

מתמטיקה 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	20×2	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	20×1	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות	—	20×2	—	40 נקודות
				סך הכול	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. המרחק בין עיר א' ובין עיר ב' הוא 96 ק"מ.
מכונית ומשאית יצאו באותו הזמן מעיר א' ונסעו לכיוון עיר ב'.
בתחילה נסעה המכונית במהירות קבועה של V_1 קמ"ש.
לאחר שעברה 15 ק"מ מן הדרך, היא עצרה בצד הדרך למשך חצי שעה, לצורך תיקון תקלה.
לאחר שתוקנה התקלה, המשיכה המכונית בדרכה במהירות קבועה של 90 קמ"ש.
המשאית נסעה כל הדרך במהירות קבועה של V_2 קמ"ש.
היא חלפה על פני המכונית 3 דקות לאחר שהמכונית עצרה בצד הדרך.
המכונית והמשאית הגיעו לעיר ב' באותו הזמן.
א. מצא את V_1 ואת V_2 .
ב. כמה זמן אחרי שהמכונית והמשאית יצאו לדרך היה המרחק ביניהן 3 ק"מ? (מצא שניים משלושת המקרים).

2.

 a_n היא סדרה חשבונית. k ו- p הם מספרים טבעיים. $k < p$.נתון: $a_p = k$, $a_k = p$.א. (1) הוכח שהפרש הסדרה a_n הוא -1 .ב. (2) הבע את a_1 באמצעות k ו- p .הסדרה c_n מוגדרת כך: $c_n = a_n - n$.נתון כי סכום 6 האיברים הראשונים בסדרה c_n הוא 0.ב. (1) מצא את a_1 .(2) מה הם ערכי k ו- p ? מצא את כל האפשרויות.ג. חשב את הסכום $(c_1 - c_2)^2 + (c_3 - c_4)^2 + \dots + (c_{99} - c_{100})^2$. נמק.

3.

בקופסה יש 12 כדורים. רובם כחולים והשאר אדומים.

הוציאו באקראי כדור מן הקופסה, החזירו אותו לקופסה, ושוב הוציאו באקראי כדור והחזירו אותו.

ההסתברות ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים היא $\frac{4}{9}$.

א. מצא כמה כדורים כחולים יש בקופסה.

ב. הוסיפו לקופסה כדורים צהובים.

לאחר ההוספה הוציאו באקראי כדור, החזירו אותו, ושוב הוציאו באקראי כדור והחזירו אותו.

ההסתברות שהוציאו שני כדורים בצבעים שונים נשארה $\frac{4}{9}$.

כמה כדורים צהובים הוסיפו לקופסה?

העבירו את כל הכדורים הצהובים לכלי אחר והשאירו בקופסה רק את הכדורים הכחולים והאדומים.

ג. הוציאו באקראי מן הקופסה כדור אחרי כדור שוב ושוב (ללא החזרה), עד שהוציאו כדור אדום.

מהי ההסתברות שמספר ההוצאות היה גדול מ-3 ?

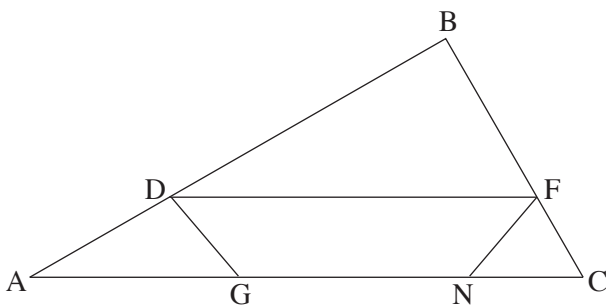
פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. AD ו-CE הם חוצי זווית במשולש ABC, ונקודת החיתוך שלהם היא F.
- נתון: $\angle ABC = 60^\circ$.
- א. הוכח כי אפשר לחסום את המרובע BDFE במעגל.
- נתון: FB הוא קוטר במעגל החוסם את המרובע BDFE.
- ב. הוכח שהמשולש ABC הוא משולש שווה צלעות.
- המשך הקטע BF חותך את הצלע AC בנקודה G.
- ג. הוכח כי הקטע FG שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המרובע BDFE.
- בנקודה F מעבירים משיק למעגל החוסם את המרובע BDFE.
- המשיק חותך את הצלעות BA ו-BC בנקודות K ו-L בהתאמה.
- ד. מצא את היחס $\frac{KL}{AC}$. נמק את תשובתך.

5. במשולש ABC הנקודות D ו-F נמצאות על הצלעות BA ו-BC בהתאמה כך ש- $DF \parallel AC$. הנקודות G ו-N נמצאות על הצלע AC כך שהמרובע DFNG הוא טרפז שווה שוקיים, כמתואר בציור.

נסמן: $\angle BAC = \alpha$, $\angle FNC = \beta$.נתון: $AD = 7$, $FC = 4$, $\angle FCN = 2\alpha$.

א. (1) הראה כי: $\frac{FN}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin \beta}$.

(2) חשב את α .

נתון: שטח המשולש BDF הוא 56.

ב. מצא את אורך הקטע DF.

ג. מהו היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש FCN ובין רדיוס המעגל החוסם את המשולש DAG? נמק.

**פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות
ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)**

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{6}{2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3}$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

ענה על הסעיפים א-ג בעבור התחום הנתון.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $h(x) = |f(x) + 2|$, שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

(2) k הוא פרמטר. מצא את כל הערכים של k שבעבורם הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה $h(x)$ בארבע

נקודות שונות.

נתונה הפונקציה $g(x) = |f(x)| + 2$, שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ג. האם לכל x בתחום ההגדרה $h(x) < g(x)$? נמק.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3x}{4x^2 - 1}$ שתחום הגדרתה הוא $x \neq \pm \frac{1}{2}$.

א. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{\frac{3x}{4x^2 - 1}}$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים?

נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש בדיוק נקודת פיתול אחת. שיעור ה- x של נקודה זו קטן מאפס.

ג. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $g'(x)$.

ד. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x) = \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{4x^2 - 1}}$?

8. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 + 1$.

t הוא פרמטר. נתון: $0 < t < 1$.

בנקודה שבה $x = t$ העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ (ראה ציור).

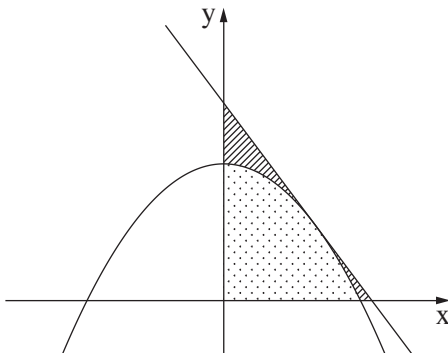
א. הראה כי משוואת המשיק היא $y = -2tx + t^2 + 1$.

נסמן ב- S את השטח המקווקו בציור (השטח המוגבל על ידי

גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק ועל ידי הצירים).

ב. מצא בעבור איזה ערך של t השטח S הוא מינימלי.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.



נסמן ב- A את השטח המנוקד (השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים).

ג. קבע בעבור כל אחת משתי הטענות שלפניך (i - ii) אם היא נכונה או לא נכונה. נמק את תשובתך.

(i) קיים ערך של t שבעבורו $\frac{A}{S}$ הוא מקסימלי.

(ii) קיים ערך של t שבעבורו $\frac{A}{S}$ הוא מינימלי.

בהצלחה!