא $y = -1$





$$f(a+2) = -f(2-a) \quad \text{נכון!}$$

נציג קטע ניה $x = a+2$

$$f(a+2) = \frac{\sqrt{(a+2+1)(a+2-a)}}{a+2-2} = \frac{\sqrt{(a+3) \cdot 2}}{a}$$

נציג קטע ניה $x = 2-a$

$$f(2-a) = \frac{\sqrt{(2-a+1)(2-a-a)}}{2-a-2} = \frac{\sqrt{(3-a)(2-2a)}}{-a}$$

$$\frac{\sqrt{(a+3) \cdot 2}}{a} = \neq \frac{\sqrt{(3-a)(2-2a)}}{-a} \quad \text{נכון! קטע}$$

$$\sqrt{(a+3) \cdot 2} = \sqrt{(3-a)(2-2a)} \quad | \cdot 2$$

$$2(a+3) = (3-a)(2-2a)$$

$$2a+6 = 6-6a-2a+2a^2$$

$$0 = 2a^2 - 10a$$

$$a = 0 \quad a = 5$$

(כאשר $a > 2$)



$$f(x) = \frac{\sqrt{(x+1)(x-5)}}{x-2}$$

ל (1) / נק' : a=5

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x - 5}}{x-2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x-5}} \cdot (x-2) - 1 \cdot \sqrt{x^2-4x-5}}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x-2) - 2(\sqrt{x^2-4x-5})^2}{2\sqrt{x^2-4x-5} \cdot (x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - 2(x^2 - 4x - 5)}{2\sqrt{x^2-4x-5} \cdot (x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8x + 8 - 2x^2 + 8x + 10}{2\sqrt{x^2-4x-5} \cdot (x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{18}{2\sqrt{x^2-4x-5} \cdot (x-2)^2}$$



נא/ה אב מנה הנגזרת $f'(x)$!

אמנואט אין כיוון ולין אסערציה אין קאדיר קאטן.

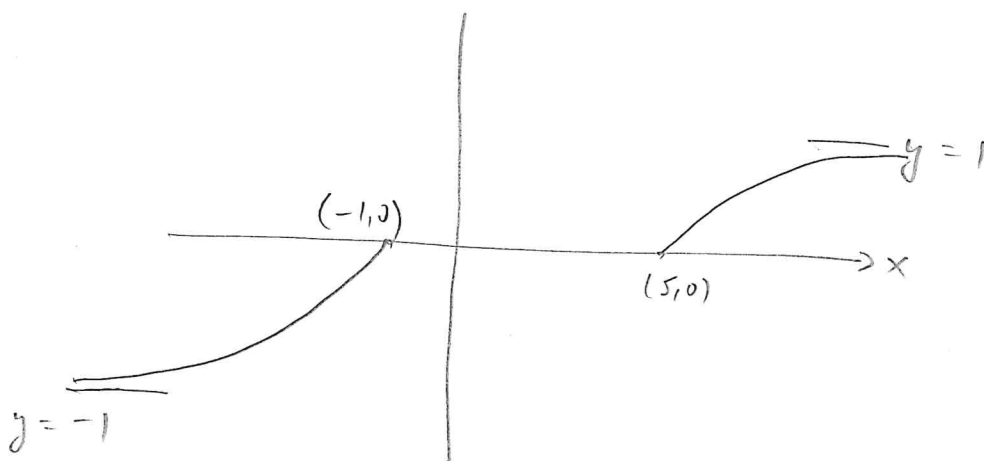
מנה הנגזרת חילוק אלא x ולין הסערציה אלה.

ככל חזק הנגזרת.

עצמי: $x > 1$ או $x < -1$.

יחידה א/ה.

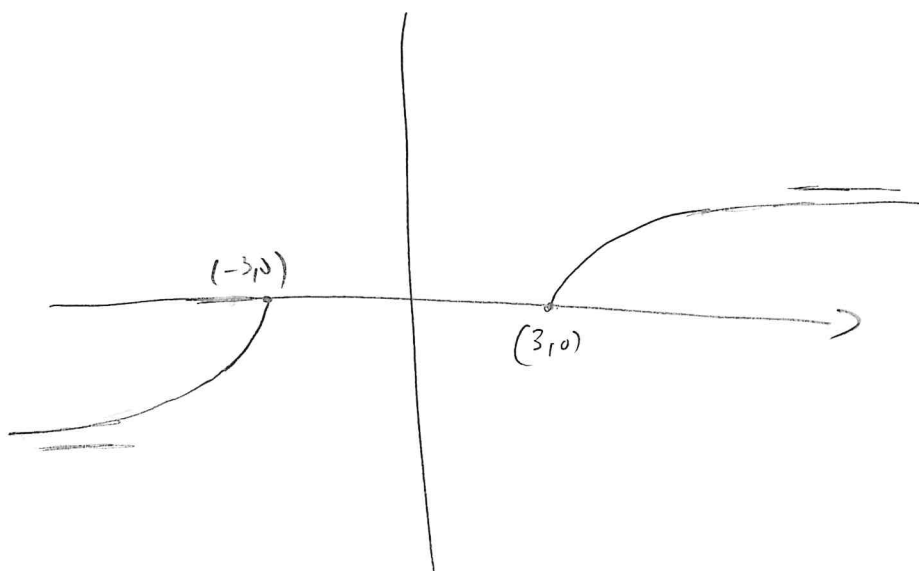
(2)



3. הסערציה $f'(x+2)$ מנקודה x'' הנצט אלקה אלא

הסערציה 2 וחזק שאלה.





נמידע על פסיכומטרי
ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



מתמטיקה, קיץ תש"ף, מס' 035581 + נספח

- 7 -

8. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40}{x + 2}$

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?ב. (2) האם לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית? נמק.

נתונה הפונקציה $g(x) = x^3 - 21x + 20$.

ב. (1) עבור אילו ערכים של x $f(x) = g(x)$? נמק.(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x הן $(4,0)$, $(1,0)$ ו- $(-5,0)$.ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.ד. $t > 0$ הוא פרמטר.עבור איזה ערך של t הביטוי $\int_0^t f(x) dx$ מקבל ערך מינימלי? נמק.

פתרון:

א. (1) כן, שנים לא פס: $x \neq -2$

(2) נגדלם לא הפינה לה בחילוק ארוך:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 21x + 20 \\
 \overline{x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40} \quad x+2 \\
 \underline{x^4 + 2x^3} \\
 -21x^2 - 22x + 40 \\
 \underline{-21x^2 - 42x} \\
 20x + 40 \\
 \underline{20x + 40} \\
 0
 \end{array}$$

$$\frac{x^4}{x} = x^3 \quad *$$

$$\frac{-21x^2}{x} = -21x \quad **$$

$$\frac{20x}{x} = 20 \quad ***$$

לכן $f(x) = x^3 - 21x + 20$; $x \neq -2$
 למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.




המשפט הנלמד זוכן אין אסימפטוטה אנכית,

אלא "חוק" בנקודה $(-2, 54)$. משוואה: $\boxed{x=1}$

ה. (ד) כעך נרין $f(x) = x^3 - 21x + 20$

דב. כעך א' הפונקציה $f(x)$ ו- $f'(x)$

זהו עמק מחוס ההגדרה. זכר,

המשוואה $\boxed{x \neq 2}$

(2) נסבור אן הפונקציה הנלונה:

$$f'(x) = f'(x) = 3x^2 - 21$$

$$3x^2 - 21 = 0$$

$$x = \sqrt{7} \quad x = -\sqrt{7}$$

$$(\sqrt{7}, -7.54) \quad (-\sqrt{7}, 57.54)$$

נדבר אן סוג הקטין בעצם נאמר עליה:

$$f'(x) = 6x$$





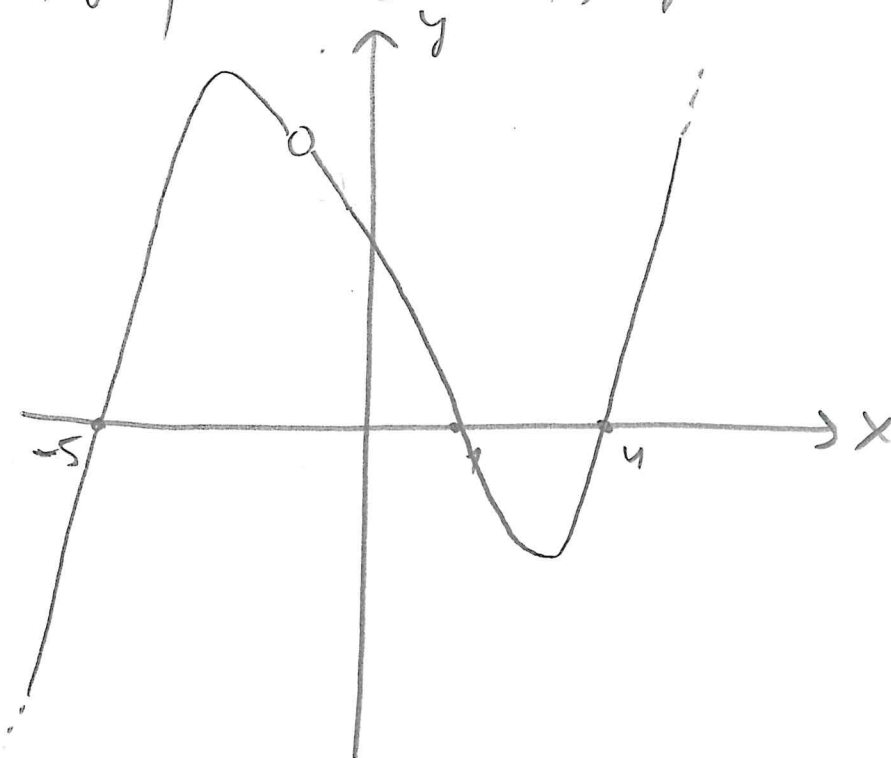
$$f'(\sqrt{7}) > 0 \Rightarrow \text{מינימום}$$

$$f'(-\sqrt{7}) < 0 \Rightarrow \text{מקסימום}$$

לסיכום:

$(\sqrt{7}, -17.04)$ מינימום $(-\sqrt{7}, 57.04)$ מקסימום
--

ג. נסיטל לפי תנאי החדירה, ולפי הנגזרת
 נחצט על נקודות הייחודיות של $f(x)$:





$$\int_0^t f(x) dx$$

 $t \geq 0$

3. נתון:

ציון האגונים: נשמש בזה מסגרת 2.

לפי השל המסגרת שהאגונים מילד
מחיל על צלילי ה-א, עובר ממחיל צלילי

ה-א, מחזר לחיל על צלילי ה-א.

מכאן יסבירו המילד יחזק במילד הילד

השלישי של השל (בדוגמה החילון עק ליר

ה-א. לכן המשובה היא $t=4$

ציון שניה: נכור כבצילי חילון.

פונקציה השל:

$$K(t) = \int_0^t (x^3 - 21x + 20) dx$$

$$K(t) = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{21x^2}{2} + 20x \right]_0^t$$

$$K(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{21t^2}{2} + 20t$$



נראה מינימום בנקודה $t=0$:

$$K'(t) = t^3 - 21t + 20$$

$$t^3 - 21t + 20 = 0$$

דבר שגורם לזהב $t=1$ או $t=4$

$$K''(t) = 3t^2 - 21$$

$$K''(1) = -18 < 0 \Rightarrow \text{מקסימום}$$

$$K''(4) = 27 > 0 \Rightarrow \text{מינימום מקומי}$$

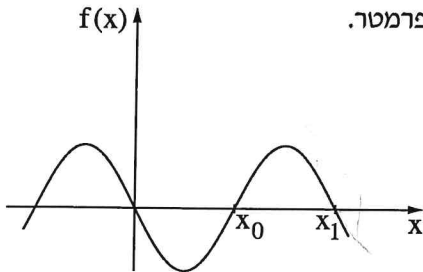
לפי הדרך המינימום הכוללי הוא גם

מינימום, ולכן $t=4$



7. לפניך חלק מן הגרף של הפונקציה המחזורית $f(x)$.

גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בראשית הצירים, וחותר את ציר ה- x גם בנקודות שבהן $x = x_0$ ו- $x = x_1$, כמתואר בצירור.



אחת המשוואות שלפניך (IV-I) מתארת את הפונקציה $f(x)$. $a \neq 0$ הוא פרמטר.

I. $y = a^2 \sin x$

II. $y = a \sin 2x$

III. $y = a^2 \cos x$

IV. $y = a \cos 2x$

א. (1) קבע איזו מן המשוואות IV-I היא משוואת הפונקציה $f(x)$. נמק.

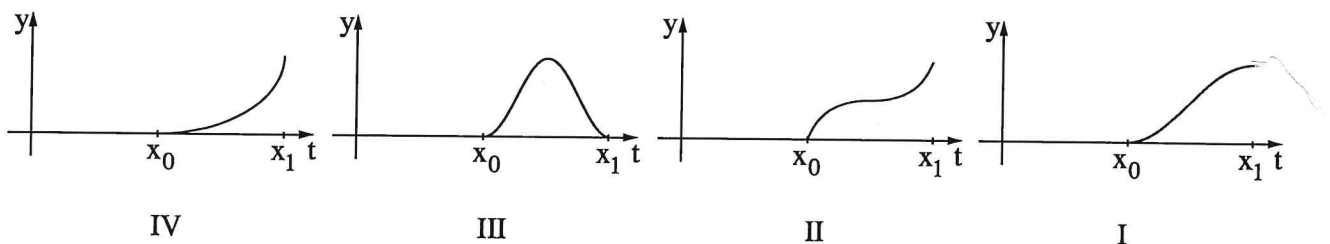
(2) קבע מהו תחום הערכים האפשריים עבור הפרמטר a . נמק.

(3) מה הם הערכים של x_0 ושל x_1 ?

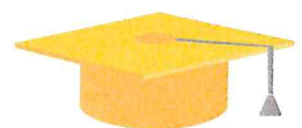
ב. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $x_0 \leq x \leq x_1$.

נסמן: $S(t) = \int_{x_0}^t f(x) dx$. נתון: $x_0 \leq t \leq x_1$.

ג. לפניך ארבעה גרפים (IV-I). איזה מן הגרפים IV-I מתאר את הפונקציה $S(t)$? נמק.



א. (1) בחרתי הנחות מתואות כות' א"ס ואכן מקיים א"ס
 III ! IV נכשלים (הכות' נאצט) $y = \sin x$ היא כות' נאצט.
 ידוע שבין $y = \sin x$ נראה כק:
 (שהפונ' אמיס $y = -\sin x$ נראה כק:
 מכאן נובע שהמקרים של הפונ' צביקם היוו שלילי
 a^2 הוא מקצק חיובי ואכן משוואה מס' I נכשלת.
 מסקנני: משוואה מס' II היא הנכונה ואם $a < 0$.





א. (2) לפי ההסבר לסעיף (1) $a < 0$

(3) חיתון עם פירא:

$$a \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} k$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \text{עבור } k=1 \text{ (דב)}$$

$$x = \pi \quad \text{עבור } k=2 \text{ (דב)}$$

$$\boxed{x_1 = \pi, x_0 = \frac{\pi}{2}} \quad : \delta > 1$$

ב. נחשב את האינטגרל:

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} a \sin 2x dx = \left\{ -\frac{a \cos 2x}{2} \right\}_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$S = \left(-\frac{a \cos 2\pi}{2} \right) - \left(-\frac{a \cos 2 \cdot \frac{\pi}{2}}{2} \right) = -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \boxed{-a}$$

$$x_0 < t < x_1 \quad S(t) = \int_{x_0}^t f(x) dx \quad \text{ד. נתון:}$$

$S(t)$ מתאר את השטח שסגור f מתחת

הפונקציה f בין x באינטרвал $x = x_0$ ו- $x = t$,

כאשר השטח הוא חיובי $x = t$.





ב- $x=x_0$ הנקודה נמצאת ב- x וכן
 פונקציה השלמה היא בעלת שיפוע אפס
 ב- $x=x_0$. הנקודה היחידה של x_0 הוא
 I .

בנוסף, אם ב- $x=x_0$ הפונקציה נמצאת ב-
 x וכן אם ב- $x=x_0$ השיפוע של פונקציה
 השלמה אפס, נראה שיש לה I .

הארה: ניתן להשיב את הפונקציה:

$$S(t) = \int_{x_0}^t f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^t (a \sin 2x) dx$$

$$S(t) = \left[-\frac{a \cos 2x}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^t = -\frac{a \cos 2t}{2} - \frac{a}{2}$$

נראה, אסור ולהקורר הפונקציה, כדי
 סבא לא לומר האם הפונקציה.

