

פתרון הבחינה במתמטיקה

חורף תש"פ, 2020, שאלון: 35581

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע": אודי נעים, ריקי טל, עמית איטון, אביחי כהן, קובי שרוני, ארד טלמון, מוריס איבגי, יאיר גולני, יהודה מנצור, רועי גבע, אריק דז'לדטי, יואל גבע

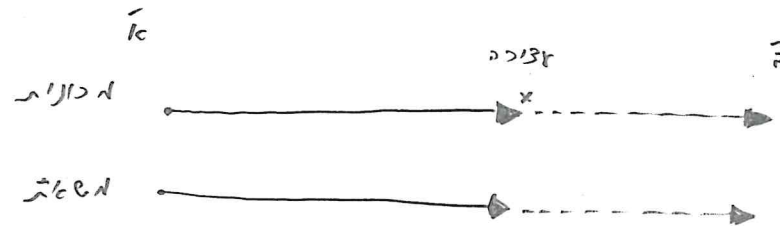
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





1. המרחק בין עיר א' ובין עיר ב' הוא 96 ק"מ.
מכונית ומשאית יצאו באותו הזמן מעיר א' ונסעו לכיוון עיר ב'.
בתחילה נסעה המכונית במהירות קבועה של V_1 קמ"ש.
לאחר שעברה 15 ק"מ מן הדרך, היא עצרה בצד הדרך למשך חצי שעה, לצורך תיקון תקלה.
לאחר שתוקנה התקלה, המשיכה המכונית בדרכה במהירות קבועה של 90 קמ"ש.
המשאית נסעה כל הדרך במהירות קבועה של V_2 קמ"ש.
היא חלפה על פני המכונית 3 דקות לאחר שהמכונית עצרה בצד הדרך.
המכונית והמשאית הגיעו לעיר ב' באותו הזמן.
- א. מצא את V_1 ואת V_2 .
ב. כמה זמן אחרי שהמכונית והמשאית יצאו לדרך היה המרחק ביניהן 3 ק"מ? (מצא שניים משלושת המקרים).



משוואת זמנים עבור המשאית
חולפת על פני המכונית החלטה

$$I: \frac{15}{V_1} + \frac{1}{20} = \frac{15}{V_2}$$

משוואת זמנים ב הדרך:

$$II: \frac{15}{V_1} + \frac{1}{2} + \frac{81}{90} = \frac{96}{V_2}$$

10

3 י"ר	15	מהירות
15	$\frac{15}{V_1}$	V_1
0	$\frac{1}{20}$	0
15	$\frac{15}{V_2}$	V_2
15	$\frac{15}{V_1}$	V_1
0	$\frac{1}{2}$	0
81	$\frac{81}{90}$	90
96	$\frac{96}{V_2}$	V_2

מכונית
עצרה 20 דקות
חולפת על פניה
משאית
עצרה 30 דקות
המכונית
המכונית ב
הדרך
משאית ב הדרך

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



(חסר את הושוואה ו/נקל):

$$I-I: \quad \frac{1}{2} + \frac{9}{10} - \frac{1}{20} = \frac{96}{v_2} - \frac{15}{v_2}$$

$$\frac{27}{20} = \frac{81}{v_2}$$

$$27v_2 = 1,620$$

$$\boxed{v_2 = 60}$$

ז"ע

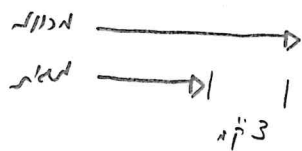
(צ"ג קאשוואה, I):

$$\frac{15}{v_1} + \frac{1}{20} = \frac{15}{60}$$

$$\frac{15}{v_1} = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{v_1 = 75}$$

ז"ע



(2) אולם צ"ח האשליה: לפני העצירה אף הוכחות.

$$75t = 60t + 3$$

$$15t = 3$$

$$t = \frac{1}{5}$$

אחרי 3 ק"מאחרי פאחרי 12 3 ק"מ

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



אופציה סת'ה: האכוניר כבר בעצירה והמשאיר באותה פזר 3 קילומטר
 * נחבול 5 דק' המשאיר והיזה לאכוניר
 $\frac{15}{60} = 0.25 \rightarrow \frac{5}{20}$ סטר

* בשלב זה האכוניר בעצירה ולכן נבדוק כמה
 זמן עוקה המשאיר לעבור 3 קילומטר
 $\frac{3}{60} = \frac{1}{20} \rightarrow \frac{3}{20}$ סטר

קומי המשאיר עברה 3 קילומטר 3 דק' לאחר שהאפה עז פני האכוניר
 אלה האפה 5 דק' לאחר צאתה ולכן הייתי בתנועה גמשה 18 דק' /

אופציה של'שית: האכוניר מצמצמת את הפער לאחרי העצירה ולפני ההפזה אחידה.
 סוף זה (כמו האחרים) ניתן לפתור בצורה של מהירות וחסיית.
הערה: מהירות גמסית בין שני גופים היא סכומה בה מתקיימים לתנועה החסית
 של שני הגופים כאחד אחד.

נחשב מהסוף להתחלה: המהירות החסית בין האכוניר והמשאיר (לאחר עצירת האכוניר)
 היא $30 = 90 - 60$, בשלב מסוים נמצאת האכוניר 3 קילומטר לאחר המשאיר ואשר קי
 עימד קי מציאת המצוי, לאחר עלינו למצוא את הנקודה שממנה האכוניר סוגרת פער 3 קיל
 פער 6 דק' קילומטר האכוניר חסית 6 דק' נסגר קי:
 $\frac{3}{30} = \frac{1}{10} \rightarrow \frac{6}{60}$ סטר
 לאחר 6 דק' לפני סיום הנסיעה.
 נחשב את זמן ה הנסיעה:
 $\frac{96}{60} = \frac{8}{5} \rightarrow \frac{96}{5}$ דק' סטר
 נרדף את ה 6 דק' ונקבל:
 $\frac{96}{5} - 6 = \frac{90}{5}$ דק' סטר

1. ארנק 3 קילומטר כעבור שעה וחצי.





2. a_n היא סדרה חשבונית.

k ו- p הם מספרים טבעיים. $k < p$.

נתון: $a_p = k$, $a_k = p$.

א. (1) הוכח שהפרש הסדרה a_n הוא -1 .

(2) הבע את a_1 באמצעות k ו- p .

הסדרה c_n מוגדרת כך: $c_n = a_n - n$.

נתון כי סכום 6 האיברים הראשונים בסדרה c_n הוא 0.

ב. (1) מצא את a_1 .

(2) מה הם ערכי k ו- p ? מצא את כל האפשרויות.

ג. חשב את הסכום $(c_1 - c_2)^2 + (c_3 - c_4)^2 + \dots + (c_{99} - c_{100})^2$. נמק.

$$I \quad a_p = k = a_1 + (p-1)d$$

1c. (1)

$$II \quad a_k = p = a_1 + (k-1)d$$

נחסר משוואה II מ-I:

$$II - I \quad p - k = (k-1)d - (p-1)d$$

$$p - k = d[(k-1) - (p-1)]$$

$$p - k = d(k - p) \quad | : k - p \neq 0$$

$$k \neq p$$

$$\frac{p-k}{k-p} = d$$

$$\frac{-1(k-p)}{(k-p)} = d$$

$$\boxed{-1 = d}$$

הפרש הסדרה הוא -1 .





א (2) (5) מה שיהיה אג a_1 נצטרך $d = -1$ נמצא
 הסיוואל:

$$I \quad k = a_1 + (p-1) \cdot (-1)$$

$$k = a_1 - p + 1$$

$$\boxed{a_1 = k + p - 1}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_6 = 0$$

(1) 2

$$a_1 - 1 + a_2 - 2 + a_3 - 3 + \dots + a_6 - 6 = 0$$

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_6}_{S_6} - \underbrace{[1 + 2 + 3 + \dots + 6]}_{\text{סכום}} = 0$$

$$\frac{6(2a_1 + (6-1) \cdot (-1))}{2} = \frac{(1+6)6}{2} \quad | :2 \quad | :6$$

$$2a_1 - 5 = 7$$

$$\boxed{a_1 = 6}$$

האיבר הראשון בסדרה הוא 6.





$$a_1 = p + k - 1 \quad \text{ע"פ סעיף א (2)} \quad \text{ג (2)}$$

$$a_1 = 6 \quad \text{ע"פ סעיף ב (1)}$$

$$p + k - 1 = 6 \quad \text{נשווה את הביטויים:}$$

$$p + k = 7$$

מאחר ונתון $p < k$

ניתן להסיק שערכי p ! א האפשריים הם:

$$p=6 \\ k=1$$

||

$$p=5 \\ k=2$$

||

$$p=4 \\ k=3$$

נניח שהסדרה C_n חסכונית ונמצא את הפרשה

$$C_{n+1} - C_n = (a_{n+1} - (n+1)) - (a_n - n) = \underbrace{a_{n+1} - a_n}_{d_a} - n - 1 + n$$

$$= -1 - 1 = \boxed{-2} = d_c$$

$$(C_1 - C_2)^2 + (C_3 - C_4)^2 + \dots + (C_{99} - C_{100})^2 =$$

$$(-d_c)^2 + (-d_c)^2 + \dots + (-d_c)^2 =$$

$$2^2 + 2^2 + \dots + 2^2 = 2^2 \cdot 50 = \boxed{200}$$

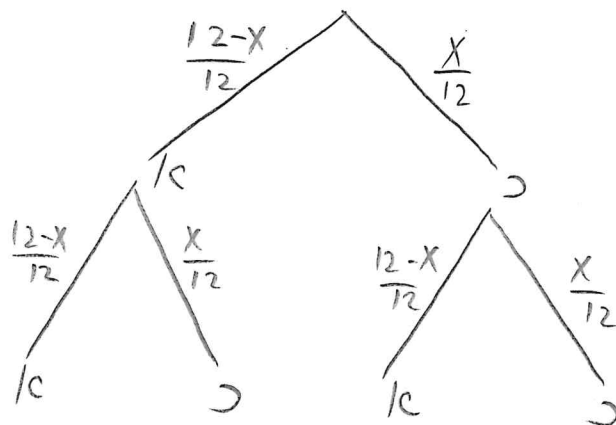
הערה: בסכום ישנם 50 איברים של הסדרה C_n שחולקו לעשר
 ולכן $(-d_c)^2$ מופיע 50 פעמים.





3. בקופסה יש 12 כדורים. רובם כחולים והשאר אדומים.
- הוציאו באקראי כדור מן הקופסה, החזירו אותו לקופסה, ושוב הוציאו באקראי כדור והחזירו אותו. ההסתברות ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים היא $\frac{4}{9}$.
- א. מצא כמה כדורים כחולים יש בקופסה.
- ב. הוסיפו לקופסה כדורים צהובים.
- לאחר ההוספה הוציאו באקראי כדור, החזירו אותו, ושוב הוציאו באקראי כדור והחזירו אותו. ההסתברות שהוציאו שני כדורים בצבעים שונים נשארה $\frac{4}{9}$.
- כמה כדורים צהובים הוסיפו לקופסה?
- העבירו את כל הכדורים הצהובים לכלי אחר והשאירו בקופסה רק את הכדורים הכחולים והאדומים.
- ג. הוציאו באקראי מן הקופסה כדור אחרי כדור שוב ושוב (ללא החזרה), עד שהוציאו כדור אדום. מהי ההסתברות שמספר ההוצאות היה גדול מ-3?

א. $x = \text{כמה הכדורים הכחולים}$
 $12 - x = \text{כמה הכדורים האדומים}$
 נספור את ההסתברות ששני הכדורים יהיו בצבעים שונים:



כך נסכים את ההסתברות ששני הכדורים יהיו בצבעים שונים:

$$\frac{x}{12} \cdot \frac{12-x}{12} + \frac{12-x}{12} \cdot \frac{x}{12} = \frac{4}{9}$$

ס: $\frac{4}{9}$





$$\frac{2 \cdot X(12-X)}{12^2} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{X(12-X)}{12 \cdot 6} = \frac{4}{9}$$

$$X(12-X) = \frac{4 \cdot \cancel{12} \cdot 6^2}{\cancel{8} \cdot \cancel{3}}$$

$$X(12-X) = 32$$

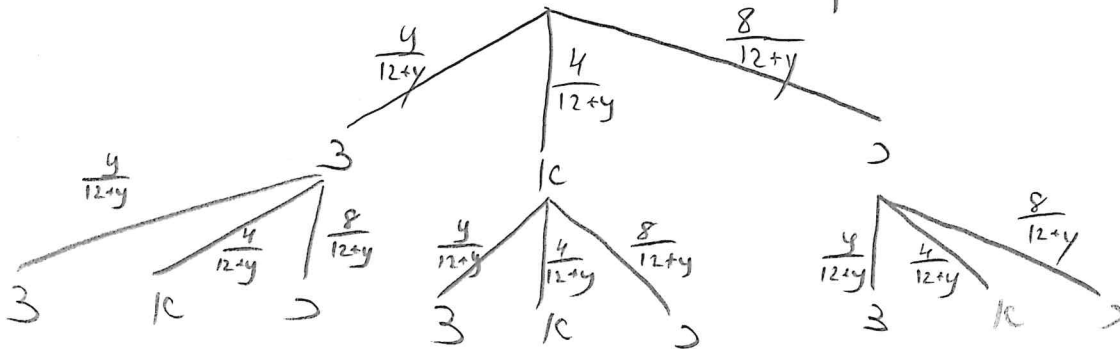
$$-X^2 + 12X - 32 = 0$$

$$\boxed{X=8}$$

$$X=4$$

נסס
מאחר והרוב
כחול'ים.

מספר הכדורים הכחולים בקופסה הוא 8.
 כער הקופסה מכילה 8 כחול'ים, 4 אדומים ! y 3 חוקים
 סה"כ כדורים בקופסה: $12+y$
 נתנו את ההחלף פעם נוספת $\bar{8}$ דינאמית $\bar{8}$:



למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
 אל תתפשר עליה.



מאתר וריון שהסמכיות שהוציאו שני כדורים קצרים
 שונים היא $\frac{4}{9}$, ניתן להסיק שהסמכיות
 שהוציאו זהים היא $\frac{5}{9}$. נסבוק אל המסלולים
 בעץ שמכילים צבים ונשאלו: $\frac{5}{9}$:

$$\left(\frac{8}{12+y}\right)^2 + \left(\frac{4}{12+y}\right)^2 + \left(\frac{y}{12+y}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$$\frac{64 + 16 + y^2}{(12+y)^2} = \frac{5}{9}$$

$$9(80 + y^2) = 5(144 + 24y + y^2)$$

$$720 + 9y^2 = 720 + 120y + 5y^2$$

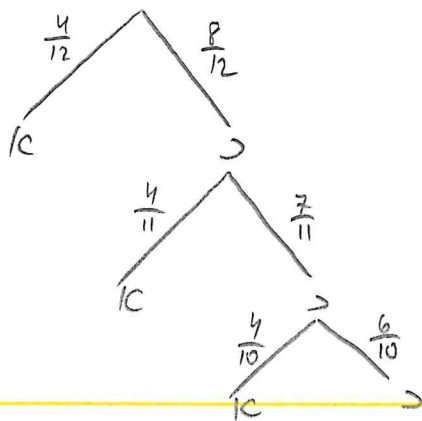
$$4y^2 - 120y = 0$$

$$4y(y - 30) = 0$$

$$y = 0 \quad \boxed{y = 30}$$

מספר הכדורים הצהובים שהוסיפו הוא 30.

נחשב אל ההסתברות שמספר ההוצאות היה
 קטן או שווה לשלוש ונשמע בתוכה המסלולים.



$$1 - \left[\frac{4}{12} + \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} \right]$$

$$= \boxed{\frac{14}{55}}$$

ההסתברות שמספר ההוצאות
 היה זכו משלוש היא $\frac{14}{55}$



4. AD ו-CE הם חוצי זווית במשולש ABC, ונקודת החיתוך שלהם היא F.
נתון: $\angle ABC = 60^\circ$.

א. הוכח כי אפשר לחסום את המרובע BDFE במעגל.

נתון: FB הוא קוטר במעגל החוסם את המרובע BDFE.

ב. הוכח שהמשולש ABC הוא משולש שווה צלעות.

המשך הקטע BF חותך את הצלע AC בנקודה G.

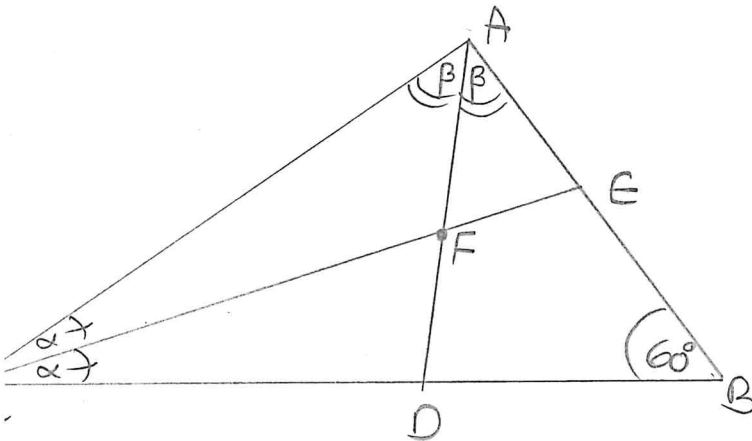
ג. הוכח כי הקטע FG שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המרובע BDFE.

בנקודה F מעבירים משיק למעגל החוסם את המרובע BDFE.

המשיק חותך את הצלעות BA ו-BC בנקודות K ו-L בהתאמה.

ד. מצא את היחס $\frac{KL}{AC}$. נמק את תשובתך.

CI GE





נימוק

נתון

נתון.

① סימון

סכום זווית המשולש + חילים +

① + ② + ③

סכום זווית המשולש + ① + ②

③ + ④

זווית קוזקודיו + ⑤

② + ⑥

מחברים שבו זווית נקודת
משולש - זווית הנוצרית

משולש + ⑦

רשימה

① $AD = CE$ הם חוצי הצלע
המשולש ABC נקודת החיתוך
שלם הוא F

② $\angle ABC = 60^\circ$

③ נתון $\angle ACE = \angle BCE = \alpha$

$\angle BAD = \angle CAD = \beta$

④ נחשב $2\alpha + 2\beta + 60^\circ = 180^\circ$

$2\alpha + 2\beta = 120^\circ$

$\alpha + \beta = 60^\circ$

⑤ $\angle AFC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

⑥ $\angle EFD = 120^\circ$

⑦ $\angle EBD + \angle EFD =$

$60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$

⑧ מחברים $BDFE$ כחצי מעגל

משולש ABC



נימוק

כסך

נתון.

9) FB קוטר במעגל $BDFE$
אלו הזוויות

10) $\angle FEB = \angle FDB = 90^\circ$

11) $CE \perp AB$
 $AD \perp AB$

12) $\angle ECB = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$

13) $\angle ACB = 2 \cdot \angle ECB = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$

14) $\angle BAC = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

15) משולש ABC שווה צלעות
מ.ש.ל. $\hat{C}$

16) המשקל הקטע FG חוצה את הצלע AC במקומה G

17) נקודה F היא מרכז המסה והנכונות במשולש ABC

18) $FB = 2FG$

זווית היוצאת שמשולש ABC היא 60°
ק.ש.ל. $(9) + (1) + (10)$

סכום זוויות במשולש ECB
 $(11) + (2) + (10)$

$(12) + (1)$

סכום זוויות במשולש ABC
 $(2) + (13) + (1)$

משולש שווה צלעות 60° הוא
משולש שווה צלעות $(13) + (2) + (1)$

נתון.

במשולש שווה צלעות הגובה חוצה את
הצלע AC והנכונות במשולש ABC
חוצה את הזווית שווה צלעות $(1) + (12)$

נקודה F היא מרכז המסה והנכונות במשולש ABC
נתון $1:2$ חוצה את הצלע AC במקומה G
 $(16) + (17)$





ימין

סלנה

קוטר המעלה שנה לפעמים רדיוס
המעלה + (9) + (18)

(19) FG שנה מאורכו ערדיוס
המעלה החוסם את המעלה
BDFE
משל 2

נמן

(20) הנקודה F טעמים משיק
למעלה החוסם את המעלה
BDFE
המשיק חותך את הצלע BA
בנקודה K! ל-
כהנחה.

משיק מאונק. לרדיוס בנקודה ההפכה
+ (9) + (20)

(21) $KL \perp BF$

קטע היוצא בנקודה וסגור כגבול
תקפים דלא עקה ומאונק. לצלע
חלה מל. + (9) + (16) + (17)

(22) $AC \perp BG$

2 יסמים המאונקים לאותו הישג, טעמים
+ (21) + (22)

(23) $AC \parallel KL$





נומק

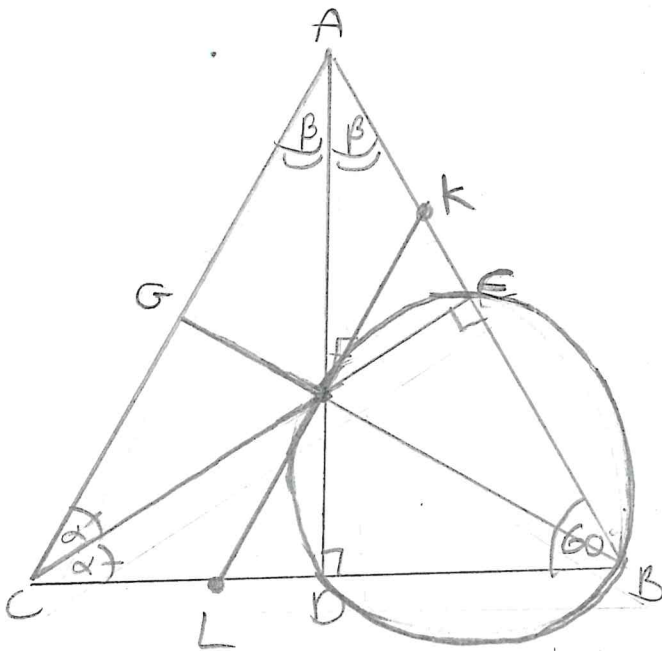
סכך

גולס פרהקה א + מקש גיכוס
מחן ס תכין ביתס ז:1 אסמ
פ קוד קוד + 16 + 17 + 23

$$\frac{KL}{AC} = \frac{BF}{BG} = \frac{2}{3}$$

21

סכס





5. במשולש ABC הנקודות D ו-F נמצאות על הצלעות BA ו-BC בהתאמה כך ש- $DF \parallel AC$. הנקודות G ו-N נמצאות על הצלע AC כך שהמרובע DFNG הוא טרפז שווה שוקיים, כמתואר בצורה.

נסמן: $\angle BAC = \alpha$, $\angle FNC = \beta$.

נתון: $AD = 7$, $FC = 4$, $\angle FCN = 2\alpha$.

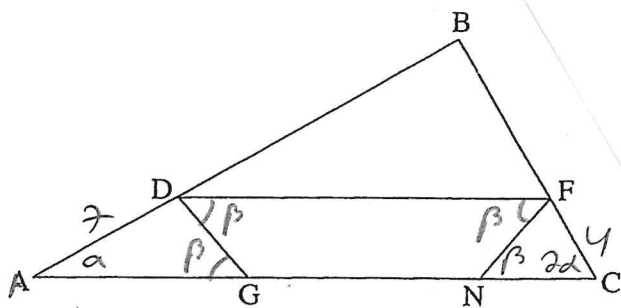
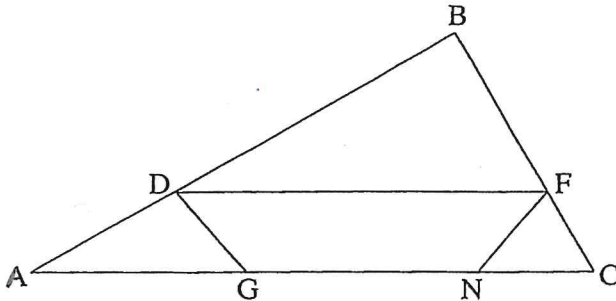
א. (1) הראה כי: $\frac{FN}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin \beta}$.

(2) חשב את α .

נתון: שטח המשולש BDF הוא 56.

ב. מצא את אורך הקטע DF.

ג. מהו היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש FCN ובין רדיוס המעגל החוסם את המשולש DAG? נמק.



פתרון:
ל- (1) נוכיח ש- $\frac{FN}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin \beta}$

$DF \parallel GN$



$\angle FND = \beta$

הטרפז ט"ל שווה זווית ולכן:

$DG = FN$, $\angle GDF = \beta$



$\angle DGA = \beta$

מתבונן במשולש DAG:

$$\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{DG}{\sin \alpha} \Rightarrow \boxed{\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{FN}{\sin \alpha}}$$



$$\frac{FN}{\sin \alpha} = \frac{7}{\sin \beta}$$

(2) מסתקף ו' זה קל:

נתבונן במשולש CFN:

$$\frac{FN}{\sin 2\alpha} = \frac{CF}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{FN}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\sin \beta}$$

$$FN \cdot \sin \beta$$

(בז'אן זה המכנה)

בגלל השוויון ונשלל מכאן המכנה:

$$7 \sin \alpha = 4 \sin 2\alpha$$

$$7 \sin \alpha = 8 \sin \alpha \cos \alpha$$

שליש כפולה של חס:

$$\cos \alpha = \frac{7}{8}$$

מהדיוק $\sin \alpha \neq 0$ אז כן:

$$\boxed{\alpha = 28.955^\circ}$$

ב' נתבונן במשולש BDF:

$$\angle BFD = 2\alpha = 57.91^\circ$$

$$\angle DBF = 180^\circ - 3\alpha = 93.135^\circ$$

$$\angle BDF = 28.955^\circ$$

נניח בגובה הסינוסים:

$$\frac{DF}{\sin 93.135^\circ} = \frac{BF}{\sin 28.955^\circ} \Rightarrow BF = \frac{DF \cdot \sin 28.955^\circ}{\sin 93.135^\circ}$$

//





$$S_{\triangle BDF} = \frac{DF \cdot BF \cdot \sin 57.91^\circ}{2}$$

$$56 = \frac{DF \cdot \frac{\sin 28.955^\circ}{\sin 93.735^\circ} \cdot DF \cdot \sin 57.91^\circ}{2}$$

$$DF^2 = 272.658$$

$$\boxed{DF = 16.51}$$

$$\triangle FCN: \frac{NF}{\sin 2\alpha} = 2R_1$$

$$\triangle DAG: \frac{DG}{\sin \alpha} = 2R_2 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$7 \sin \alpha = 4 \sin 2\alpha \quad \text{נסתכל ב' (א) ו' כ':}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{7}$$

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{4}{7}}$$



6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{6}{2\cos^2 x - 5\cos x - 3}$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

ענה על הסעיפים א-ג בעבור התחום הנתון.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $h(x) = |f(x) + 2|$, שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

(2) k הוא פרמטר. מצא את כל הערכים של k שבעבורם הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה $h(x)$ בארנ

נקודות שונות.

נתונה הפונקציה $g(x) = |f(x)| + 2$, שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ג. האם לכל x בתחום ההגדרה $h(x) < g(x)$? נמק.

פתרון:

א. (1) תחום הגדרה: נבדוק: מתקן לאנך מאס:

$$2\cos^2 x - 5\cos x - 3 \neq 0$$

נבדוק פירוק טרינום:

$$2(\cos x - 3)(\cos x + \frac{1}{2}) \neq 0$$



$$\cos x \neq 3$$

מתקיים לכל x
 וזאת עקב

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

$$|\cos x| \leq 1$$

כל x מתקיים.

$$\cos x \neq -\frac{1}{2}$$

$$x \neq \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$$



$$0 \leq x \leq 2\pi$$

$$x \neq \left\{ \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \right\}$$

$$\text{לכן: } \left[0 \leq x < \frac{2}{3}\pi \text{ או } \frac{2}{3}\pi < x < \frac{4}{3}\pi \text{ או } \frac{4}{3}\pi < x \leq 2\pi \right]$$

למידע על פסיכומטרי

ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.

אל תתפשר עליה.





א. (2) חסר, לבדור א - נק' הקיצון בתחום הסגור
 $0 < x < \frac{2}{3}\pi$ או $\frac{2}{3}\pi < x < \frac{4}{3}\pi$ או $\frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$

בהמשך נבון הנקודות הקיצון קצה התחום ($x=0$ - $x=2\pi$)
 נגזים את הפונקציה:

$$f'(x) = (6 \cdot (2\cos^2 x - 5\cos x - 3))' =$$

$$= -6 \cdot (2\cos^2 x - 5\cos x - 3)^{-2} \cdot (-4\cos x \sin x + 5\sin x) =$$

$$= \frac{6 \cdot (4\cos x \sin x - 5\sin x)}{(2\cos^2 x - 5\cos x - 3)^2}$$

נשווה לאפס: $f'(x) = 0$

$$\frac{6 \cdot (4\cos x \sin x - 5\sin x)}{(2\cos^2 x - 5\cos x - 3)^2} = 0$$

$$6 \cdot (4\cos x \sin x - 5\sin x) = 0 \quad / : 6$$

$$4\cos x \sin x - 5\sin x = 0$$

$$\sin x \cdot (4\cos x - 5) = 0$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \quad \quad \quad \searrow \\ \sin x = 0 \quad \quad \quad 4\cos x - 5 = 0 \end{array}$$

$$x = \pi k$$

$$4\cos x = 5$$

$$\downarrow \quad 0 < x < 2\pi$$

$$\cos x = \frac{5}{4} > 1$$

$$x = \pi$$

א/ב ציון (ואו הסדר) בקיצון
 נגזים את הפונקציה.

למידע על פסיכומטרי

ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.

אל תתפשר עליה.





נסיון אברהם על פי יחוס והקצרה

והנקודה החשובה ביותר $0 \leq x \leq 2\pi$

x	0	$0 < x < \frac{2}{3}\pi$	$\frac{2}{3}\pi < x < \pi$	π	$\pi < x < \frac{4}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$	2π
f(x)							
סימן f'(x)		-	-	0	+	+	
התנהגות f(x)		↘	↘	מיני	↗	↗	

חשובים עבור האברהם:

נשים לב כי מתן העצמי מוכיח על א קומה והקצרה.

עין נולד להצגה גדולה אחיזה - $4\cos x \sin x - 5\sin x$ הנמצא מתן

יגעני על מתן הקצרה א- מתן (דילוי) מופלד ק-ס < 0

ואכן ניתן להצגה יק גדולה אחיזה - $4\cos x \sin x - 5\sin x$.

$$0 < x < \frac{2}{3}\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$4\cos\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{3} - 5\sin\frac{\pi}{3} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

$$\frac{2}{3}\pi < x < \pi$$

$$x = \frac{5}{6}\pi$$

$$4\cos\frac{5}{6}\pi \cdot \sin\frac{5}{6}\pi - 5\sin\frac{5}{6}\pi =$$

$$= -\sqrt{3} - 5 \cdot \frac{1}{2} < 0$$

$$\pi < x < \frac{4}{3}\pi$$

$$x = \frac{7}{6}\pi$$

$$4\cos\frac{7}{6}\pi \cdot \sin\frac{7}{6}\pi - 5\sin\frac{7}{6}\pi = \sqrt{3} + 5 \cdot \frac{1}{2} > 0$$

$$\frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$$

$$x = \frac{3}{2}\pi$$

$$4\cos\frac{3}{2}\pi \cdot \sin\frac{3}{2}\pi - 5\sin\frac{3}{2}\pi = 5 > 0$$





נחשב את שיעורי ה- f של נקודות הקיצון:

$$f(\pi) = \frac{6}{2\cos^2\pi - 5\cos\pi - 3} = \frac{6}{2+5-3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

ואם האלגה, סוג הקיצון הינו מינימום: $\left(\pi, \frac{3}{2}\right) \min$

נקודה גבוהה:

$$f(0) = \frac{6}{2\cos^2 0 - 5\cos 0 - 3} = \frac{6}{2-5-3} = -1$$

ואם האלגה, סוג הקיצון הינו מקסימום: $\left(0, -1\right) \max$

$$f(2\pi) = \frac{6}{2\cos^2 2\pi - 5\cos 2\pi - 3} = \frac{6}{2-5-3} = -1$$

ואם האלגה, סוג הקיצון הינו מקסימום: $\left(2\pi, -1\right) \max$

א. (3) סקיצה:

ראש-נדר אסימטרוט-מאונכות לבית ה- x :

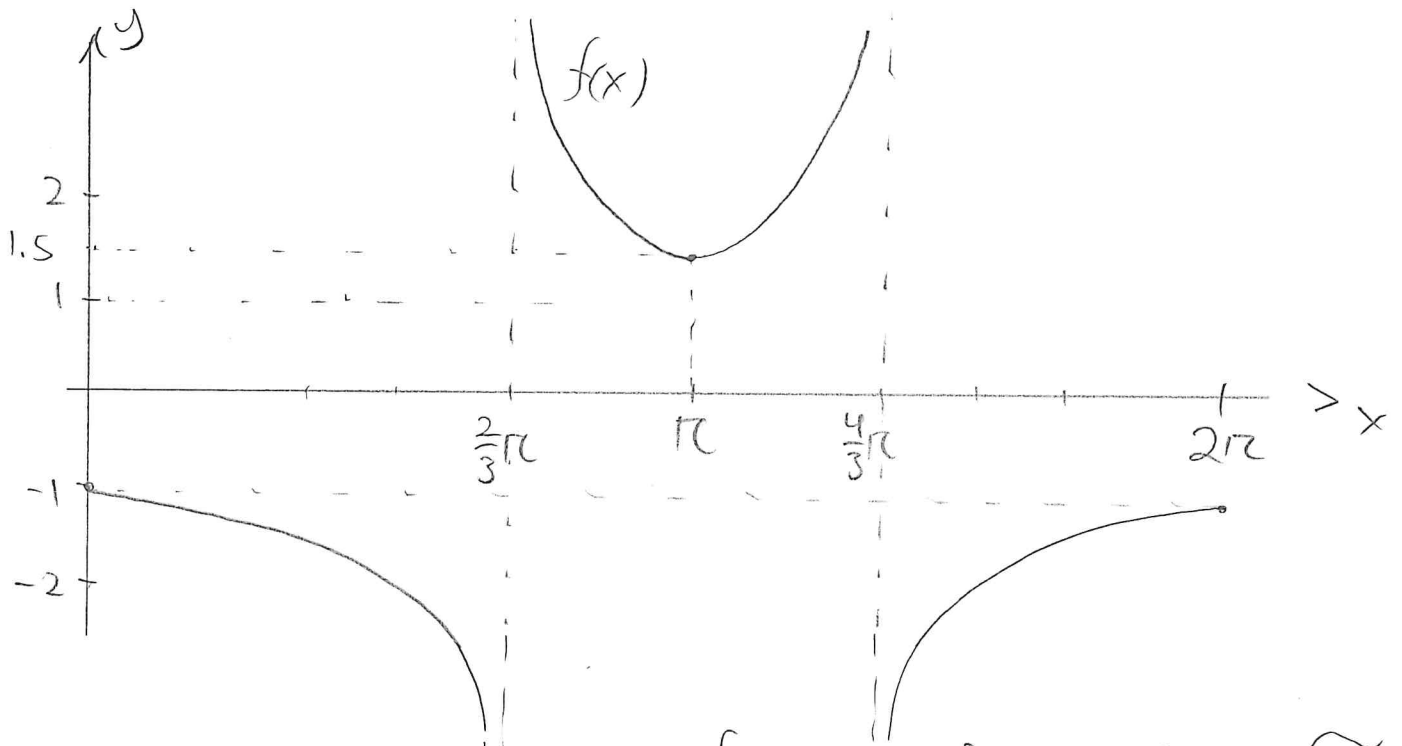
המנה שונה מאדם עם x גבוה (ואם x ממש גבול)

עין, הנקודה בין המנה מואם - יש לפונקציה

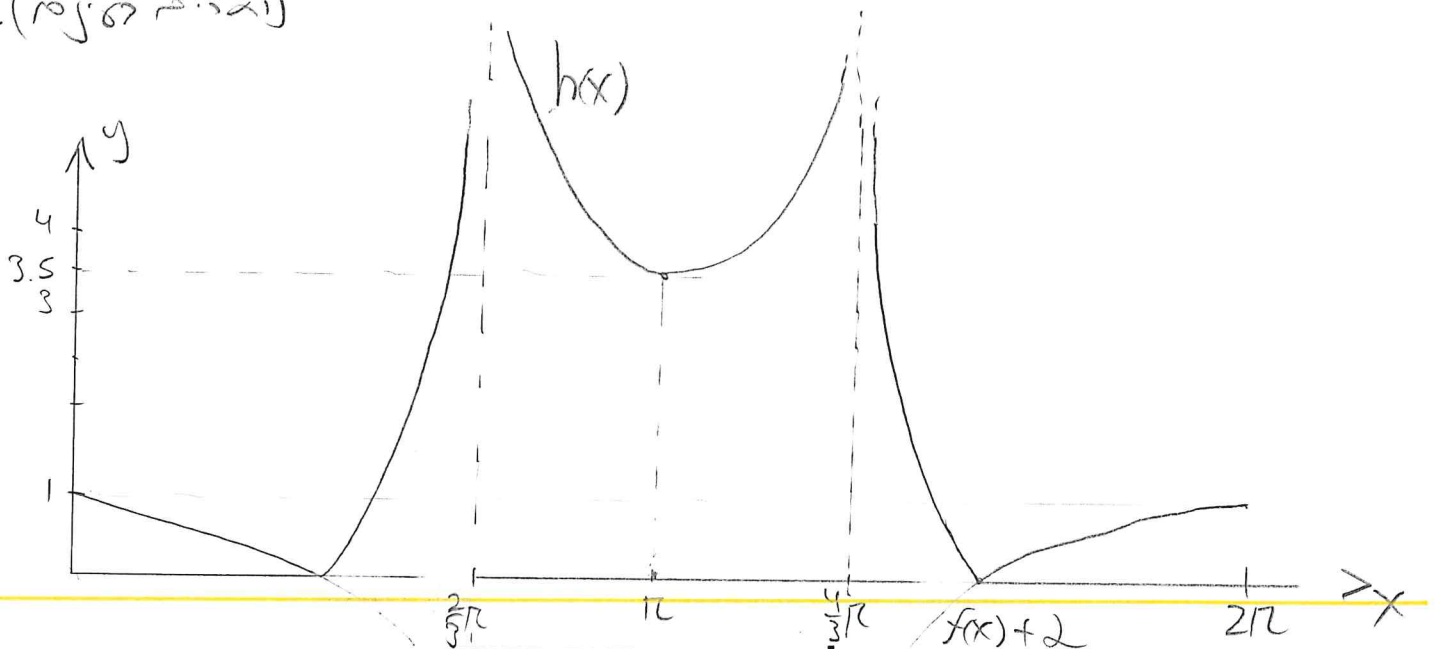
אסימטרוט אנכי. מתואם הנקודה: $x = \frac{4}{3}$ - $x = \frac{2}{3}$

בן האסימטרוט האנכי של הפונקציה.





ד. (1) $\sim$ זה הפונקציה $2 + f(x)$ שהוא יוצר אנכי
 של זה הפונקציה $f(x)$ (קצת גוף) כלומר, זה $2 - 2$ יה'
 זה הפונקציה $|f(x) + 2| = |f(x)|$ שהוא שיקוף של חלקי
 זה הפונקציה $2 + f(x)$ הנמצאים מתחת לקו $y = -2$
 דיום לקו $y = -2$ (חלקי הקו הנמצאים על ומעל קו $y = -2$
 נובעים דמיון).



למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.

אל תתפשר עליה.





ד. (2) כיוון קרבי:

כפי שיהיה הפונקציה (אח שלטון)

זה סעיף קודם -

על מנת להימנע $a=y$ המקבל לציג $a-x$
 יחסוך את היות הפונקציה (אח ד-4 נקראו
 שני-רדיוס:

$$0 < a \leq 1 \quad \text{או} \quad 3.5 < a$$

ה. כיוון אלקדרי:

ישמשו בנק לשם של מספר ממשלי

a, b - כאשר $0 \leq a$ - $0 \leq b$ מקיים השוויון:

$$|a+b| = |a|+|b|$$

דסימולר השאלה שלנו: $h(x) = g(x)$ כאשר

$$|f(x)+2| = |f(x)|+2$$

עכ, דמיון זה $f(x)$ שלילי -

א-השוויון מקיים.

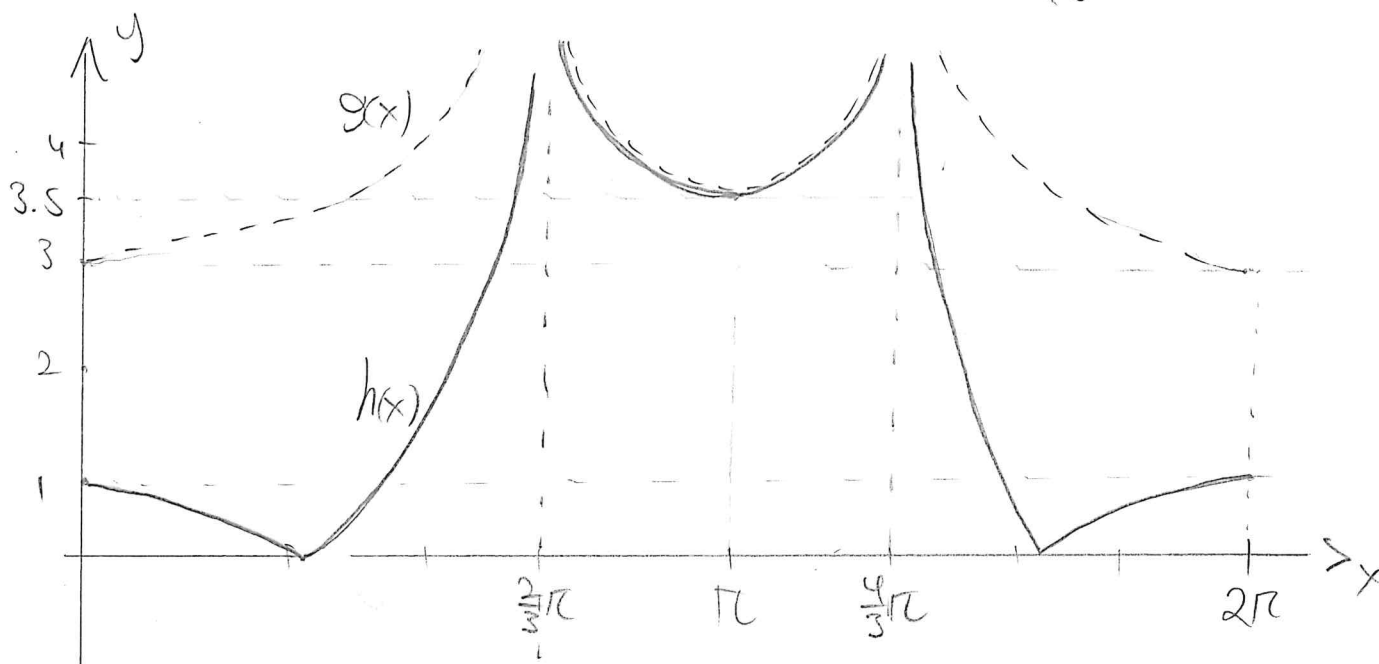
ודמיון זה $f(x)$ אי-שלילי - אי-השוויון לא מקיים.

לפיכך נבין כי לא כל x דמיון הנגזרה מקיים $(a-f(x))$



כתיבן חלופי מספר ג-כתיבן גרפי

נשים (ש) דאזיה מסכנה ציג אג יגריסג
 של נאג ושל (אג).
 גר (אג) מחוה שיקר חלקי גר של (אג) הנחנה
 מחנה לקר ג-א גיחם לקר ג-א (חלקי גר) הנחנה
 מחנה או של ציג ג-א נחנה (חלקי גר)
 גר $2 + |אג|$ מחוה יצגה אנכה של גר (אג)
 (לקר ג-א) חלקי מסל ג-2 יחידה.



נחידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





גורל $g(x)$ קטן מקווקו.
גורל $h(x)$ קטן וזניח.

אם יגדל נסיך כי לא על x קרמור
 יוגדרה מתקיים $h(x) < g(x)$

כיוון לקרמור $\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$ יגדל מתקיים
 (קרמור $h(x) = g(x)$)





7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3x}{4x^2-1}$ שתחום הגדרתה הוא $x \neq \pm \frac{1}{2}$.

א. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{\frac{3x}{4x^2-1}}$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים?

נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש בדיוק נקודת פיתול אחת. שיעור ה- x של נקודה זו קטן מאפס.

ג. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $g'(x)$.

ד. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x) = \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{4x^2-1}}$?

א. (1)

$$f(x) = \frac{3x}{4x^2-1}$$

$$u = 3x$$

$$v = 4x^2-1$$

$$u' = 3$$

$$v' = 8x$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{3(4x^2-1) - 8x \cdot 3x}{(4x^2-1)^2} = \frac{-3-12x^2}{(4x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3(4x^2+1)}{(4x^2-1)^2}$$

(א) עלייה וירידה של $f(x)$ בתחום ההגדרה של $f(x)$ ורשם את תחומי ההגדרה.

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
f'	-	///	-	///	-
f	↘	///	↘	///	↘

י'רידה: $x < -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, x > \frac{1}{2}$

עלייה: אין

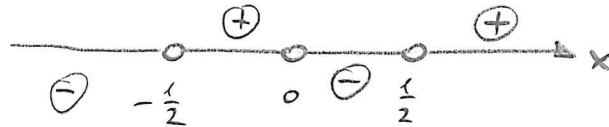


$$f(x) = \frac{3x}{4x^2 - 1}$$

א. (2) תחומי חיוביות ושליליות של $f(x)$:

$$3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$



חיוביות: $-\frac{1}{2} < x < 0, x > \frac{1}{2}$ שליליות: $x < -\frac{1}{2}, 0 < x < \frac{1}{2}$
--

$$g(x) = \sqrt{\frac{3x}{4x^2 - 1}}$$

$$g(x) = \sqrt{f(x)}$$

נתונה הפונקציה

ב. (1) תחומי ההגדרה של $g(x)$ = תחומי האי-שליליות של $f(x)$

$-\frac{1}{2} < x \leq 0$ ו $x > \frac{1}{2}$

ב. (2) אסימטות של $g(x)$

אסימטות אנכיות: $y = 0$ (בנקודת יחיד $x \rightarrow +\infty$)

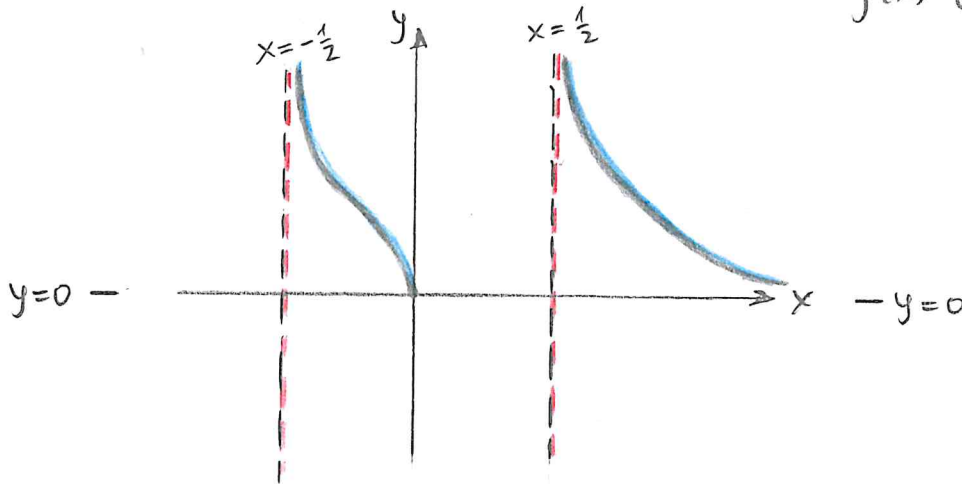
אסימטות אנכיות: $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}, y = 0$	נקודות זוויתיות:
--	------------------

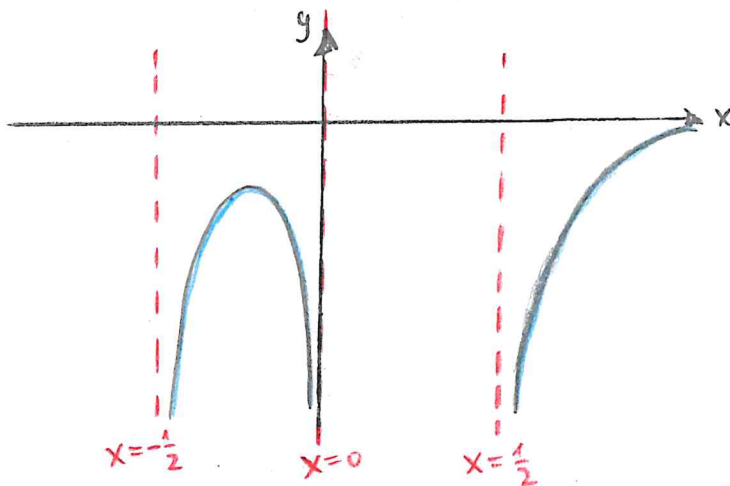


נתון: $f - f'$ נקודת פיתול אחת בלבד.
אם ישנה ה- x שבה היא שלילי.

ג. (1) סרטוט של $g(x)$

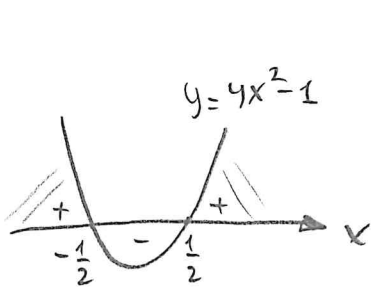


ג. (2) סרטוט של $g'(x)$: נתונים שיקולים לעבור סרטוט הזרף
 $g(x) = \sqrt{f(x)}$
 $g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
 * $f(x) = 0$ עבור $x = 0$ ולכן:
 $x = 0$ איננו נקודה של $g'(x)$ (יחיד עם $x = -\frac{1}{2}$ ו- $x = \frac{1}{2}$)
 * $f'(x)$ שלילי בכל תחום ההגדרה של $f(x)$ ולכן $g'(x)$ שלילי בכל תחום זה גם כן.
 * בשיעור ה- x של נקודת הפיתול של $f(x)$ יש לפונקציה $g'(x)$ נקודת מקסימום.



x'	$-\frac{1}{2}$	פיתול	0	$\frac{1}{2}$
g	∪	פיתול	∩	∪
g''	+	0	-	+
g'	↗	max	↘	↗



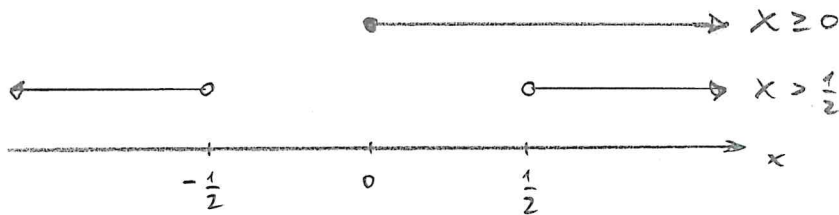


$$h(x) = \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{4x^2 - 1}}$$

3. מהו תחום ההגדרה של

$$4x^2 - 1 > 0 \quad \text{אז} \quad 3x \geq 0$$

$$(x < -\frac{1}{2} \text{ או } x > \frac{1}{2}) \quad \text{אז} \quad x \geq 0$$



$x > \frac{1}{2}$ תחום ההגדרה הוא



8. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 + 1$.

t הוא פרמטר. נתון: $0 < t < 1$.

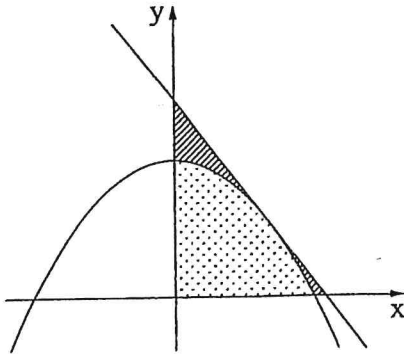
בנקודה שבה $x = t$ העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ (ראה ציור).

א. הראה כי משוואת המשיק היא $y = -2tx + t^2 + 1$.

נסמן ב- S את השטח המקווקו בציור (השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק ועל ידי הצירים).

ב. מצא בעבור איזה ערך של t השטח S הוא מינימלי.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.



נסמן ב- A את השטח המנוקד (השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים).

ג. קבע בעבור כל אחת משתי הטענות שלפניך (i - ii) אם היא נכונה או לא נכונה. נמק את תשובתך.

(i) קיים ערך של t שבעבורו $\frac{A}{S}$ הוא מקסימלי.

(ii) קיים ערך של t שבעבורו $\frac{A}{S}$ הוא מינימלי.

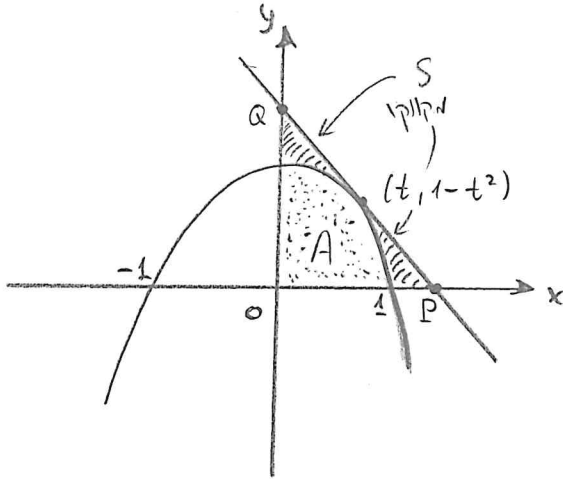
ל. נק' ההשקה: $(t, 1-t^2)$ $m = f'(t) = -2t$ $f'(x) = -2x$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad y - (1 - t^2) = -2t(x - t)$$

$$y = -2tx + 2t^2 + 1 - t^2$$

ל.ע.נ $[y = -2tx + t^2 + 1]$





ה. למחלקה חשוק:

$$y = -2tx + t^2 + 1$$

חינוך עם הקורס:

$$Q: y = t^2 + 1$$

$$P: x_P = \frac{t^2 + 1}{2t}$$

$$S = \frac{y_Q \cdot x_P}{2}$$

$$S_{AOP} = \frac{1}{2} \cdot (t^2 + 1) \cdot \frac{t^2 + 1}{2t} = \frac{(t^2 + 1)^2}{4t}$$

$$S_A = \int_0^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

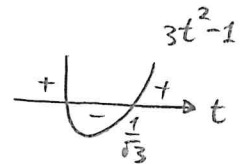
$$\left[S(t) = \frac{(t^2 + 1)^2}{4t} - \frac{2}{3} \right]$$

$$S'(t) = \frac{2(t^2 + 1) \cdot 2t \cdot 4t - 4(t^2 + 1)^2}{(4t)^2} = \frac{4(t^2 + 1)[4t^2 - (t^2 + 1)]}{(4t)^2}$$

$$S'(t) = \frac{4(t^2 + 1)[3t^2 - 1]}{(4t)^2}$$

$$S'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 = 1$$

$$t^2 = \frac{1}{3}$$



$$0 < t < 1 \quad \text{אז} \quad t = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

t		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$S'(t)$	-	0	+
$S(t)$	↘	min	↗

⇒

הסכום S הוא מינימלי
 עבור $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$





ז. $A = \frac{2}{3}(\text{ג"ה})$ השלם המעוקב הוא זקוף קבוע

(ג) קיים ערך של t שעבורו $\frac{A}{S}$ הוא מקסימלי.

הלצנים אכן נכונה

נימוק: $\frac{A}{S}$ מקסימלי כאשר S הוא מינימלי (ועבור $t = \frac{1}{3}$)
קיים t - S מינימלי מוחלט, $S(t)$ רציפה עבור $0 < t < 1$

(ג) קיים ערך של t שעבורו $\frac{A}{S}$ הוא מינימלי.

הלצנים איננה נכונה

נימוק: כאשר $t \rightarrow 0$ השלם S שואף לאינסוף.
(ניתן לראות זאת בקלות השלם וגם בביאור $S(t) = \frac{(t^2+1)^2}{4t} - \frac{2}{3}$)

ולכן, כאשר $t \rightarrow 0$ מתקיים $\frac{A}{S} \rightarrow 0$
אבל, $\frac{A}{S} > 0$ ולכן אין ליחס $\frac{A}{S}$ ערך מינימלי.
($\frac{A}{S}$ כק שואף לאפס כאשר $t \rightarrow 0$).

