

פתרון הבחינה במתמטיקה

חורף תש"פ, 2020, שאלון: 35482

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע": אודי נעים, ריקי טל, עמית איטון, אביחי כהן, קובי שרוני, ארד טלמון, מוריס איבגי, יאיר גולני, יהודה מנצור, רועי גבע, אריק דז'לדטי, יואל גבע

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1 נתונה סדרה הנדסית איך-סופית שהמנה שלה היא $\frac{1}{4}$ וסכומה $9\frac{1}{3}$.
 א. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

בין כל שני איברים סמוכים בסדרה הוסיפו איבר חדש כך שהתקבלה סדרה הנדסית איך-סופית חדשה, שכל האיברים בה חיוביים.

ב. מהי המנה של הסדרה החדשה? נמק.

ג. עבור כל אחת מן הטענות II-I שלפניך קבע אם היא נכונה או אינה נכונה. נמק את קביעותיך.

(I) האיבר החמישי בסדרה החדשה שווה לאיבר העשירי בסדרה הנתונה.

(II) סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה החדשה הוא $\frac{1}{2}$ מסכום הסדרה הנתונה.

10 נתונה סדרה הנדסית איך-סופית שמה $q = \frac{1}{4}$ ו $S = 9\frac{1}{3}$.
 נציב בנוסחה של סכום סדרה הנדסית איך-סופית:

$$\frac{a_1}{1 - \frac{1}{4}} = 9\frac{1}{3}$$

$$\frac{a_1}{\frac{3}{4}} = 9\frac{1}{3} \quad \left| \cdot \frac{3}{4} \right.$$

$$a_1 = 7$$

2 נתון כי בין שני איברים סמוכים בסדרה הנתונה, הוסיפו איבר נוסף. לפי נתון זה, האיבר השני בסדרה הנתונה, יהיה האיבר השלישי בסדרה החדשה.



נמצא את האיבר השני בסדרה היתונה: $a_2 = 7 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

שונה אינו האיבר השלישי בסדרה החזקה: $a_3 = a_1 Q^2 = \frac{7}{4}$

כיצוד, $a_1 = 7$ ולכן: $7 \cdot Q^2 = \frac{7}{4} \quad / : 7$

$$Q^2 = \frac{1}{4} \quad / \sqrt{}$$

$$Q = \frac{1}{2} \quad Q = -\frac{1}{2}$$

ניתן כי בסדרה החזקה Q האגזרים חיוביים, ולכן $Q = -\frac{1}{2}$ נבסל.

אם כן, הענה של הסדרה החזקה היא $\frac{1}{2}$

לפיכך את שתי הסדרות:

הסדרה היתונה ($a_1 = 7, q = \frac{1}{4}$) - $7, \frac{7}{4}, \frac{7}{16}, \frac{7}{64}, \dots$

הסדרה החזקה ($a_1 = 7, Q = \frac{1}{2}$) - $7, \frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{8}, \frac{7}{16}, \frac{7}{32}, \frac{7}{64}, \dots$

ד) לטנה I - ניתן לראות כי האיבר החמישי בסדרה החזקה שונה לאיבר השלישי בסדרה היתונה, ולכן

לטנה I אינה נכונה



שאלה II - יקום כי סכום הסדרה התונה הוא $9\frac{1}{3}$.

נמצא * סכום האיברים המקומה הכולל בסדרה

הקדשה: - האיבר הראשון בסדרה האיברים המקומה

הכולל הוא האיבר השני בסדרה - $\frac{7}{2}$

- המנה של סדרת האיברים המקומה הכולל

הוא יגדל המנה של הסדרה - $\left(\frac{1}{2}\right)^2$

נציב את התונה בניסוח אסכום סדרה הקדשה אינפונר

$$S_{\text{כולל}} = \frac{\frac{7}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4\frac{2}{3}$$

נבדוק האם $4\frac{2}{3}$ הוא חצי - $9\frac{1}{3}$:

$$\frac{4\frac{2}{3}}{9\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

ואכן, שאלה II נכונה





2. $ABCA'B'C'$ היא מנסרה משולשת ישרה (ראה ציור).

בסיס המנסרה, ABC , הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים ($AB = BC$, $\angle ABC = 90^\circ$).

נתון כי גובה המנסרה הוא 8 ואורך היתר של בסיס המנסרה שווה ל- $4\sqrt{2}$.

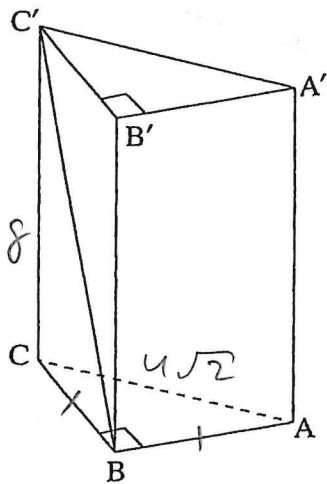
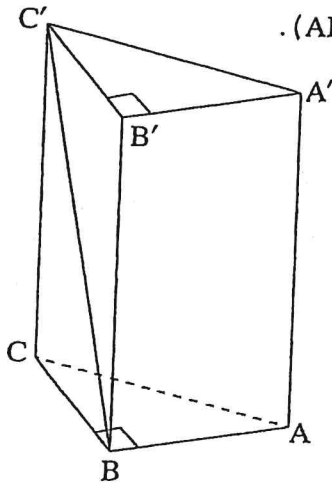
א. מצא את גודל הזווית בין אלכסון הפאה הצדדית $BB'C'C$ ובין בסיס המנסרה.

ב. מצא את גודל הזווית $AC'B$.

ג. מצא את שטח המשולש $AC'B$.

הנקודה D היא אמצע הצלע CB .

ד. חשב את אורך הקטע $A'D$.



פתרון:
א. $\angle BB'C'C$ ו- $\angle ABC$ הם זוויות ישרות:

$$AA' = BB' = CC' = 8$$

$$AC = A'C' = 4\sqrt{2}$$

$$AB \sim 1, BC \sim 1, 8 \sim 1$$

$$ABC \text{ דמיון}$$

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$BC^2 + BC^2 = (4\sqrt{2})^2$$

$$2BC^2 = 32$$

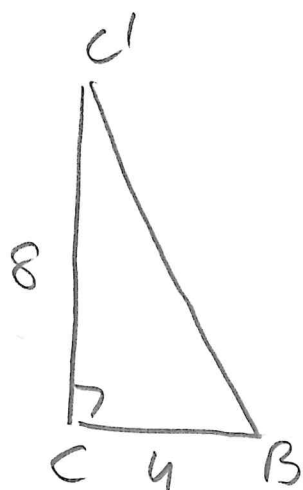
$$BC^2 = 16$$

$$BC = 4$$

$$\downarrow$$

$$AB = 4$$





כאשר כששאלו : BCC'

הוא/היא : $\angle CBC'$

$$\tan \angle CBC' = \frac{8}{4}$$

$$\angle CBC' = 63.435^\circ$$

ב. מדוע AB מאונך ל BB' ?
 $BC \perp BB'$

ואכן מאונך ל BB' כי $BCC'B'$

נחשב יאל BC' כששאלו : BCC'

$$BC'^2 = BC^2 + CC'^2$$

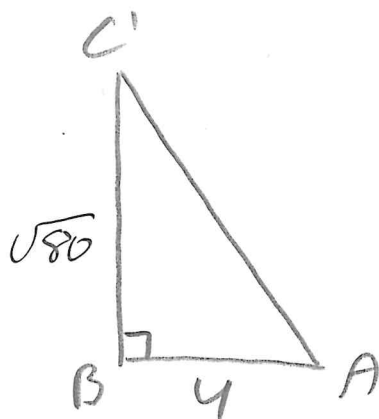
$$BC'^2 = 8^2 + 4^2 = 80$$

$$BC' = \sqrt{80}$$

כאשר נתבונן בשאלו : ABC'

$$\tan \angle AC'B = \frac{4}{\sqrt{80}}$$

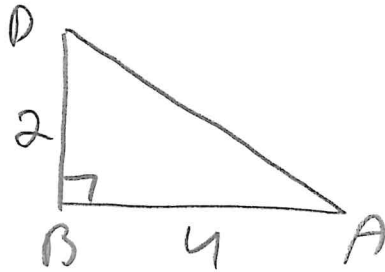
$$\angle AC'B = 24.09^\circ$$





$$S_{AC'B} = \frac{AB \cdot BC'}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{80}}{2} = \boxed{2\sqrt{80}} \quad d.$$

3. כאלו ~ נחשב אליו, הלא AD > שאלו AB:

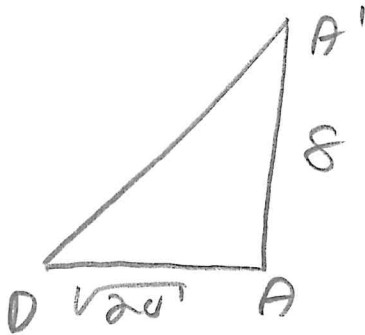


$$AD^2 = AB^2 + BD^2$$

$$AD^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

$$AD = \sqrt{20}$$

נלך נחשב אליו כאלו AA'D:



$$A'D^2 = AA'^2 + AD^2$$

$$A'D^2 = 8^2 + (\sqrt{20})^2 = 84$$

$$\boxed{A'D = \sqrt{84}}$$



3. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin 2x$, המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

ענה על הסעיפים א-ג בעבור התחום $0 \leq x \leq \pi$.

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = 2 \sin x$, המוגדרת גם היא בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: בתחום הנתון, מלבד הנקודות שמצאת בסעיף ב, גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא מעל גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בתחום הנתון.

סעיף 1
 (א) נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

$$f(0) = \sin(2 \cdot 0) = 0$$

$$(0, 0)$$

נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

$$\sin 2x = 0$$

$$2x = \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2} k$$

k	x	0 ≤ x ≤ π
k=0	$x = \frac{\pi}{2} \cdot 0 \rightarrow x=0$	נמצא
k=1	$x = \frac{\pi}{2} \cdot 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$	נמצא
k=2	$x = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \rightarrow x = \pi$	נמצא
k=3	$x = \frac{\pi}{2} \cdot 3 \rightarrow x = 1.5\pi$	לא נמצא
k=-1	$x = \frac{\pi}{2} \cdot (-1) \rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$	לא נמצא





אם נקבע ש x זה נקודת הקיצון אז צמוד הקצבה אל

באמצעות ההצבה. (נניח) אז אם אנו יוצאים y שאינו:

$$f(0) = \sin(2 \cdot 0) = 0 \quad (0, 0)$$

$$f(\pi) = \sin(2 \cdot \pi) = 0 \quad (\pi, 0)$$

אם נקבע הקיצון באמצעות טבלת סימנים ויכירה

x		0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	
y'			+	0	-	0	+		
y				1	-1	-1			

(צב כנעני)

$$f'(\frac{\pi}{6}) = 2 \cos(2 \cdot \frac{\pi}{6}) = 1$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = 2 \cos(2 \cdot \frac{\pi}{2}) = -2$$

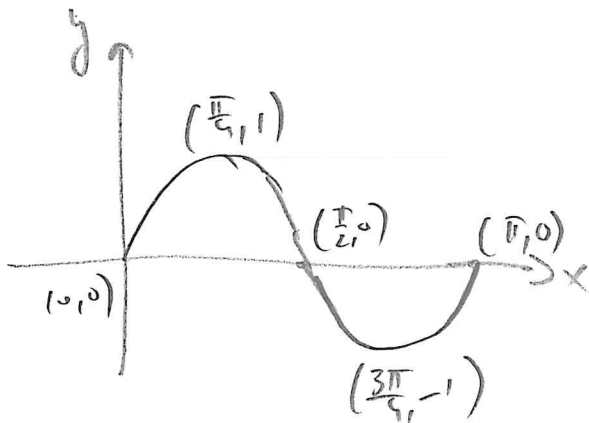
$$f'(\frac{5\pi}{6}) = 2 \cos(2 \cdot \frac{5\pi}{6}) = 1$$

נקודת הקיצון היא:

$$\min(0, 0), \quad \max(\frac{\pi}{4}, 1), \quad \min(\frac{3\pi}{4}, -1), \quad \max(\pi, 0)$$



(3) (שט) סקירה של גוף הסקציה:



(7) (שט) א גוף סקציה של הסקציה - א גוף
 פניון של מנייה לשטח

$$\begin{cases} f(x) = \sin 2x \\ g(x) = 2\sin x \end{cases}$$

$$\sin 2x = 2\sin x$$

לשטח דפוס א סטס שטח (פא): $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$$2\sin x \cos x = 2\sin x$$

$$2\sin x \cos x - 2\sin x = 0$$

$$2\sin x (\cos x - 1) = 0$$

$$2\sin x = 0$$

$$\cos x - 1 = 0$$





$$2 \sin x = 0 \quad | :2$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi k$$

הפתרון: $x = 0$

$$x = 0 \quad (0, 0)$$

$$x = \pi \quad (\pi, 0)$$

$$\cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi k$$

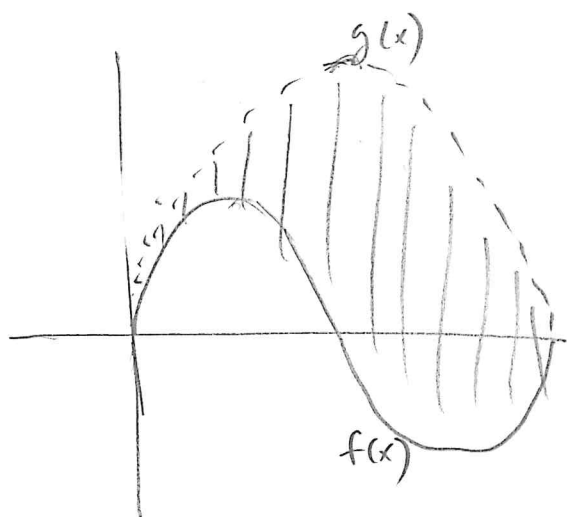
הפתרון: $x = 0$

$$x = 0 \quad (0, 0)$$

נקודת החיתוך של הפונקציות: $(0, 0)$, $(\pi, 0)$

נשאל באיזה אזור צינור אט הצינור

אז הצינור האמיתי.



$$g(x) - f(x)$$

היטל היטל צוויי:

$$2\sin x - \sin 2x$$

$$x=0$$

$$, x=\pi$$

גבולות השלח הקי!

$$S = \int_0^{\pi} (2\sin x - \sin 2x) dx$$

$$S = \left[-2\cos x - \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) \right]_0^{\pi}$$

$$S = \left[-2\cos x + \frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\pi}$$

$$S = \left[-2\cos \pi + \frac{\cos 2 \cdot \pi}{2} \right] - \left[-2\cos 0 + \frac{\cos 2 \cdot 0}{2} \right]$$

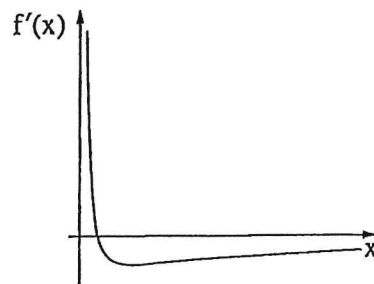
$$S = 4.$$





4. נתונה הפונקציה $f(x) = 9 - (\ln x)^2$.

- א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
 (2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 (3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.
 (4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 הציור שלפניך מתאר את הגרף של פונקציית הנגזרת, $f'(x)$.



ב. חשב את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי הישר $x = e$ ועל ידי ציר ה- x .

פתרון:

1) תחום ההגדרה: $x > 0$

2) נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים:

$$f(0) = 9 - (\ln 0)^2 = \text{לא מוגדר}$$

אילו נקודות חיתוך יש? נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים:

נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים:

נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים:

$$0 = 9 - (\ln x)^2$$

$$(\ln x)^2 = 9$$

$$\ln x = \pm 3$$





$$\ln x = 3$$

פתרון טאון:

$$\log_e x = 3$$

$$x = e^3$$

$$(e^3, 0)$$

$$\ln x = -3$$

פתרון טאון:

$$\log_e x = -3$$

$$x = e^{-3}$$

$$x = \frac{1}{e^3}$$

$$\left(\frac{1}{e^3}, 0\right)$$

(3) נגזרת הפונקציה $f(x) = -2 \ln x$ מצד שמאל:

$$f'(x) = -2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{-2 \ln x}{x}$$

$$\frac{-2 \ln x}{x} = 0$$

מכאן נגזרת = 0:

$$-2 \ln x = 0 \quad | : -2$$

נכנס למחשבון:

$$\ln x = 0$$

$$\log_e x = 0$$

$$x = e^0$$

$$x = 1$$





$$f(1) = 9 - (1)^2 = 9$$

(1, 9)

נמצא את הנקודה המקסימלית:

נמצא את הנקודה המקסימלית באמצעות טבלת סימנים:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f'(x)$	/	+	0	-
$f(x)$	/	↗	9	↘

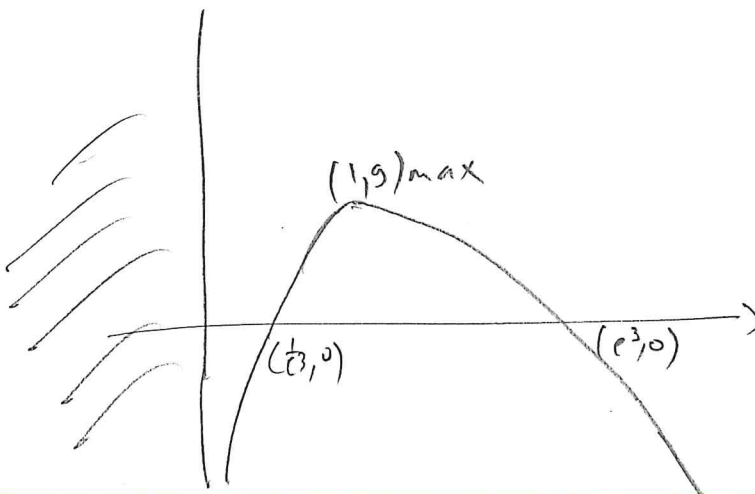
$$f'(2) = \frac{-2 \ln 2}{2} = -0.693$$

נקודה קיצונית

$$f'(\frac{1}{2}) = \frac{-2 \ln \frac{1}{2}}{2} = 2.77$$

הנקודה המקסימלית היא (1, 9).

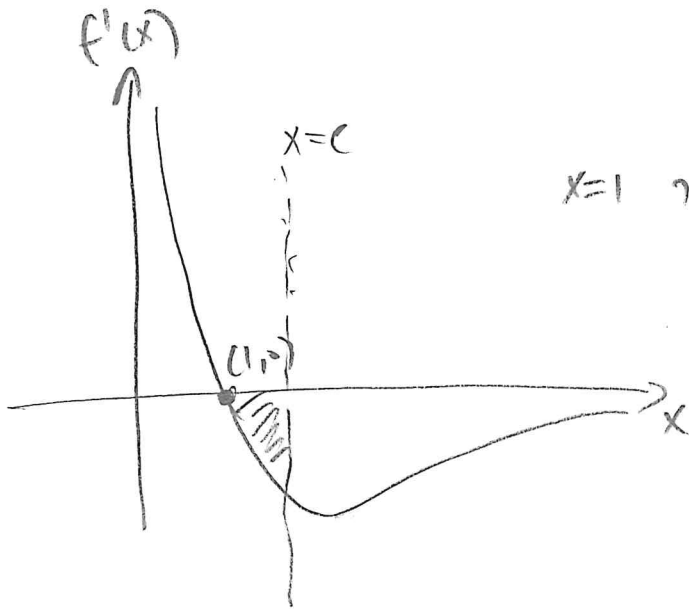
(4) נמצא את הנקודה המקסימלית:



למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





(ג) נסתכל על גרף הנגזרת
 אפשרות יש עליה קיצון צריך $x=1$
 ואכן גרף הנגזרת חותך
 את ציר x בקצו (1,0)
 נוסף שם הנגזרת $x=e$
 קטעיה הנכספים ונסמן
 את הלאה הנחות.

$$0 - f'(x) \\ - f'(x)$$

(ה) יש פסגות:

$$x=1, x=e$$

הפחות הלאה:

$$S = \int_1^e -f'(x) dx =$$

$$[-f(x)]_1^e$$

$$[-f(e)] - [-f(1)] \\ -f(e) + f(1)$$

(ו) ג וף הלאה:

נכניס את גולות הלאה:

$$-\left[9 - (\ln e)^2\right] + \left[9 - (\ln 1)^2\right]$$

$$- [8] + [9] = 1 \text{ זהו}$$





5. הכמות של חומר רדיואקטיבי דועכת בקצב מעריכי.

ביום מסוים נמדדה כמות התחלתית של חומר זה.

שנה לאחר יום המדידה הראשון נשארה מן החומר כמות של $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ ק"ג.

5 שנים לאחר יום המדידה הראשון נשארה מן החומר כמות של $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$ ק"ג.

א. מצא את קצב הדעיכה של החומר ואת הכמות ההתחלתית שלו.

נתונה הפונקציה $g(x) = 3^{-2x}$ המוגדרת לכל $x \geq 0$.

הפונקציה $g(x)$ מתארת את כמות החומר x שנים לאחר יום המדידה הראשון.

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בעבור $x \geq 0$.

$$M_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$M_0 \cdot q = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$M_5 = \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$M_0 \cdot q^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

א. (בא) טאן:

(ב) קצב כמות וזמן:

זמן טאן:

$$\frac{M_0 \cdot q^5}{M_0 \cdot q} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \quad \text{המשלה:}$$

$$q^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^8 \quad \sqrt[4]{\quad} \quad \text{אם חזק דעלף עבא:}$$

$$q = \pm \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$q = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$q = \frac{1}{9}$$

אזכה הדחנה חזק וזמן



(מקס) אף מ מ יצי הקדמ להמשל הטלוגרף.

$$M_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$M_0 = 1$$

(ה) נגלה חסר עז ציג י, נצב ס-א:

$$g(0) = 3^{-2 \cdot 0} = 1 \quad (0, 1)$$

(ה) חסר עז ציג י, נצב ס-א:

$$0 = 3^{-2x}$$

אשטל אן פמון כי הקלוי הלחזי חלוצ קלוי.

ולקן אסעקציג אן חסר עז ציג י.

$$g'(x) = 3^{-2x} \cdot (-2) \cdot \ln 3 \quad (2) \text{ נציג אר הטעקציג:}$$

$$3^{-2x} \cdot (-2) \cdot \ln 3 = 0 \quad \text{כי } -2 \cdot \ln 3 \neq 0 \quad \text{נציג אר ס-א:}$$

$$3^{-2x} = 0$$

אשטל אן פמון כי הקלוי הלחזי חלוצ קלוי.

ולקן אסעקציג אן נקציג קלוי.





מאז תחילת שנה זו, אין אף אחד.

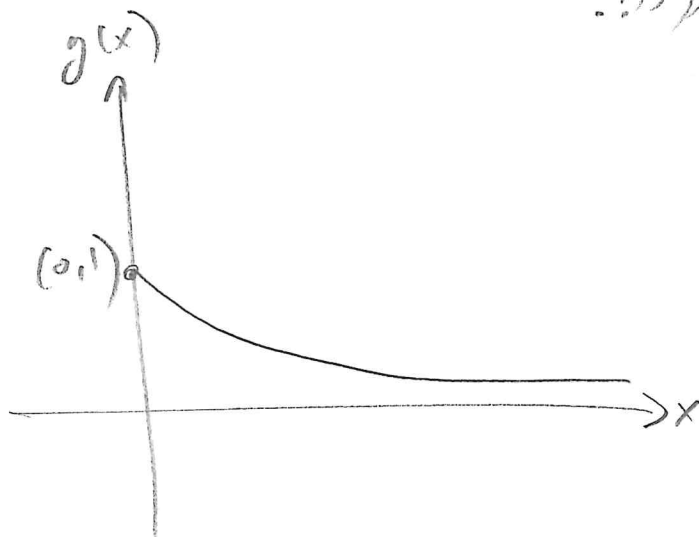
x	0	1
$g'(x)$	זרי	-
$g(x)$		-

$$g'(1) = 3^{-2} \cdot (-2) \cdot 1 = -0.24$$

אזי אולי אין.

אזי אולי אין.

(3) (אולי) אולי (אולי) :



למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

