

פתרון הבחינה במתמטיקה

חורף תש"פ, 2020, שאלון: 35582

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע": אודי נעים, ריקי טל, עמית איטון, אביחי כהן, קובי שרוני, ארד טלמון, מוריס איבגי, יאיר גולני, יהודה מנצור, רועי גבע, אריק דז'לדטי, יואל גבע

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





4. הנקודה A נמצאת על האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ברביע הראשון. a ר b הם פרמטרים חיוביים.

נתון: $b > a$, אורך הציר הגדול של האליפסה הוא 13.

F_1 ו- F_2 הם מוקדי האליפסה.

היקף המשולש F_1AF_2 הוא 25 ושטחו 12.

א. מצא את משוואת האליפסה.

ב. מצא את שיעורי הנקודה A.

דרך הנקודה A עוברת פרבולה שמשוואתה היא $y^2 = 2px$ ($p > 0$) ואינו שלם).

דרך הנקודה A העבירו משיק לפרבולה. המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה L.

ג. מצא את שיעור ה- x של הנקודה L.

הפרבולה והאליפסה נחתכות בנקודה נוספת, B.

הנקודה D נמצאת על הישר AB.

ד. מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות כל נקודות מפגשי התיכונים במשולשים ALD.

פתרון:

א. הציר הגדול של האליפסה הוא $2a$,

$$2a = 13$$

היקף המשולש F_1AF_2 אינו אלא בנקודה A

$$2c + 2a = 25$$

$$a = 6.5 = a^2 = \frac{169}{4}$$

$$c = 6$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad , \quad a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 + 6^2 = 6.5^2 \Rightarrow b^2 = \frac{25}{4}$$



נניח שאל שאלה הוליסטה:

$$\frac{x^2}{\frac{169}{4}} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{4x^2}{169} + \frac{4y^2}{25} = 1}$$

ק. שטח המשולש F_1, A, F_2 הוליסטה:

$$S = \frac{F_1 F_2 y_A}{2} = \frac{2c \cdot y_A}{2} = c y_A$$

$$6 \cdot y_A = 12 \quad \text{נכונות}$$

$$y_A = 2$$

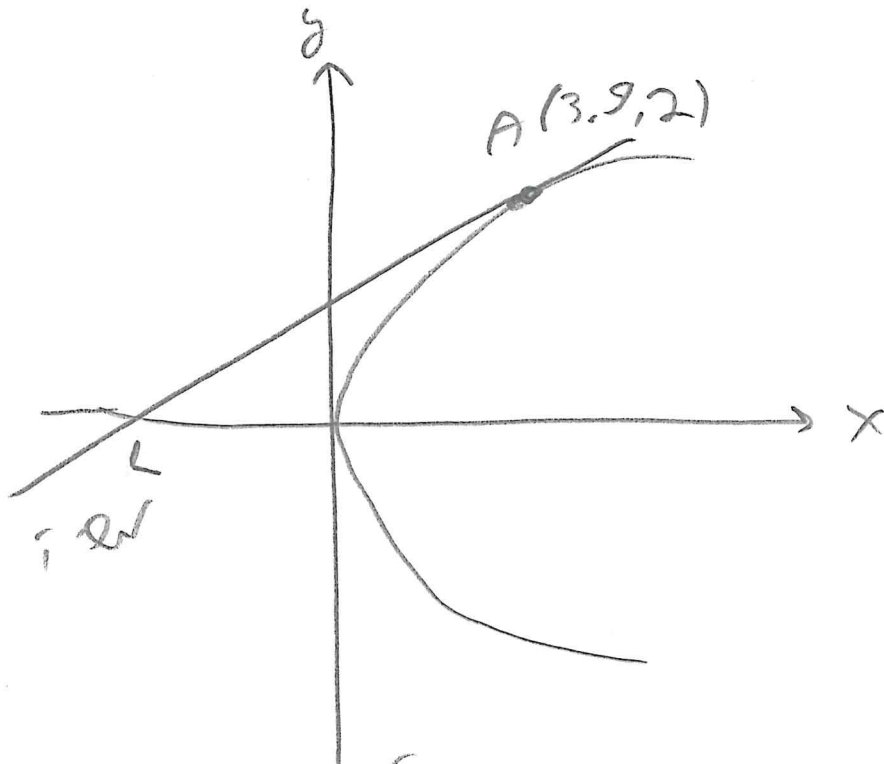
נניח שאל שאלה הוליסטה: $y = 2$ קליל

$$\frac{4x^2}{169} + \frac{4 \cdot 2^2}{25} = 1 \Rightarrow \frac{4x^2}{169} = \frac{9}{25}$$

$$x^2 = \frac{1521}{100} \Rightarrow x = 3.9$$

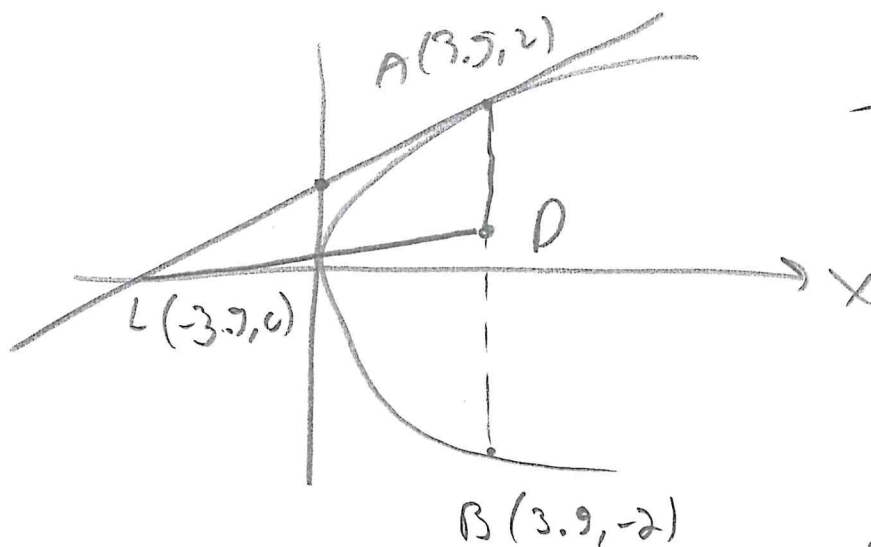
$$\boxed{A(3.9, 2)} \quad \text{אסימטרית}$$





ד. שיעור:

שיעור ה- x של הנקודה L נקרא x_L (נקודת חיתוך עם ציר ה- x)
של הנקודה A נקרא x_A



3. גיאומטריה זוויתית
ואם הפונקציה

זכור! נקודות
 A ו- B יש

אותו שיעור x .

זכור! שאלה היא

AB היא $x=3.9$



מכאן שנקודה 0 היא $D(3.9, 4)$.

אם לא נקבע AL נקודה $(0, 1)$.

נקודת מפגש התיכונים מחזקת את תיכון
 ביחס 2:1. מכיוון ששיעור x של נקודה 0
 דבוק נקודת שהם הוא האינטראקציה המבוקשת
 נחשב $x = \frac{1}{3} \cdot 3.9 = 1.3$

לכיוון, משוואת הנדסה האינטראקציה היא

$$\boxed{x = 1.3}$$

(ניתן להציג אותם משוואה גם פון
 חזקת חלק ביחס נתון)





2. הישר ℓ עובר דרך ראשית הצירים, O, ומאונך למישור π . הנקודה $P(-1, -1, 2)$ היא נקודת החיתוך של הישר ℓ והמישור π .
- א. מצא את משוואת המישור π .
- OABCD היא פירמידה ישרה שבסיסה, ABCD, הוא מלבן הנמצא על המישור π (הנקודה O היא ראשית הצירים). הנקודות A ו-B הן נקודות החיתוך של המישור π עם ציר ה-x ועם ציר ה-y בהתאמה.
- ב. (1) מצא את שיעורי הקודקודים A ו-B.
(2) מצא את שיעורי הקודקודים C ו-D.
- ג. חשב את גודל הזווית בין הפאה הצדדית AOB בפירמידה OABCD ובין בסיס הפירמידה.
- הנקודות $F(-4, -2, 0)$ ו- $G(-2, -4, 0)$ נמצאות על הקטע AB.
- ד. (1) הראה כי $|FG| = \frac{1}{3}|AB|$.
(2) מצא שיעורים של שתי נקודות, H ו-I, כך שנפח הפירמידה OFGHI הוא $\frac{1}{3}$ מנפח הפירמידה OABCD. נמק את תשובתך.

C

(א)

אכיון שיהי ℓ מאונך למישור π כיוונו הוא הנורמל למישור:

$$\vec{OP} = (0, 0, 2) - (-1, -1, 2) = (1, 1, -2)$$

ולכן משוואת π היא $x + y - 2z + d = 0$, נציב את נקודת P אכיון שהיא נמצאת על המישור:

$$-1 - 1 - 4 + d = 0 \Rightarrow d = 6$$

משוואת המישור π : $x + y - 2z + 6 = 0$

(ב) אכיון A ו-B הן חיתוך של ציר ה-x וציר ה-y בהתאמה נציב:

A $(x_A, 0, 0)$
 B $(0, y_B, 0)$

נציב במשוואת המישור π ונקבל:

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



$$0 + y_B - 0 + 6 = 0$$

$$| \underline{B(0, -6, 0)} |$$

$$x_A + 0 - 0 + 6 = 0$$

$$| \underline{A(-6, 0, 0)} |$$

(2)

בפירמידה ישורה הזווית (נפח) מרכז המסה הוא צורת הקטעים
 במקרה זה הקטעים הוא מלבן ואכן מפגש האלכסונים הוא נקודה P (מכיוון
 וזווית הפירמידה מיוחדת) הישר l ו- P היא חיתוך הישר l עם מישור (π)
 ואכן נשים אקדקודים C ! D עי' (וסתאית אמצע קטע) (במלבן) אלכסונים חוצים זה
 נמצא בנקודה $P(4, 4, 2)$
 ונקודת:

$$\frac{x_D + 0}{2} = -1, \quad \frac{y_D + 6}{2} = -1, \quad \frac{z_D + 0}{2} = 2$$

$$x_D = -2, \quad y_D = 4, \quad z_D = 4$$

$$z_D = 4 \rightarrow | \underline{D(-2, 4, 4)} |$$

$$\frac{x_C - 6}{2} = -1, \quad \frac{y_C + 0}{2} = -1, \quad \frac{z_C + 0}{2} = 2$$

$$x_C = 4, \quad y_C = -2, \quad z_C = 4$$

$$z_C = 4 \rightarrow | \underline{C(4, -2, 4)} |$$

$$E\left(\frac{-6+0}{2}, \frac{0-6}{2}, \frac{0+0}{2}\right) \quad B! \quad A \quad E \quad \text{אמצע קטע בין } A \text{ ו-} B$$

$$E(-3, -3, 0)$$

מכיוון והפירמידה ישורה משולש AOB הוא שווה שוקיים ואכן OE הוא אקס
 זכר AB (במשולש התיכון מתאחד עם הזווית), PE הוא אורך זכר AB $(PE \perp AB)$ קטע
 אמצעים במשולש ABD מאחר E אמצע AB ! P אמצע AD





הצורה בין המישורים היא וצורה בין שני אנכים אישר החיתוך המשותף
המשותף וצורה בין $\vec{OE}$ ו $\vec{PE}$ היא הצורה המשותפת.
ע"י חישוב (קצוות נקבה)
 $\vec{OE} = (-3, -3, 3)$
 $\vec{PE} = (-2, -2, -2)$

$$\sin \theta = \frac{|\vec{OE} \cdot \vec{PE}|}{|\vec{OE}| |\vec{PE}|}$$

$$\sin \theta = \frac{(-3, -3, 3) \cdot (-2, -2, -2)}{\sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{12}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{12}}, \quad |\theta = 35.26^\circ|$$

$$|\vec{FG}| = \sqrt{(-4+2)^2 + (-2+4)^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}$$

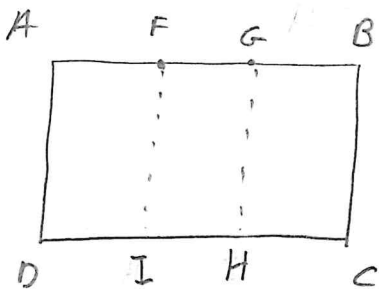
(37)

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-6-0)^2 + (0+6)^2 + 0^2} = 6\sqrt{2}$$

$$\frac{|\vec{FG}|}{|\vec{AB}|} = \frac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \rightarrow |\vec{FG}| = \frac{1}{3} |\vec{AB}|$$

(2) לשם אישור אפסיותם של קצוות FG ו HI , נבדוק זווית אפסית:

נבחר נקודות מתחילתם של הקטעים CD ו FG ונקודה H ו I נמצאות על הקטעים CD ו FG בהתאמה.
לשם זה, נבחר נקודות F ו G על הקטע AB ונקודה H ו I נמצאות על הקטעים CD ו FG בהתאמה.
הנקודה H ו I נמצאות על הקטעים CD ו FG בהתאמה.



$$I(x_1, y_1, z_1) \quad H(x_2, y_2, z_2) \quad \vec{AD} = (4, 4, 4)$$



$$\vec{GH} = \vec{AD} \quad (\text{אנכי גודל ואנכי כיוון})$$

$$\vec{FI} = \vec{AD}$$

$$F(-4, -2, 0)$$

$$\vec{FI} = \vec{AD}$$

$$x_1 + 4 = 4$$

$$y_1 + 2 = 4$$

$$z_1 - 0 = 4$$

$$I(0, 2, 4) \quad \text{נסקן}$$

$$G(-2, -4, 0)$$

$$\vec{GH} = \vec{AD}$$

$$x_2 + 2 = 4$$

$$y_2 + 4 = 4$$

$$z_2 - 0 = 4$$

$$H(2, 0, 4)$$

האנכי: $\vec{AD}$ שני נקודות על הישר CD ש- AD קטע
שני הנקודות A ו- D אינן בקו CD (2/3).



3. א. פתור את המשוואה $z^3 = -1$ (הוא מספר מרוכב). פרט את חישוביך.

ב. a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא $2i$.

ג. הראה כי לכל n טבעי $a_{n+4} = 16a_n$.

ד. הנקודות A, B, C, D במישור גאוס מייצגות את איברי הסדרה a_1, a_2, a_3, a_4 בהתאמה.

ה. a_1 הוא אחד הפתרונות של המשוואה $z^3 = -1$.

ו. הנקודה A נמצאת ברביע הראשון.

ז. (1) סרטט סקיצה של המרובע $ABCD$.

(2) מצא את שטח המרובע $ABCD$.

ח. הנקודות A', B', C', D' מייצגות את איברי הסדרה a_5, a_6, a_7, a_8 בהתאמה.

ט. מצא את היחס בין שטח המרובע $A'B'C'D'$ ובין שטח המרובע $ABCD$. $\left(\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}\right)$. נמק.

$$-1 = 1 \text{cis } 180^\circ$$

$$z^3 = -1 \Rightarrow z^3 = 1 \text{cis } 180^\circ$$

$$z_k = \sqrt[3]{1} \text{cis} \left(\frac{120^\circ}{3} + \frac{360^\circ k}{3} \right)$$

$$z_k = 1 \text{cis} (60^\circ + 120^\circ k)$$

$$z_0 = 1 \text{cis } 60^\circ$$

$$z_1 = 1 \text{cis } 180^\circ$$

$$z_3 = 1 \text{cis } 300^\circ$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad q = 2i = 2 \text{cis } 90^\circ$$

$$a_{n+4} = a_1 q^{n+4-1} = a_n \cdot q^4 = a_n (2i)^4 = a_n \cdot 2^4 \cdot i^4 = a_n \cdot 16 \cdot 1 = 16a_n$$

$$a_{n+4} = 16a_n$$



ז. (1)

$$A = a_1, B = a_2, C = a_3, D = a_4$$

$$a_1 = \bar{z}_K$$

הכיוון הנורמלי

$$\bar{z}_K = 1 \text{ cis } 60^\circ$$

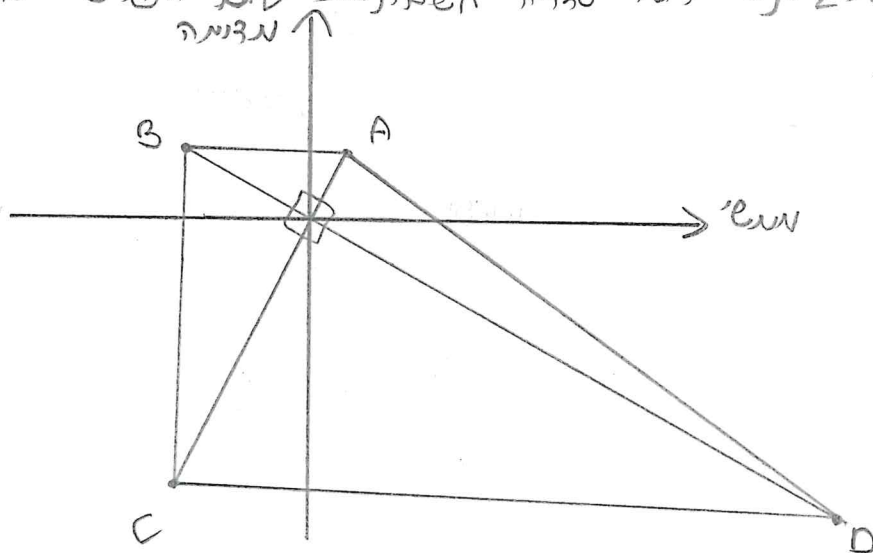
$$A = a_1 = 1 \text{ cis } 60^\circ$$

$$B = a_2 = a_1 \cdot q = 1 \text{ cis } 60^\circ \cdot 2 \text{ cis } 90^\circ = 2 \text{ cis } 150^\circ$$

$$C = a_3 = a_2 \cdot q = 2 \text{ cis } 150^\circ \cdot 2 \text{ cis } 90^\circ = 4 \text{ cis } 240^\circ$$

$$D = a_4 = a_3 \cdot q = 4 \text{ cis } 240^\circ \cdot 2 \text{ cis } 90^\circ = 8 \text{ cis } 330^\circ$$

ניתן לראות כי שורשי הסדרה נק'מים שהממוצע שלהם סדרה הנרשמת עם יתרה 2 (הממוצע) זהו סדרה חשבונית עם הפרש 90.



(2) שטח מלבן ששורשיו שווים: $\frac{AC \cdot BD}{2}$ (הוא נסמך)

$$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25$$

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



$$A' = a_5, B' = a_6, C' = a_7, D' = a_8$$

3.

זאת הדיסטנציה שמיני הסדרה נק'מים שהמנוח חוט סדרה
 הנצטר - אם נניח 2 והמנוח חוט סדרה חסבונה אם הפרס
 90.

אז אם מיני של הסדרה הדיסטנציה הנניח נק' כי

$$A' = 16 \text{ C15 } 60$$

$$B' = 32 \text{ C15 } 150$$

$$C' = 64 \text{ C15 } 240$$

$$D' = 128 \text{ C15 } 330$$

שם מיניל שחכסנו מתכנס לזכר!

$$S_{A'B'C'D'} = \frac{A'C' \cdot B'D'}{2} = \frac{80 \cdot 160}{2} = 6400$$

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{6400}{25} = 256$$

ות'חם בין שםי המינילם





4. נתונה הפונקציה $f(x) = e^{\frac{a}{x-1}} + c$. a ו- c הם פרמטרים.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון: משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$ היא $y = 1$.

הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה $(0, e^{-4})$.

ב. מצא את הערך של c ואת הערך של a .

ג. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(2) מה הם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה)?

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול יחידה בנקודה שבה $x = -1$.

ד. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$? נמק.

ה. העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הפיתול שלה. המשיק עובר בראשית הצירים.

הסבר מדוע השטח הנמצא ברביע השני ומוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y

קטן מ- $\frac{1}{2}e^{-2}$.

$$\begin{aligned} x-1 &\neq 0 \\ \boxed{x \neq 1} \end{aligned}$$

1/

2 כאשר $x \rightarrow \pm\infty$ הגיוני $\frac{a}{x-1}$ מגיע לאפס, ולכן

$e^{\frac{a}{x-1}}$ מגיע לאחד. מאחר והיתן שלפון

יש אסימטות אנכיות? $y=1$, לכן מרשיק $c=0$.

כעת נציב את הנקודה $(0, e^{-4})$ כדי למצוא את a

$$e^{-4} = e^{\frac{a}{0-1}}$$

$$-4 = \frac{a}{-1}$$

$$\boxed{a=4}$$



$$f(x) = e^{\frac{4}{x-1}}$$

ג (1)

$$f'(x) = e^{\frac{4}{x-1}} \cdot \frac{-4}{(x-1)^2}$$

$(x-1)^2$ ביטוי חיובי תמיד

$e^{\frac{4}{x-1}}$ ביטוי מעריכי ולכן חיובי תמיד.

המסקנה היא שהנגזרת שלילית לכל ערך של x בתי. ולכן הפונ' יורדת בתחומה ו- $x > 1$ ו- $x < 1$ (כמובן שפסגה אין תחומי עליה).

ג (2) הפונ' הינה מעריכית בעלת מקדם חיובי ולכן תמידית בכל תיבה.

ג (3) עכני שנתחם לעייר נבדוק איך מתנהג הפונ' סביב $x=1$

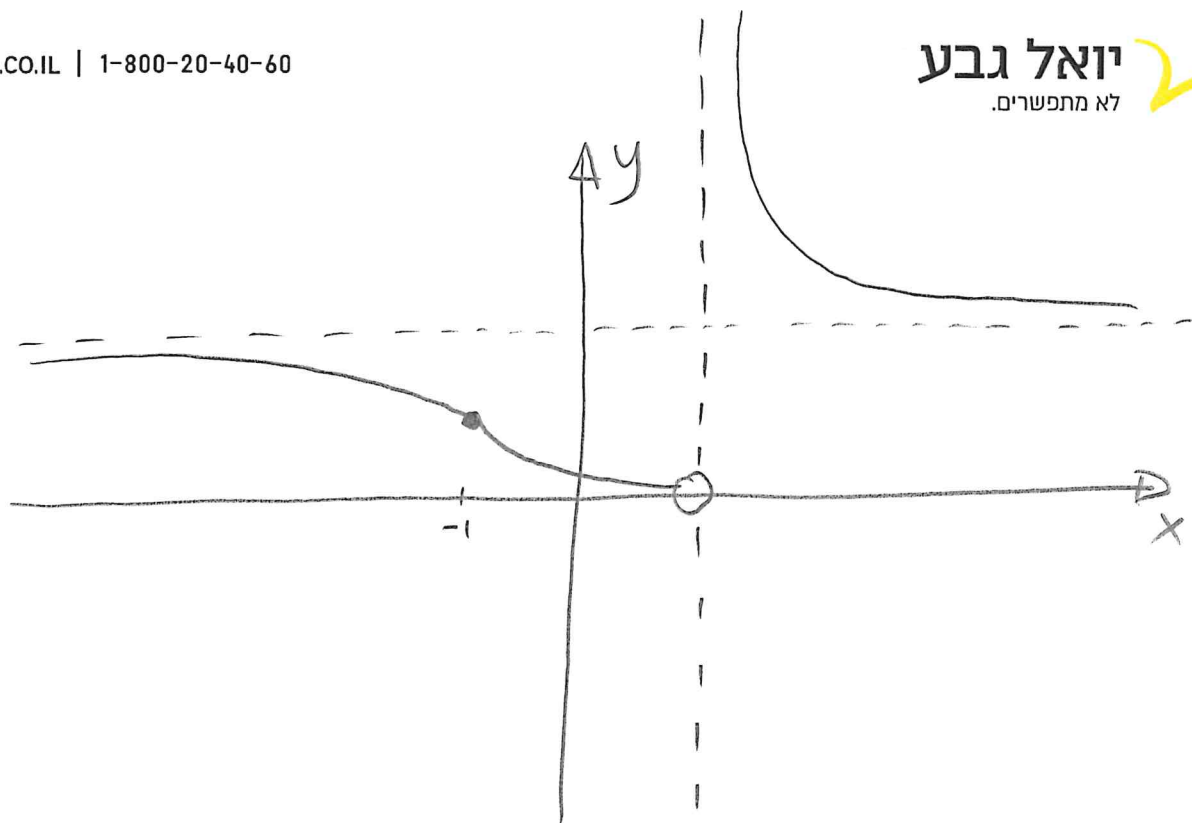
$$f(1^+) = e^{\frac{4}{1^+-1}} = e^{\frac{4}{0^+}} = e^{\infty} = \infty$$

מסקנה: יש אסימ' אנכית כאשר $x \rightarrow 1^+$.

$$f(1^-) = e^{\frac{4}{1^--1}} = e^{\frac{4}{0^-}} = e^{-\infty} = 0^+$$

מסקנה: יש חור ב- $(1,0)$ כאשר $x \rightarrow 1^-$.

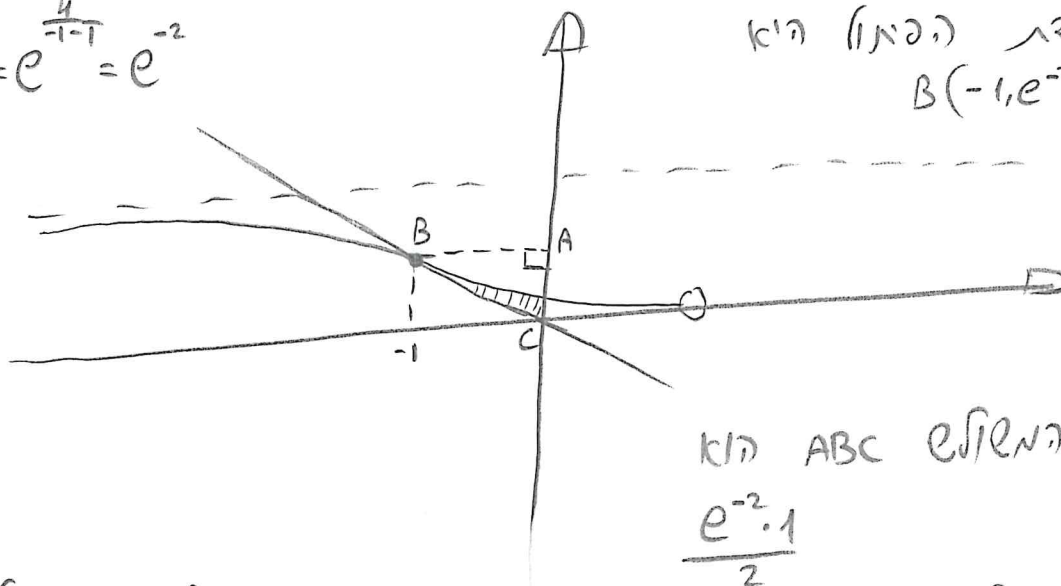




ב (2) הישר $y=k$ חותך את גרף הפונ' כאשר
 $k > 0$ או $0 < k < 1$

$$f(-1) = e^{\frac{1}{-1-1}} = e^{-2}$$

ב נקודת הפיתול היא
 $B(-1, e^{-2})$



שטח המשולש ABC הוא

$$\frac{e^{-2} \cdot 1}{2}$$

מאחר והפונ' יורדת וחוגגת את ציר x בין A ל C, השטח הנצרך בהכרח מוכן בעזרת המשולש חסן קטן ממנו.



5. נתונה פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = \frac{\ln(-x) + 2}{x}$.

לפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ יש אותו תחום הגדרה.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 (3) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ והקעירות כלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מה הן משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת, $f'(x)$?

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$.

נתון: $f(-e^{-2}) = 0$.

ג. (1) מצא ביטוי אלגברי לפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

א. (1) תחום הלכדה: $-x > 0 \Rightarrow x < 0$ ו- $x \neq 0$
 $\Leftrightarrow \boxed{x < 0}$ (תחום הלכדה: $f'(x) \neq 0$)

$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln(-x) = -2$
 $-x = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \Rightarrow x = -\frac{1}{e^2}$

א. (2) תחום הלכדה: $f'(x) \neq 0$

$-\frac{1}{e}$	$-\frac{1}{e^2}$	$-\frac{1}{e^3}$	0	x
-	0	+	///	$f'(x)$
$\downarrow$	min	$\uparrow$	///	$f(x)$

עלייה: $-\frac{1}{e^2} < x < 0$
 ירידה: $x < -\frac{1}{e^2}$



$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x - 1(\ln(-x) + 2)}{x^2} = \frac{1 - \ln(-x) - 2}{x^2}$$

ט.ל. (3) תחילת קטיוכר

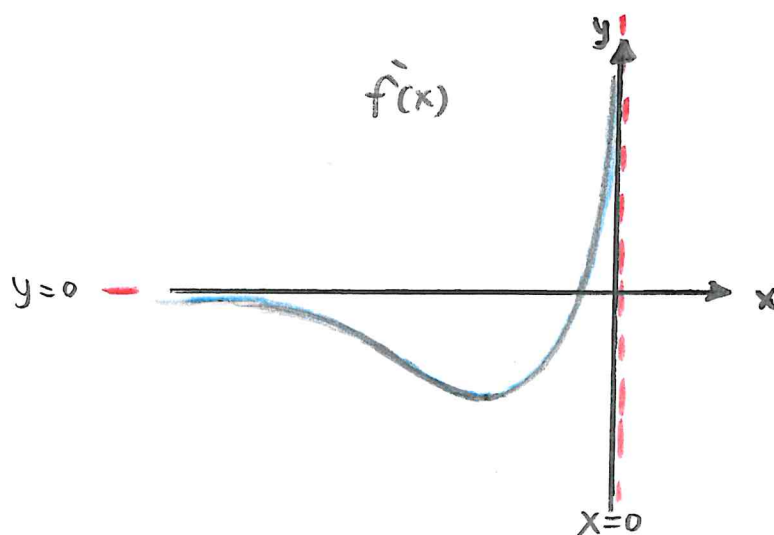
$$f''(x) = \frac{-1 - \ln(-x)}{x^2} \quad f''(x) = 0 \Rightarrow \ln(-x) = -1 \Rightarrow -x = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow x = -\frac{1}{e}$$

$-e$	$-\frac{1}{e}$	$-\frac{1}{e^2}$	0	x
$-$	0	$+$	///	$f''(x)$
	מינימום		///	$f(x)$
				$f'(x)$

$$\left[\begin{array}{l} \text{קטיוכר מעלה} : -\frac{1}{e} < x < 0 \\ \text{קטיוכר מטה} : x < -\frac{1}{e} \end{array} \right]$$

 ב. (1) אסימפטוטה של $f(x)$:

$y=0$ אסימפטוטה אנכית (קטיוכר $x \rightarrow -\infty$)
 $x=0$ אסימפטוטה אנכית (מקדמה של $x=0$)


 ב. (2) סרטוט של $f(x)$

 ל- $f(x)$ יש קטיוכר מינימום

$$\min(-\frac{1}{e}, -e)$$

 ומתחילת עתה צורה x

$$(-\frac{1}{e^2}, 0)$$



$$f(-e^{-2}) = 0 \quad \text{נכון} \quad (1). \text{ז}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{\ln(-x) + 2}{x} dx$$

$$f(x) \quad \text{אין} \quad (1)$$

$$= \int \left[\frac{\ln(-x)}{x} + \frac{2}{x} \right] dx = \int \left[\left(\frac{1}{x} \right) (\ln(-x))' + \frac{2}{x} \right] dx = \frac{(\ln(-x))^2}{2} + 2 \ln|x| + C$$

מכיוון שנתחם ההגדרה הוא $x < 0$ נעזר $|x| = -x$

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln^2(-x) + 2 \ln(-x) + C$$

$$f(-e^{-2}) = \frac{1}{2} \cdot 4 - 4 + C = C - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{C=2}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} \ln^2(-x) + 2 \ln(-x) + 2}$$

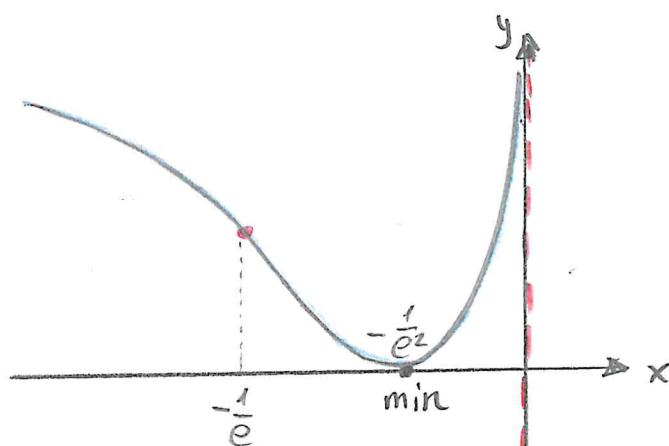
$$\min(-\frac{1}{e^2}, 0)$$

$$\text{בניין} \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{2}\right)$$

(2). ז $x=0$ אסימפּטוטה אנכית של $f(x)$.

אין f נקודות חיתוך נוספות עם ציר ה- x מלבד $x = -e^{-2}$.

$$f(x) = \frac{1}{2} (\ln(-x) + 2)^2$$



* הערה בנוגע לסעיף (1)

$$\begin{aligned} \int (\ln(-x) + 2) \left(\frac{1}{x} \right) dx &= \\ &= \frac{(\ln(-x) + 2)^2}{2} + C \end{aligned}$$

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

