

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תש"פ, 2020, מועד ב', שאלון: 35581

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. טל ואלון הם ספורטאים המשתתפים בתחרות טריאתלון.

התחרות מורכבת משלושה מקצים רצופים: המקצה הראשון הוא שחייה, המקצה השני הוא רכיבה על אופניים ואורכו 180 קילומטרים, והמקצה השלישי הוא ריצה ואורכו 42 קילומטרים. בפתרון השאלה, הנח שמהירות השחייה, מהירות הרכיבה ומהירות הריצה של כל אחד מן הספורטאים, טל ואלון, הן קבועות לאורך כל אחד מן המקצים.

| ריצה | רכיבה על אופניים | שחייה |
|------|------------------|-------|
|------|------------------|-------|

נתון: טל התחיל את מקצה הריצה בשעה 13:30 ואלון התחיל את מקצה הריצה בשעה 15:00.

טל הגיע לקו הסיום של הטריאתלון חצי שעה לפני אלון.

מהירות הריצה של אלון גדולה ב-1 קמ"ש ממהירות הריצה של טל.

א. באיזו שעה סיים אלון את מקצה הריצה?

באותו היום התחיל אלון את מקצה השחייה בשעה 6:00 וסיים אותו לפני השעה 10:00.

ב. לפניך שני היגדים I-II. קבע בנוגע לכל אחד מהם אם הוא אפשרי או אינו אפשרי.

I מהירות הרכיבה על אופניים של אלון היא 18 קמ"ש.

II מהירות הרכיבה על אופניים של אלון היא 25 קמ"ש.

נאציף :
מהירות - ריצה - 42 - x
מהירות - ריצה - 180 - x+1

| S | t | V |
|----|------------------|-----|
| 42 | $\frac{42}{x}$ | x |
| 42 | $\frac{42}{x+1}$ | x+1 |

פירגורן :
ריצה 13:30
ריצה 15:00

$$\frac{42}{x+1} - \frac{x(x+1)}{1} = \frac{x}{42} \quad / \cdot x(x+1)$$

$$42(x+1) - x(x+1) = 42x$$

$$42x + 42 - x^2 - x = 42x$$

$$0 = x^2 + x - 42$$

$$x_1 = -7 \quad x_2 = 6$$

x אינו מסתבר ולכן חזב

מהירות של אלון 7 קמ"ש הוא 42 קמ"ש ≤ 6 מסתבר

אלון הוא מסתבר ב- 15:00 ולכן אלון סיים לריצה ב- 21:00

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



I לא אפסתי (1) (2)

אם מהירות הרכיבה על אופניים של אלון היא 18 קמ"ש (והמשולש = 180 קמ"ש הרי שמשן הרכיבה = 10 שעות וזה אומר שהוא החל לרכיב על אופניים בשעה 05:00 ... וכל כחוקן סגירה לעולם

II בן אפסתי

אם מהירות הרכיבה על אופניים של אלון היא 25 קמ"ש אז הוא צבר 180 קמ"ש ב- 7.2 שעות (7 שעות + 12 דקות) וזה אומר שהוא החל לרכיב על אופניים בשעה 7:48 וזה אפשרי כי הוא החל לשהיג ב- 6:00 והוא לרכיב לפני 40:00

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



2. בסדרה a_n נתון כי לכל n טבעי, סכום n האיברים הראשונים של הסדרה הוא $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$.

א. (1) מצא את a_1 ואת האיבר הכללי של הסדרה a_n בעבור $n > 1$.

(2) הראה כי a_n היא סדרה הנדסית, ומצא את המנה שלה.

נתונה הסדרה $c_n = S_{n+1} - S_n$.

ב. (1) הראה כי הסדרה c_n היא סדרה הנדסית.

(2) הראה כי לכל k טבעי הסכום של k האיברים הראשונים בסדרה c_n גדול פי 3 מן הסכום של

k האיברים הראשונים בסדרה a_n .

(k) (1) $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$

$S_1 = 2 \cdot 3^1 - 2$

נתון את S_1 :

$S_1 = 4 \rightarrow a_1 = 4$

($n > 1$) $a_n = S_n - S_{n-1}$

נחסר פה :

$S_n = 2 \cdot 3^n - 2$

$S_{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} - 2$

$a_n = 2 \cdot 3^n - 2 - (2 \cdot 3^{n-1} - 2)$

נצ' ונקבל :

$a_n = 2 \cdot 3^n - 2 - 2 \cdot 3^{n-1} + 2 = 2 \cdot 3^n - \frac{2 \cdot 3^n}{3}$

$a_n = \frac{6 \cdot 3^n - 2 \cdot 3^n}{3} = \frac{4 \cdot 3^n}{3}$

$a_n = \frac{4 \cdot 3^n}{3} = 4 \cdot 3^{n-1} = \frac{4}{3} \cdot 3^n$



$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\text{זוגל}}{\text{קרוס}} = 3 \quad (2)$$

$$a_n = \frac{4 \cdot 3^n}{3} \quad \text{קולטו}$$

$$a_{n+1} = \frac{4 \cdot 3^{n+1}}{3}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{4 \cdot 3^{n+1}}{3}}{\frac{4 \cdot 3^n}{3}} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{3^n \cdot 3^1}{3^n} = 3$$

קבלתי $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$, אם גמולי הנקמה $q=3$

הערה: קצו עוצמו להסדר הנקמה, כצו $n=1$ קטמג
 סקבלתי a_n - a_{n-1} ונדקוק האם מתקום וס הטלל
 קערבו a_n - a_{n-1} מתקום קמצי $(n=1)$ ס יצי גצו.
 קטמג S_n S_{n-1}

$$a_n = \frac{4 \cdot 3^n}{3}$$

(ס קולטו $a_1=4$)

$$a_1 (n=1) = \frac{4 \cdot 3^1}{3} = 4 \rightarrow \rightarrow \rightarrow$$

הסדר הנקמה
 $a_1=4, q=3$



$$C_n = S_{n+1} - S_n \quad (1) \quad (*)$$

כדי ש C_n , יהיה קבוע , נניח $C_n = C_{n+1}$

$$S_n = 2 \cdot 3^n - 2$$

$$S_{n+1} = 2 \cdot 3^{n+1} - 2$$

$$C_n = S_{n+1} - S_n = 2 \cdot 3^{n+1} - 2 - (2 \cdot 3^n - 2)$$

$$C_n = 2 \cdot 3^n \cdot 3 - 2 - 2 \cdot 3^n + 2$$

$$C_n = 6 \cdot 3^n - 2 \cdot 3^n = 4 \cdot 3^n$$

$$\overbrace{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}}^{S_n}$$

$$S_{n+1}$$

$$C_n = S_{n+1} - S_n$$

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$$



$C_n = a_{n+1}$: נקרא:

$a_{n+1} = \frac{4 \cdot 3^{n+1}}{3}$ ← $a_n = \frac{4 \cdot 3^n}{3}$ נקרא

$a_{n+1} = 4 \cdot 3^n$

↓
 $C_n = 4 \cdot 3^n$

$C_{n+1} = 4 \cdot 3^{n+1}$: C_{n+1} נקרא

$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{4 \cdot 3^{n+1}}{4 \cdot 3^n} = 3$

$\frac{C_{n+1}}{C_n} = 3$ →

C_n הנקרא
מגדל 3.





קבוצה 1-2 זרימה

4, 12, 36, ...

סדרת an

(P) (2)

$a_1 = 4$

$q = 3$

$$S_n = \frac{4(3^k - 1)}{3 - 1} = 2(3^k - 1)$$

$C_n = 4 \cdot 3^n$

סדרת cn

$C_1 = 12$

12, 36, 108, ...

$$S_n = \frac{12(3^k - 1)}{3 - 1} = 6(3^k - 1)$$

$$\frac{S_n \text{ סדרת } C_n}{S_n \text{ סדרת } a_n} =$$

$$= \frac{6(3^k - 1)}{2(3^k - 1)} =$$

3

→

סכום a
האזורים
הואטונים
קסדרה n
זכור כי 3
מסוים a

קסדרה an.

an 4, 12, 36, ...

זכור ל' - ניתן לראות

Cn 12, 36, 108, ...

כי כל איברי קסדרה n
זכור כי 3 מהאיברי המוצא

קאמו מקיים קסדרה an, לכן מרים a איזורים והטונים

קסדרה n תמיד זכור כי 3 מסוים של אמו הם איזורים קסדרה an.

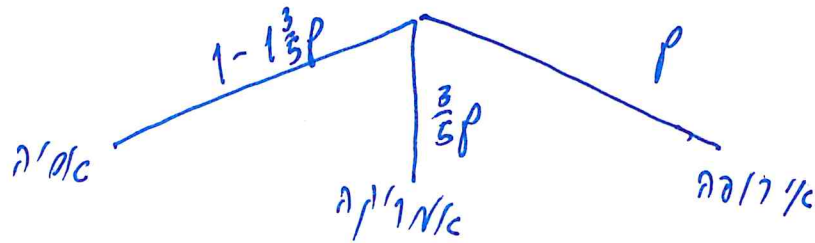
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.

אל תתפשר עליה.



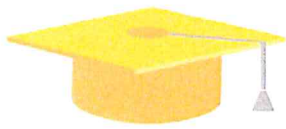
3. יעדי הטיסות של חברת תעופה מסוימת הם היבשות: אירופה, אמריקה ואסיה בלבד (אין טיסות ללא נוסעים). נתון כי מבין הנוסעים בחברה, מספר הנוסעים לאמריקה הוא $\frac{3}{5}$ ממספר הנוסעים לאירופה. בוחרים באקראי נוסע מבין הנוסעים בחברה. נסמן ב- P את ההסתברות שנוסע זה טס לאירופה. בוחרים באקראי 2 נוסעים מבין הנוסעים בחברה. נתון כי ההסתברות ש-2 הנוסעים שנבחרו אינם טסים לאותה היבשת היא 0.62.
- נתון: $P > 0.4$.
- מצא את P .
 - בוחרים באקראי 5 נוסעים מבין הנוסעים בחברה. מהי ההסתברות שלפחות 2 מן הנוסעים שנבחרו טסים לאמריקה וגם לפחות 2 מהם אינם טסים לאמריקה? באוטובוס לנמל התעופה היו 50 נוסעים שטסים בחברה זו. התפלגות יעדי הטיסה של הנוסעים באוטובוס זהה להתפלגות יעדי הטיסה של כל הנוסעים בחברת התעופה. בחרו באקראי 2 נוסעים מן האוטובוס זה אחר זה (ללא החזרה), והתברר ששניהם טסים לאותה היבשת. מהי ההסתברות ש-2 הנוסעים שנבחרו טסים לאמריקה?



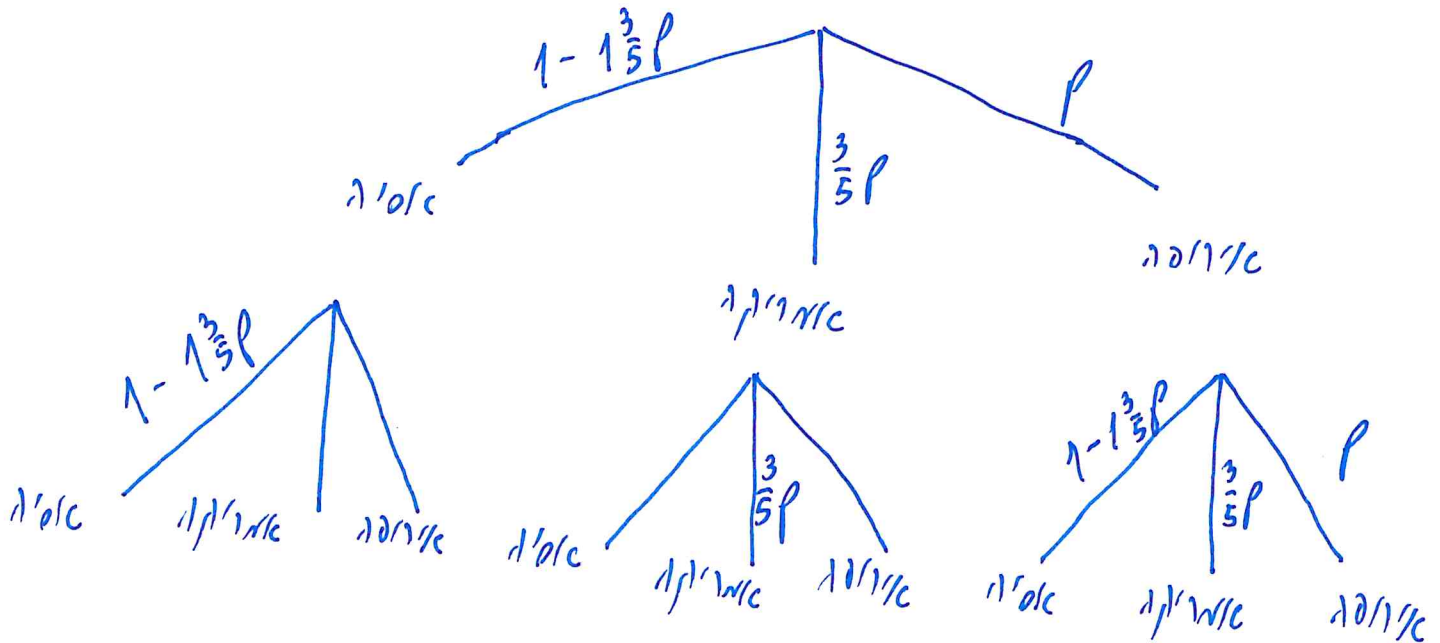
נתון כי $P(\text{אמריקה} | \text{נוסע}) = P$

מספר הנוסעים לאמריקה הוא $\frac{3}{5}$ ממספר הנוסעים לאירופה
 מספר הנוסעים לאסיה הוא $\frac{3}{5}$ ממספר הנוסעים לאירופה, כלומר $\frac{3}{5}P$

הסתברות שנוסע לאסיה הוא $1 - P - \frac{3}{5}P$ כלומר $1 - 1.6P$



בקנה ביאורים על המתאור 2 טפסים :



$$P \left(\begin{matrix} \text{אס} \\ \text{אס} \\ \text{אמריק} \\ \text{אמריק} \end{matrix} \right) = 0.62$$

$$\downarrow$$

$$P \left(\begin{matrix} \text{אס} \\ \text{אמריק} \\ \text{אמריק} \end{matrix} \right) = 1 - 0.62 = 0.38$$

$$P \left(\begin{matrix} \text{אמריק} \\ \text{אמריק} \end{matrix} \right) + P \left(\begin{matrix} \text{אמריק} \\ \text{אמריק} \end{matrix} \right) + P \left(\begin{matrix} \text{אס} \\ \text{אס} \end{matrix} \right) \underbrace{= 0.38}_{\text{3 מסלולים מתאימים}}$$

$$p \cdot p + \frac{3}{5}p \cdot \frac{3}{5}p + (1 - \frac{3}{5}p)(1 - \frac{3}{5}p) = 0.38$$

נחידע עכ פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



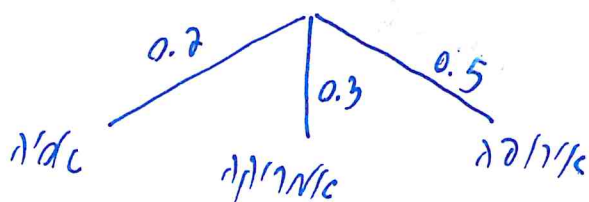
$$p^2 + \frac{9}{25}p^2 + 1 - 3\frac{1}{5}p + 2.56p^2 = 0.38$$

$$3.96p^2 - 3.2p + 0.62 = 0$$

$$p_1 = 0.5$$

$$p_2 = \frac{31}{98}$$

נכון, $p > 0.4$, למק $p = 0.5$



נכון $p = 0.5$

$$p(\text{אמריקה}) = 0.3$$

$$p(\text{לא אמריקה}) = 0.7$$

ביטוי דנומת נוסף.
נוסח את כל המקרים.
ונראה אילו מקרים מתאימים לביטוי הספיד:

| | | | | | | | |
|---------------|--|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| כן אמריקה 0.3 | | | | ✓ | ✓ | | |
| לא אמריקה 0.7 | | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

נראה את
2 המקרים
המתאימים



$$P \left(\begin{matrix} \text{לפחות 2 אמצעיות} \\ \text{ולמחרת 2 איש} \\ \text{ביום האמצעי} \end{matrix} \right) = P \left(\begin{matrix} \text{2 או 3} \\ \text{ט"ס} \\ \text{לאמצעיות} \end{matrix} \right)$$

$$= P \left(\begin{matrix} \text{2 מתוך 5} \\ \text{ט"ס} \\ \text{לאמצעיות} \end{matrix} \right) + P \left(\begin{matrix} \text{3 מתוך 5} \\ \text{ט"ס} \\ \text{לאמצעיות} \end{matrix} \right)$$

גיוס 1587 גיוסות גיוס וזקוק:

$$0.3^2 \cdot 0.7^3 \cdot \binom{5}{2} + 0.3^3 \cdot 0.7^2 \cdot \binom{5}{3}$$

$$0.3087 + 0.1323 = \boxed{0.441}$$

50 גיוסות וסך הכול.

(2)

גיוסות 50 מתוך 50, 0.5

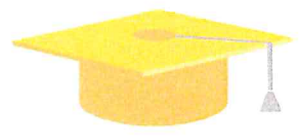
כאשר 0.25

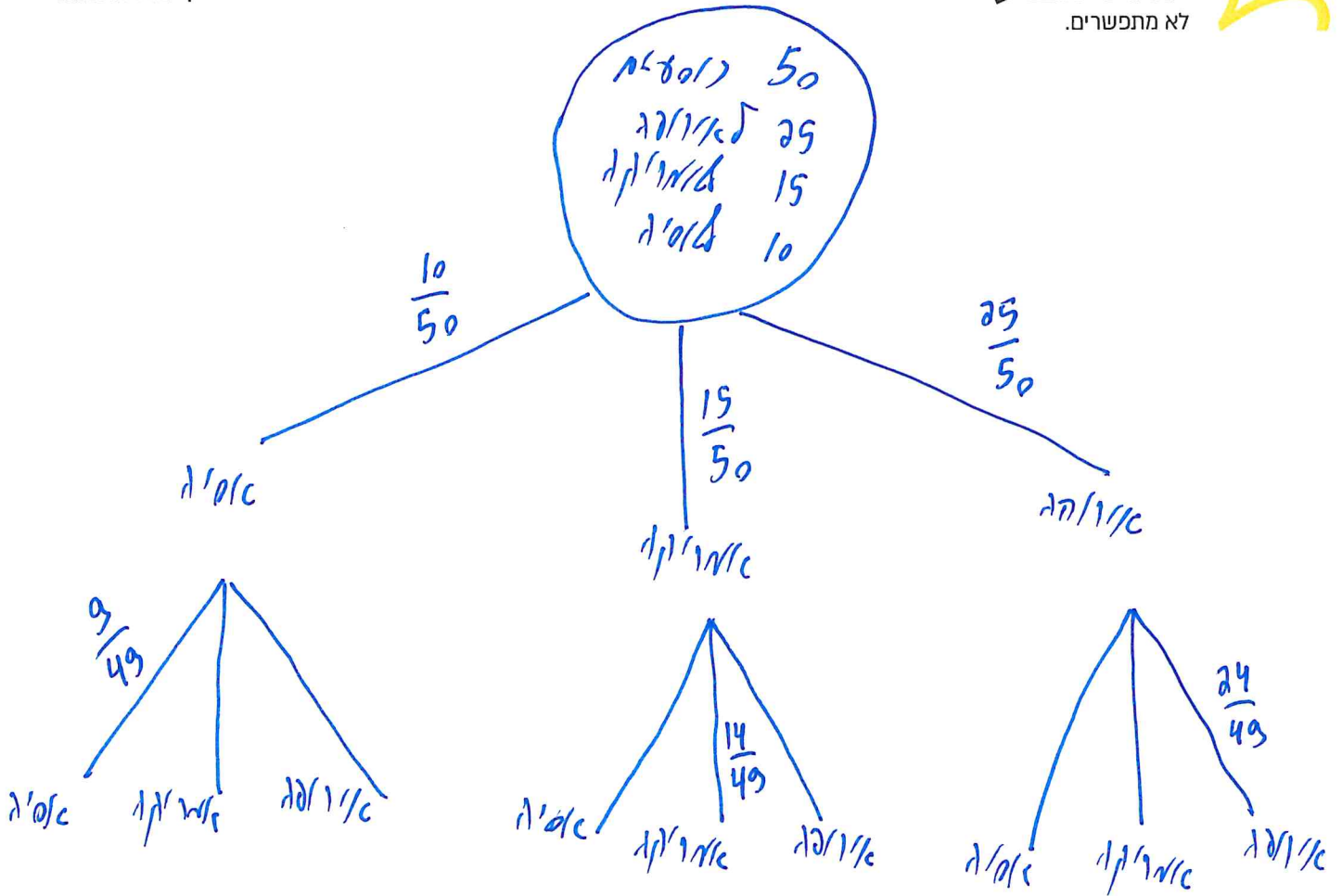
הגיוסות לאמצעיות: מתוך 50, כאשר 15

אזכור 0.2 מתוך 50, כאשר 10

נחידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





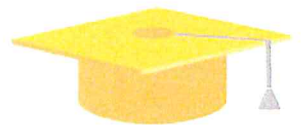
כאן הסתוות מולנית:

$$P(\text{שני הניסים / אסיה / אמריקה}) = \frac{P(\text{אמריקה / אמריקה})}{P(\text{אירופה / אירופה}) + P(\text{אמריקה / אמריקה}) + P(\text{אסיה / אסיה})}$$

$$\frac{\frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49}}{\frac{25}{50} \cdot \frac{24}{49} + \frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49} + \frac{10}{50} \cdot \frac{9}{49}} = \frac{\frac{3}{35}}{\frac{12}{49} + \frac{3}{35} + \frac{3}{245}} = \boxed{\frac{7}{30}}$$

לחידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

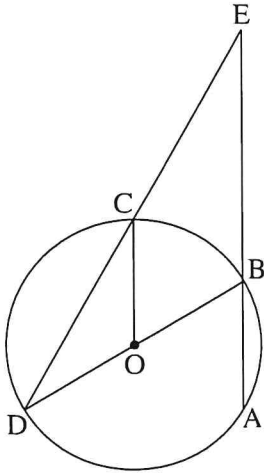
הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O.

הרדיוס OC מקביל למיתר AB, כמתואר בציור.

BD הוא קוטר במעגל.

הנקודה E היא מפגש הישרים AB ו-DC (ראה ציור).

א. הוכח: $\angle AED = \angle CDO$.

ב. הוכח כי CO חוצה את הזווית DCA.

נתון: $\frac{EB}{BA} = 2$.

ג. הוכח כי המשולש ABO הוא שווה צלעות.

ד. נתון: שטח הטרפז COBE הוא 9.

מצא את סכום שטחי המשולשים COD ו-ABO ($S_{\Delta COD} + S_{\Delta ABO}$).

פתרון:

הנחה

① $OC \parallel AB$

② BD קוטר

③ $OC = OD = R$

④ $\angle ODC = \angle OCB = \alpha$

*היא שווה לזו בסוף הפרק

⑤ $\angle OCD = \angle BED$

נימוך

נתון

נתון

הנחה כדל

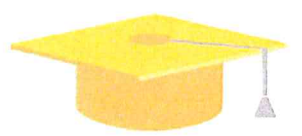
במשולש ABO זווית שווה
מאחר ש OC || AB אז זווית AOC = זווית OCB

זווית OCB = זווית OBC

לכן זווית AOC = זווית OBC

נחידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



נילוי

כאן המקרה. (5), (6)

לג

(6) $\angle AED = \angle CDO$



(7) $\angle ABD = 2\alpha$

זווית חילוקיית המשולש שווה לכוכב הזווית שאינן קטופה זהה. (5), (6)

(8) $\angle ACD = \angle ABD = 2\alpha$

זווית היקפית הנשענת על זווית קטנה שווה

(9) $\angle ACO = \alpha$

חייב להיות. (4), (8)

(10) \cos חזקה של $\angle A$ DCA

האזכרה חזקה של (4), (9)



(11) $\frac{EB}{BA} = 2$

נתיין

(12) $BE = BD = 2R$

המשולש הוא זווית שווה נגזרות לאנך שווה. (6), (8)

(13) $BA = R$

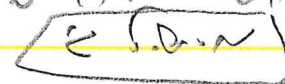
חייב. (10), (12)

(14) $OA = OB = R$

האזכרה כביזום

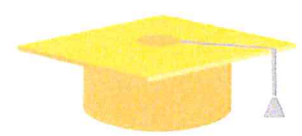
(15) המשולש שווה זווית קטנה

האזכרה שווה זווית קטנה (13), (14)



למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



נילוי

בנייה של

נילוי

נוסחת שטח טרפז

אבי (17), (18), (13), (3)

חישוק

נוסחת שטח משולש (16), (20)

שטח צלעיון S.S

יחס הצלעיון (12), (3), (22)

יחס השטחים בשולשיק

קואליט שלוק ארי קואליט

הצלע השלישית (22), (23)

חיבוק שטחים

חישובי אבי (17), (24), (25)

חיבוק שטחים

למשל 3'

טענות

(16) נוקיז לוקה OE

5 קצת AB

$$S_{COBE} = 9 \quad (17)$$

$$S_{COBE} = \frac{(BE + CO) \cdot OE}{2} \quad (18)$$

$$9 = \frac{(2R + R) \cdot OE}{2} \quad (19)$$

$$R \cdot OE = 6 \quad (20)$$

$$S_{ABO} = \frac{R \cdot OE}{2} = 3 \quad (21)$$

$$S_{DOC} \sim S_{OEB} \quad (22)$$

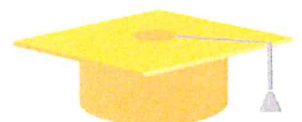
$$\frac{BE}{CO} = \frac{2R}{R} = 2 \quad (23)$$

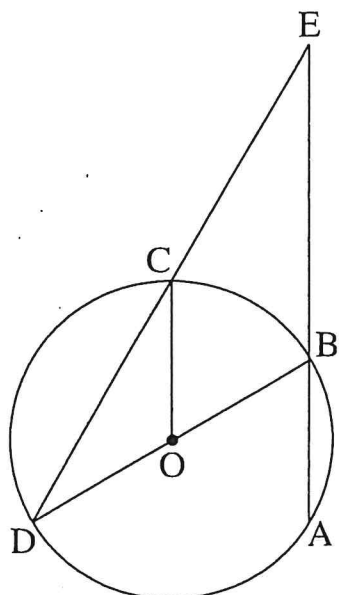
$$\frac{S_{DOC}}{S_{DBE}} = \frac{1}{4} \quad (24)$$

$$S_{DOC} + S_{COBE} = S_{DBE} \quad (25)$$

$$S_{COD} = 3 \quad (26)$$

$$S_{COD} + S_{ABO} = 6 \quad (27)$$



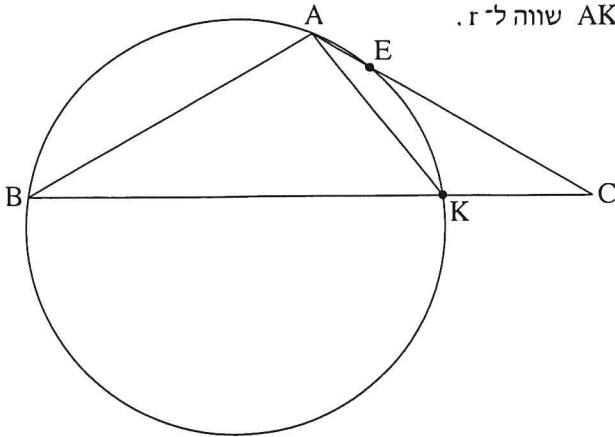


למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



5. ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$) ששניים מקודקודיו, A ו-B, נמצאים על מעגל שרדיוסו r, כמתואר בציור. המעגל חותך את הצלעות AC ו-BC בנקודות E ו-K בהתאמה. נסמן: $\angle KAC = \beta$, $\angle BAK = \alpha$.



א. (1) הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AKC שווה ל-r.

(2) הוכח: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{BK}{KC}$

ידוע: $\angle ABK > \beta$, נתון: $\alpha + \beta = 120^\circ$.

ב. הראה כי α היא זווית קהה.

נתון: $BK = 55$, $AK = 28$.

ג. חשב את α ואת אורך הקטע BC.

המשך בעמוד 5

פתרון:
נוסיף את הנקודה אסוסט:

1. $\triangle ABC$

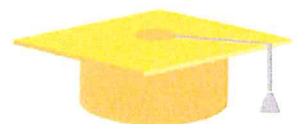
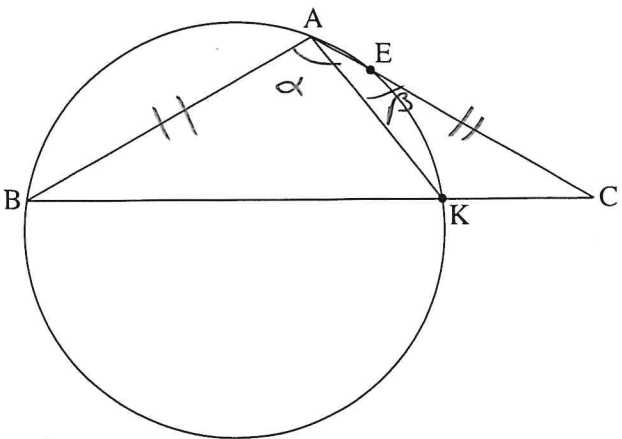
$$\angle ABC = \angle ACB = 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$\triangle ABK$

מסמ הסינוסים:

$$\frac{AK}{\sin(90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2})} = 2r$$

$$AK = 2r \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$



ΔAKC
(סל/אל - הרדיוס R - ו/ולתל דלסל)

גס.נוס.:

$$\frac{AK}{\sin(90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2})} = 2R$$

$$\frac{2r \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = 2R$$

$$\boxed{r = R}$$

ΔABK (2)

$$\frac{BK}{\sin \alpha} = 2r$$

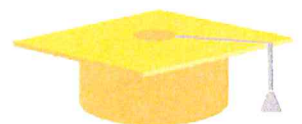
$$\frac{KC}{\sin \beta} = 2r$$

ΔAKC

דכול:

$$\frac{KC}{\sin \beta} = \frac{BK}{\sin \alpha}$$

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{BK}{KC}}$$



ה. נתון: $\alpha + \beta = 120^\circ$, $\beta < \angle ABK$

\Downarrow

$\angle ABC = \angle ACB = 90^\circ - \frac{120^\circ}{2} = 30^\circ$

נכון: $\angle ABK = 30^\circ$

\Downarrow

$\beta < 30^\circ$

\Downarrow

$\alpha > 90^\circ$

\Downarrow

α חריף זהה

ד. נתון: $BK = 55$, $AK = 28$

המשולש ABK ישר זווית

$\frac{AK}{\sin \angle ABK} = 2r \Rightarrow \frac{28}{\sin 30^\circ} = 2r \Rightarrow r = 28$

המשולש ABK ישר זווית

$\frac{BK}{\sin \alpha} = 2r \Rightarrow \frac{55}{\sin \alpha} = 56 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{55}{56}$

$\alpha = 79.756^\circ$

נכון:

$\alpha = 100.844^\circ$



$\alpha = 100.844^\circ$ $\alpha // S$ - דהה, וכן

נחלקו יא - א ב שולש : AKC

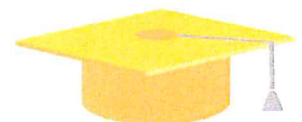
$\beta = 170^\circ - \alpha = 19.156^\circ$

משפט הסינוסים:

$\frac{KC}{\sin 19.156^\circ} = 2.28 \Rightarrow KC = 78.376$

נחבר היקף, ונדפא:

$BC = 73.376$



6. נתונה הפונקציה $f(x) = (x + 3)^4(2 - x)$ המוגדרת לכל x .

- א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
 (2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
 (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x-3)}$.

- ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
 (2) האם הפונקציה $g(x)$ חותכת את הצירים, ואם כן, באילו נקודות? נמק את תשובתך.
 (3) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$?
 (4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- ג. (1) הראה כי $f(x) \geq 48$ לכל $-1 \leq x \leq 1$.

(2) הסבר מדוע $\int_2^4 g(x) dx \leq \frac{1}{24}$.

פתרון:
א.כ

$$f(x) = (x+3)^4(2-x)$$

$$f(0) = (0+3)^4(2-0) = 162$$

(1) ציר y:

$(0, 162)$

$$(x+3)^4(2-x) = 0$$

ציר x:

$(2, 0)$

↙ ↘
 $x = -3$ $x = 2$

$(-3, 0)$

$(-3, 0) \quad (2, 0) \quad (0, 162)$

אסימטות:



(2) נגזרת:

$$f'(x) = 4(x+3)^3(2-x) - (x+3)^4$$

$$f'(x) = (x+3)^3 \cdot [8 - 4x - x - 3] = (x+3)^3(5-5x)$$

נשווה לאפס ונסתור:

$$(x+3)^3(5-5x) = 0$$

$$\begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ x = -3 & x = 1 \end{matrix}$$

$$f(1) = (1+3)^4(2-1) = 256$$

שיעור:

$$f(-3) = 0$$

הנדודות הן: $(-3, 0)$, $(1, 256)$

נדגף את סוג הנדודות:

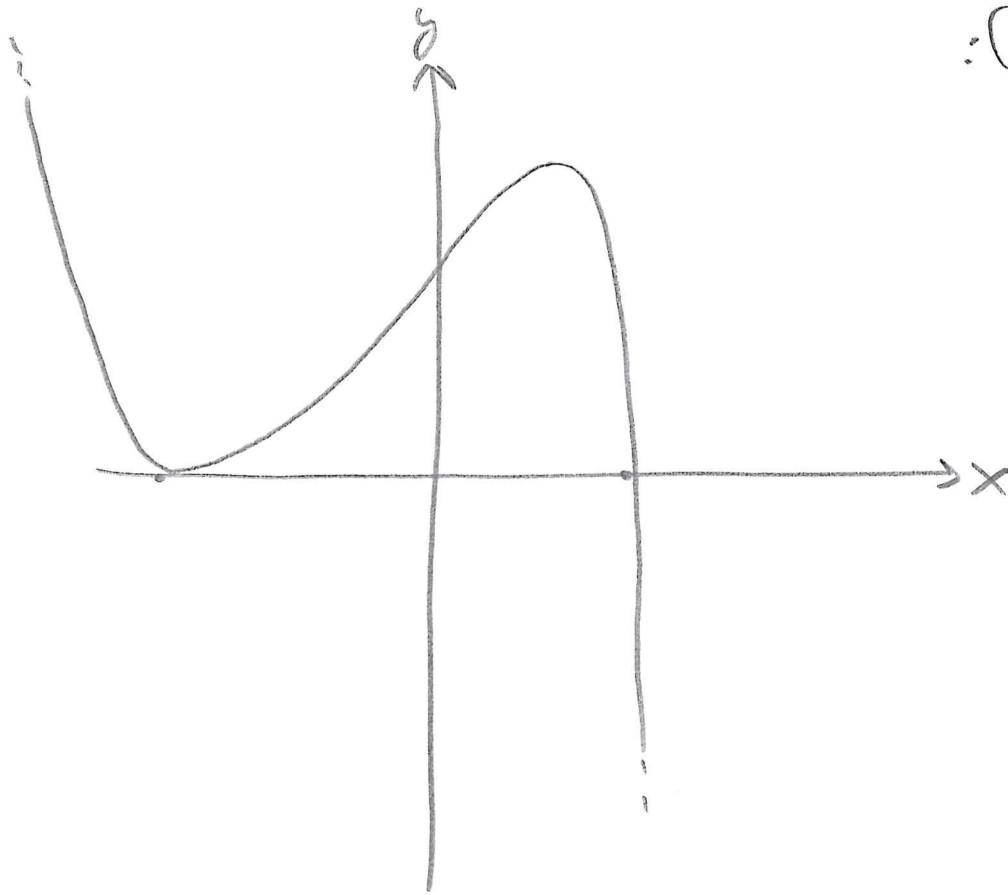
| | | | | | |
|-------|----|----|---|---|---|
| x | -4 | -3 | 0 | 1 | 2 |
| f'(x) | - | 0 | + | 0 | - |
| f(x) | ↘ | . | ↗ | . | ↘ |

אם הסבלה:

$(1, 256)$ - נקודת מקסימום
 $(-3, 0)$ - נקודת מינימום



(3) נסרט:



ג. נתון הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x-3)}$

$$f(x-3) = (x-3+3)^4(2-(x-3)) = x^4(5-x)$$

\Downarrow

$$g(x) = \frac{1}{x^4(5-x)}$$

(1) תחום הגדרה: $x \neq 0, 5$

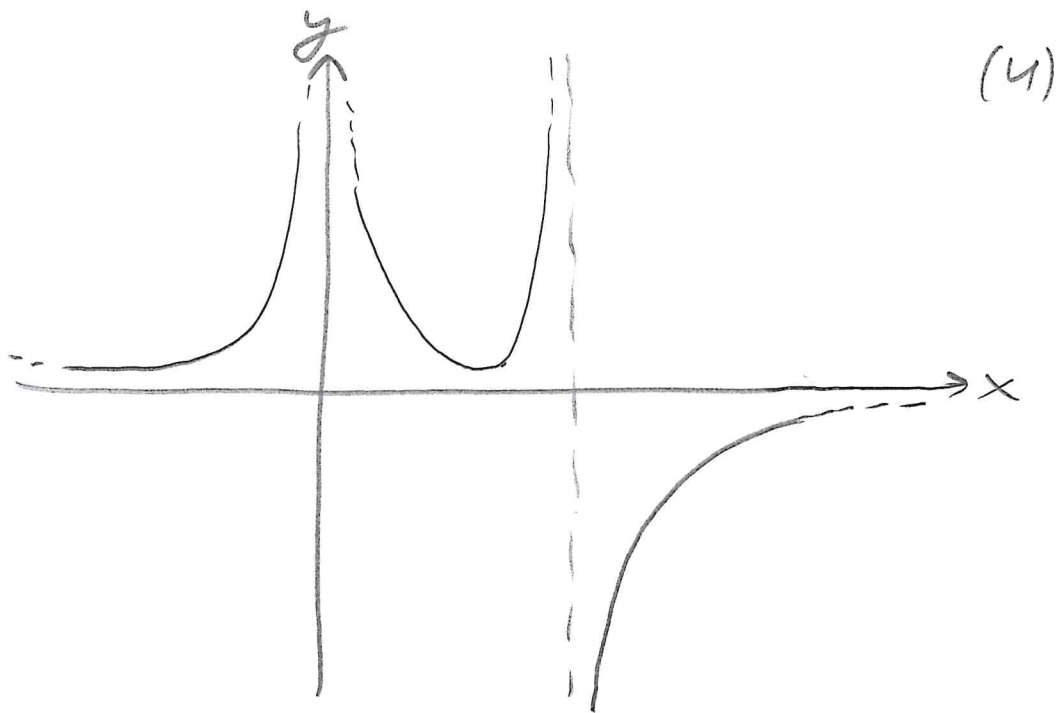
(2) $g(x)$ לא מוגדרת יחד עם $x=0$ כי $x=0$ לא בתחום הגדרה, והשאלה לא מופיעה בלחץ.



(3) הפונקציה $f(x-3)$ היא הצגה ימנית של $f(x)$, זכור ודורגה הדירוג של $f(x-3)$ הן $(4, 256) \sim$ קטילינג $(0, 0) \sim$ נילוג.

הפונקציה $f(x)$ היא הפונקציה הפוכה של $f(x-3)$, זכור תחזמי האיה והיחידה של הפוכים. כולן:

צ'יה: $x < 0, 4 < x < 5, x > 5$
יכ'צה: $0 < x < 4$



ג. (1) $f(x)$ גדלה במהירות $1 \leq x < 2$
 נמצא את $f(-1) =$

$$f(-1) = (-1+3)^4(2-(-1)) = 2^4 \cdot 3 = 48$$

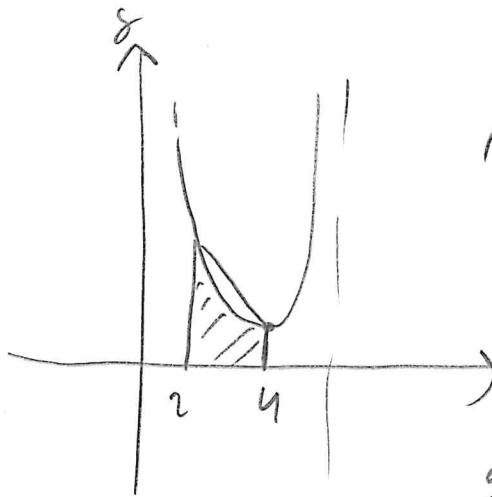
נבדוק שבמרום הנמוך הנקודה $(-1, 48)$
 היא מינימום מוחלט, ולכן במרום

$$48 \leq f(x) \quad 1 \leq x < 2$$

(2) האינטגרל $\int_2^4 g(x) dx$

לפיגורא - הטלה הסיווג $g(x)$ הפונקציה

היא קריאה x .



הטלה הפה קטן שטח
 טרפז סקסיטור g
 הישרים $x=2$ $x=4$
 נחשב את שטח האינטגרל:

$$g(2) = \frac{1}{f(2)} = \frac{1}{48}$$

$$g(4) = \frac{1}{f(4)} = \frac{1}{256}$$



שכי נוסח - טח טרפס:

$$\int_{\text{טרפס}} = \frac{(\frac{1}{48} + \frac{1}{256}) \cdot 2}{2} = \frac{1}{48} + \frac{1}{256} = \frac{19}{768}$$

$$\frac{1}{24} = \frac{32}{768}$$

כיף.

$$\frac{19}{768} < \frac{1}{24}$$

לכיון =

$$\int_2^4 g(x) dx \leq \frac{1}{24}$$

ולכן:



מתמטיקה, קיץ תש"ף, מועד ב, מס' 035581 + נספח

- 6 -

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2}$. $a \neq 0$ הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות a , והבחן בין $a > 0$ ובין $a < 0$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$. (1)
 - מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה). (2)
 - הראה שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית. (3)
 - מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה). (4)
 - מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$. (5)
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בעבור $a > 0$ וסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בעבור $a < 0$.
בעבור כל גרף שסרטטת כתוב את התחום המתאים של הפרמטר a .
- ג. מצא בעבור אילו ערכים של הפרמטר a גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את הישר $y = 1$ או משיק לו.

$a < 0$

I: $x \neq 0$

II: $x^2 - a \geq 0$

אכיוון a שלילי (קודם)
חייגים על שני ביטויים
תיוגיה ולכן הטו שיווין
נבין על x .

$|x \neq 0|$

(1) איון חיתוך עם ציר y
($x=0$ לא בתחום)

$$0 = \frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2}$$

$$x^2 - a = 0 \rightarrow x^2 = a$$

\emptyset אכיון a שלילי

(1) איון חיתוך עם ציר x

$a > 0$

I: $x \neq 0$

II: $x^2 - a \geq 0$

$x^2 - a = 0$

$x^2 = a$

$x = \pm\sqrt{a}$



$| -\sqrt{a} \geq x \text{ ו} x \geq \sqrt{a} |$

(2) איון חיתוך עם ציר y
($x=0$ בתחום)

$$0 = \frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2}$$

$$\sqrt{x^2 - a} = 0 \rightarrow x^2 = a$$

$(\sqrt{a}, 0), (-\sqrt{a}, 0)$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



$a < 0$

$a \geq 0$

$f(x) = f(-x)$ (1) כיון $> z$ (3)

$$\frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2} = \frac{\sqrt{(-x)^2 - a}}{(-x)^2}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2}$$

י.ע.ו

אין סוגי פונקציה אנכית
(כאשר x לא שואף לאינסוף ולא גאוס)
(אין סוגי $a \neq 0$)

אין סוגי פונקציה אנכית (2)

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2 - a}}{\sqrt{x^4}} = \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{a}{x^4}} = 0$$

* אפשר לראות שהאסימטוטה אנכית היא $y=0$ מכיוון שהפונקציה שואפת לאינסוף או גאוס

$y=0$

$y=0$



$a < 0$

$a > 0$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a}} \cdot x^2 - \sqrt{x^2-a} \cdot 2x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x^3}{\sqrt{x^2-a}} - 2x\sqrt{x^2-a}}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x^3 - 2x(x^2-a)}{\sqrt{x^2-a}}}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-x^3 + 2ax}{x^4 \sqrt{x^2-a}}$$

$$\frac{-x^3 + 2ax}{x^4 \sqrt{x^2-a}} = 0$$

$$x(-x^2 + 2a) = 0$$

↓
אם $x \neq 0$

↓
 $x^2 = 2a$

$x^2 = 2a$
 \emptyset

$x^2 = 2a$
 $x = \pm \sqrt{2a}$



$a < 0$

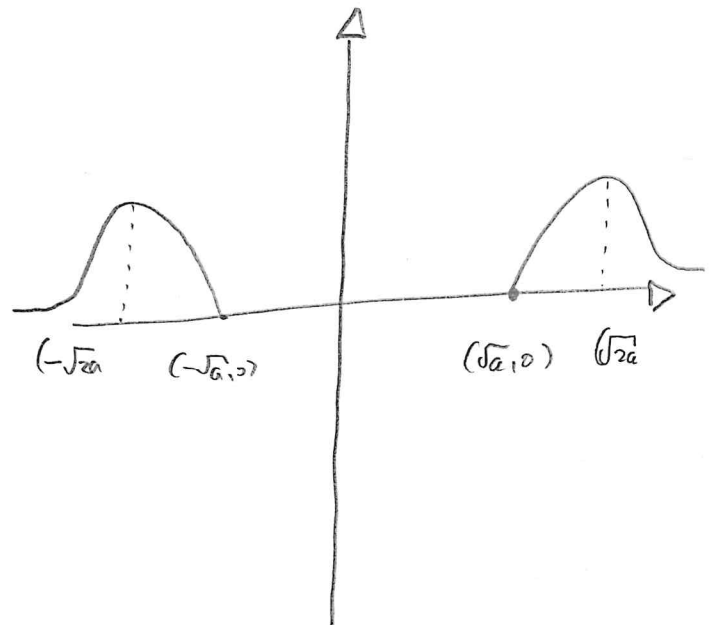
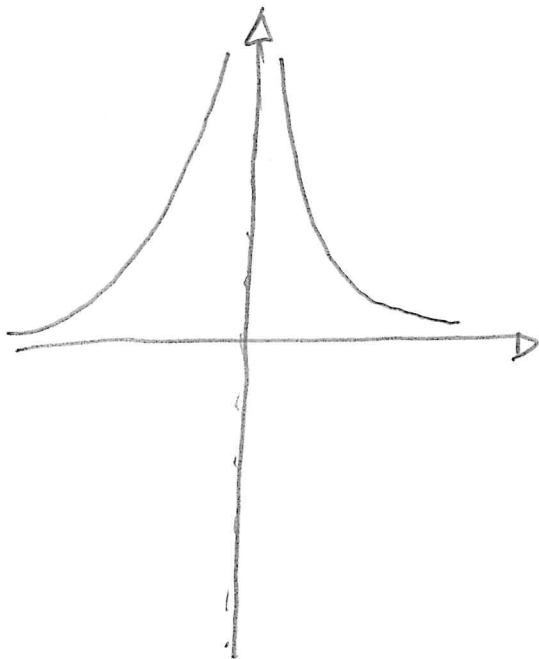
| | | | |
|------|------------|------------|------------|
| x | $x < 0$ | 0 | $x > 0$ |
| y' | $+$ | 0 | $-$ |
| y | \nearrow | \uparrow | \searrow |

$x < 0$: עלייה
 $x > 0$: ירידה

$a > 0$

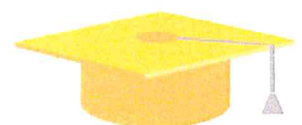
| | | | | | | | |
|------|------------------|--------------|-------------|--------------|------------|-------------|-----------------|
| x | $x < -\sqrt{2a}$ | $-\sqrt{2a}$ | $-\sqrt{a}$ | 0 | \sqrt{a} | $\sqrt{2a}$ | $x > \sqrt{2a}$ |
| y' | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| y | \nearrow | \uparrow | \searrow | \downarrow | \nearrow | \uparrow | \searrow |

$x < -\sqrt{2a}$: עלייה
 $-\sqrt{2a} < x < -\sqrt{a}$: ירידה
 $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$: ירידה
 $\sqrt{a} < x < \sqrt{2a}$: עלייה
 $x > \sqrt{2a}$: ירידה



למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



ז. עבור $a < 0$ תהינה תמיד שתי נקודות חיתוך.
 עבור $a > 0$ נרשם שטוחה ה- y של נקודת הקיצון
 והיא $y = 1$ או $y = -1$

$$f(\sqrt{2a}) = \frac{\sqrt{2a-a}}{2a} = \frac{\sqrt{a}}{2a}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{2a} \geq 1 \quad | \cdot 2a > 0$$

$$\sqrt{a} \geq 2a$$

$$2a - \sqrt{a} \leq 0$$

$$2a - \sqrt{a} = 0$$

$$2a = \sqrt{a}$$

$$4a^2 = a$$

$$4a^2 - a = 0$$

$$a(4a - 1) = 0$$

$$\begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ a=0 & a=\frac{1}{4} \\ \delta & \end{matrix}$$



$$0 < a \leq \frac{1}{4} \rightarrow$$

$$\underline{\underline{| 0 < a \leq \frac{1}{4} \quad \vee \quad a < 0 |}}$$



8. המשולש ABC חסום במעגל.

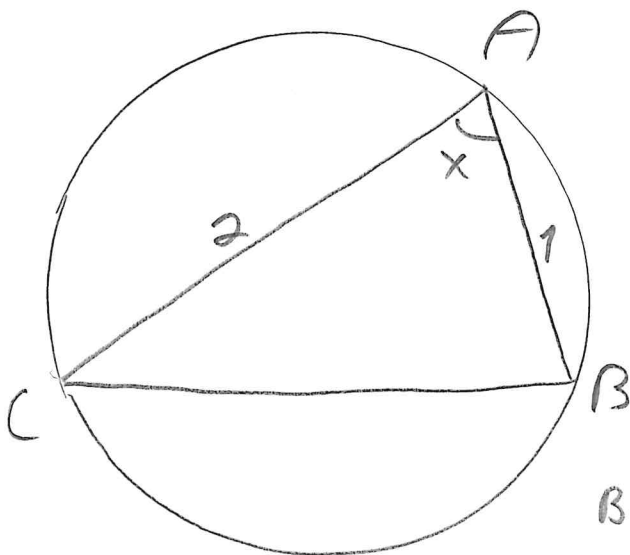
נתון: $AC = 2$, $AB = 1$.

נסמן: $\sphericalangle BAC = x$.

א. (1) הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC שווה ל- $\frac{\sqrt{5-4\cos x}}{2\sin x}$.

(2) מצא את הערך של x שבעבורו רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא מינימלי.

ב. מצא את קוטר המעגל בעבור ערך ה- x שמצאת בסעיף א(2).



פתרון:
(שני) את הנתונים.

א. (1) נניח R רדיוס המעגל
החוסם את המשולש
הנתון.

$$BC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos x$$

$$BC^2 = 5 - 4 \cos x$$

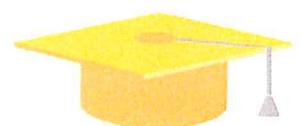
$$BC = \sqrt{5 - 4 \cos x}$$

נניח R רדיוס המעגל החוסם את המשולש הנתון:

$$\frac{BC}{\sin x} = 2R$$

$$2R = \frac{\sqrt{5 - 4 \cos x}}{\sin x}$$

$$R = \frac{\sqrt{5 - 4 \cos x}}{2 \sin x}$$



(2) בונדליי - הרפיוס היא

$$f(x) = \frac{\sqrt{5-4\cos x}}{2\sin x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{4\sin x}{2\sqrt{5-4\cos x}} \cdot 2\sin x - 2\cos x \cdot \sqrt{5-4\cos x}}{4\sin^2 x} \quad (5/7)$$

$$f'(x) = \frac{\frac{4\sin^2 x}{\sqrt{5-4\cos x}} - 2\cos x \cdot \sqrt{5-4\cos x}}{4\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{4\sin^2 x - 2\cos x(5-4\cos x)}{\sqrt{5-4\cos x}}}{4\sin^2 x}$$

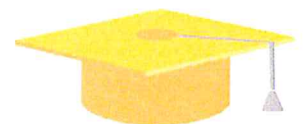
$$f'(x) = \frac{4\sin^2 x - 10\cos x + 8\cos^2 x}{4\sin^2 x \cdot \sqrt{5-4\cos x}}$$

$$f'(x) = \frac{2\sin^2 x - 5\cos x + 4\cos^2 x}{2\sin^2 x \cdot \sqrt{5-4\cos x}}$$

(שווה ל- הנאמר אלוס ונרלו לניחוח:

$$2\sin^2 x - 5\cos x + 4\cos^2 x = 0$$

$$: \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{נסתה} \quad \sqrt{}$$



$$2(1 - \cos^2 x) - 5 \cos x + 4 \cos^2 x = 0$$

$$2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$$

נסתור משוואה דיבוקית ונדבר:

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{או} \quad \cos x = 2$$

למשוואה $\cos x = 2$ אין פתרון.

נסתור את המשוואה השנייה:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm 60^\circ + 720^\circ$$

בתחום שלילי (שלילי) (720) רק $x = 60^\circ$

כאן ישנו נקודת מינימום:

$$f'(45^\circ) = -0.70 < 0$$

$$f'(90^\circ) = 0.44 > 0 \Rightarrow \text{נקודת מינימום}$$

תשובה: עבור $x = 60^\circ$ יהיה זה כדאי

לגזר חוסם מינימלי.

ד. נחשב את הזווית:

$$2R = 2 \cdot \frac{\sqrt{5 - 4 \cos 60^\circ}}{2 \sin 60^\circ} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{2}$$

