

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשע"ט, 2019 מועד ב', שאלון: 35582

מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

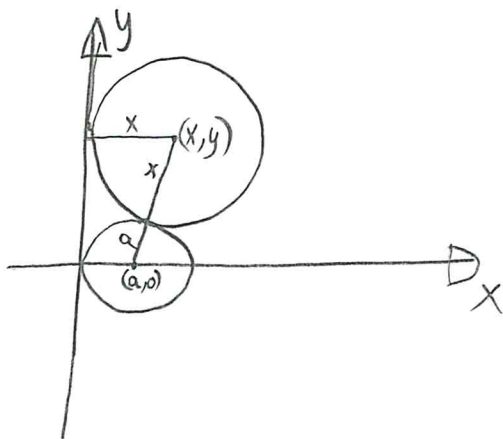
נמידע על פסיכומטרי
ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

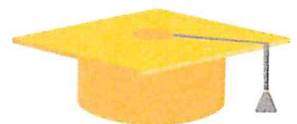


- I. נתון מעגל שמשוואתו היא: $x^2 + y^2 = a^2$. הוא פרמטר חיובי.
 הזיזו את המעגל ימינה (הזזה אופקית) כך שישק לציר ה- y .
 א. הבע באמצעות a את משוואת המעגל שהתקבל.
 ב. בונים מעגל המשיק מבחוץ למעגל שהתקבל בסעיף א ומשיק גם לציר ה- y . שיעור ה- x של מרכז המעגל שבונים הוא חיובי.
 מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאים מרכזי המעגלים הנבנים כך (אם יש צורך, השתמש ב- a).
 הישר $y = x + 3$ משיק בנקודה M למקום הגאומטרי שאת משוואתו מצאת בסעיף ב.
 ג. מצא את a .
 ד. רשום את שיעורי נקודת ההשקה של שני המעגלים האלה:
 I. המעגל שהתקבל בסעיף א.
 II. המעגל שנבנה כמתואר בסעיף ב ומרכזו הוא בנקודה M .

א מרכז המעגל הנמתן הוא $(0,0)$ ונרציוסו הוא a .
 אם נניח את המעגל ימינה, כך ש- a צצים, כך ש- a כרכס
 יהיה $(a,0)$, המעגל ישיק לציר y כראשון
 הצירים/מעגל זה יהיה $(x-a)^2 + y^2 = a^2$.



ב כאשר מעגלים משיקים
 נבחוץ, קטע המרכזים
 הוא סכום הרציוסים.
 נחזיק את מרכז
 המעגל החיצון ב- (x,y)
 ונחזיק את מרכז קטע אלגברי
 בין x ו- y .



מאחר והמעגל החגים משיק לציר y ממין לציר ה- x, ניתן לנקות שרביעית הוא שיזור ה- x על מרכז המעגל החגים.

סכום רציוסים = קטע מרכזים

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = x+a \quad | \cdot 2$$

$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$y^2 = 4ax$$

קיבלנו פרבולה בה $p = 2a$. ניתן לראות ברור נוסף שמעיל כי הטמ סעיף ז'.

ז' משוואת משיק לפרבולה נראית כך: $y_0 = p(x+a)$

נציב $p = 2a$, נציב אותה באופן מפורט (כמו צמ y מבוזבז), ונשווה למשיק הניתן

את מקצם x ואת האיבר החופשי.

$$y = \frac{2a}{y_0}(x+a) \rightarrow y = \frac{2a}{y_0}x + \frac{2a}{y_0}a$$

מהשוואת משוואת המשיק הניתון ניתן להסיק ש:

$$\begin{cases} \frac{2a}{y_0} = 1 \\ \frac{2a}{y_0} \cdot a = 3 \end{cases}$$



נובע $\therefore x_0 = 3$ ומאחר והנקודה (x_0, y_0)
 נמצאת על המשיק (היא נקודת ההשקה) ניתן
 להסיק $\therefore y_0 = 6$. נובע $\therefore M(3, 6)$

מהצבה של $y_0 = 6$ במשוואה $\frac{2a}{y_0} = 1$ נובע

$\therefore \boxed{a=3}$

3 נקודת M היא מרכז המעגל שנקב

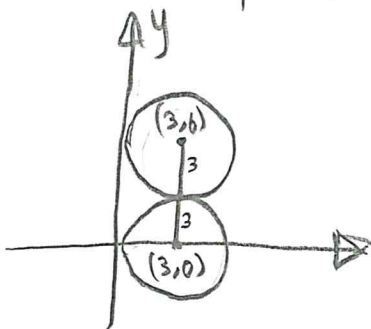
כמאחר בסעיף ב'. שצווייה הם $(3, 6)$.

ואכן כזיוס המעגל הנ"ל הוא 3.

מאחר $a=3$, מרכז המעגל שהתקבל בסעיף

א' הוא $(3, 0)$ וכזיוסו הוא 3.

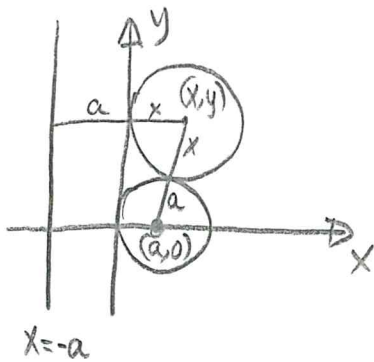
ההשקה בין שני מעגלים אלה מתקבלת
 בנקודה $(3, 3)$ מאחר והיא אמצע קטע המרכזים.



בתרונ נוס אסעל ה':

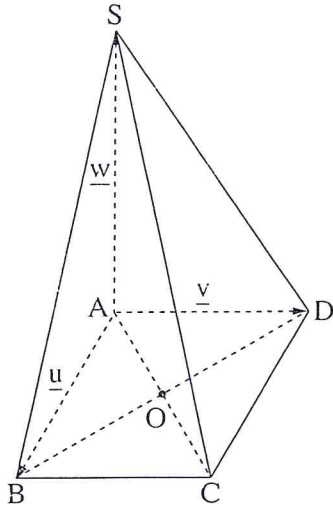
מרחק מרכזי המעגלים מהנקודה $(0, a)$ גדול? a
 יחידות ממרחק מרכזי המעגלים מהציר ה- y ולכן
 מרחק מרכזי המעגלים מהנקודה $(0, a)$ שווה למרחק
 של מרכזי המעגלים מהישר $x = -a$.

ע"כ הגדולת הפרבולה, אוסף ה הנקודות שמתאוו
 במרחק שווה מהנקודה $(0, a)$ והישר $x = -a$ מגאווה
 פרבולה? $\frac{a}{2}$ ולכן שווה הפרבולה



היא $y^2 = ax$





2. נתונה פירמידה $SABCD$, שבסיסה, $ABCD$, הוא ריבוע (ראה ציור). הנקודה O היא נקודת חיתוך אלכסוני הבסיס. הנקודה P היא נקודה על הקטע SD , והיא מקיימת $\vec{SP} = t \cdot \vec{SD}$, $t > 0$. נסמן: $\vec{AS} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
- הבע את הווקטור \vec{OP} באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- t .
 - מצא בעבור איזה ערך של t , מקביל למישור הפאה SAB . נתון: אורך צלע הריבוע $ABCD$ הוא 4, $AS = 4\sqrt{2}$. מאונך לבסיס הפירמידה, הנקודה A היא ראשית הצירים. הנקודות B , D ו- S נמצאות על החלק החיובי של הצירים x , y ו- z בהתאמה.
 - מצא בעבור אילו ערכים של t , הישר OP יוצר זווית של 45° עם מישור הפאה SAD .
 - הנקודה T נמצאת על הקטע SC כך ש- $TABCD$ היא פירמידה ישרה.
 - מצא את נפח הפירמידה $TABCD$.

א. $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AS} + \vec{SP}$

* הריבוע אלכסונים חוצים זה את זה.

$$\vec{OP} = \frac{1}{2}(-\underline{y} - \underline{y}) + \underline{w} + t(\underline{v} - \underline{u})$$

$$\vec{OP} = (t - \frac{1}{2})\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{u} + (1-t)\underline{w}$$

ב. ע"מ \vec{OP} יקבל משיור הפאה SAB עליו להיות מוכח מקואנליזיה אנליטית של הווקטור כיוון שפניו של המישור $(\underline{u}, \underline{w})$ ו- $|\underline{z} = \frac{1}{2}|$

ג. מכיון שמישור הפאה SAD מכוון את הצירים z ו- y גשולית המישור הוא: $x=0$

כעת נבנה את כיוון הישר \vec{OP} בהצגה אלגורית, מכיון ש $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 4$! $|\underline{w}| = 4\sqrt{2}$ ו- A (מצאתי בהטיות הצירים).

(קב): $\underline{u} = (4, 0, 0)$, $\underline{v} = (0, 4, 0)$, $\underline{w} = (0, 0, 4\sqrt{2})$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



$$\vec{OP} = (t - \frac{1}{2})(0, 4, 0) - \frac{1}{2}(4, 0, 0) + (1-t)(0, 0, 4\sqrt{2})$$

$$\vec{OP} = (-2, 4t-2, 4\sqrt{2}(1-t))$$

ז'פי נוסחת זווית בין ישר למישור:

$$\sin \alpha = \frac{|(1, 0, 0) \cdot (-2, 4t-2, 4\sqrt{2}(1-t))|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2} \cdot \sqrt{(-2)^2+(4t-2)^2+(4\sqrt{2}(1-t))^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{|-2|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{4+16t^2-16t+4+32-64t+32t^2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{48t^2-80t+40}}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{48t^2-80t+40} = 4 \quad | \quad ()^2$$

$$2(48t^2-80t+40) = 16 \quad | :2$$

$$48t^2-80t+40 = 8$$

$$48t^2-80t+32 = 0$$

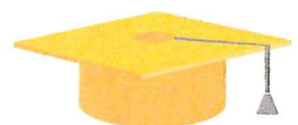
$$| t=1, t=\frac{2}{3} |$$

3. כפיירמיצה ישנה האקה נופס א' ארכז המפס החוסס א'ר צוויר הקסוס באקרה
 שלני ס. TO ! SA מקבולים, סג'הם לאונקיום למישור הקסוס (סד זוקר
 כפיירמיצה AS מונה א' ציר ה-2). AD=OC (ברמיזס הו/פסלניס חוזבים)
 ולכן: סד הוא קסע אמצ'ים במשולס SAC, ואולכנו לחצ'ור SA ו TO=2\sqrt{2}
 ש'ח קסוס הפירמיצה: 4 \cdot 4 = 16

$$V_{TARCD} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 16}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{3}$$

נחידע ענ פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
 אל תתפשר עליה.



3. נתונה סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא 1 והאיבר השני שלה הוא iz (הוא מספר מרוכב). נתון כי הסדרה איננה קבועה.

א. (1) רשום את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה (אם יש צורך, הבע באמצעות z).

(2) הוכח כי סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה שווה ל- $\frac{z^5 + i}{z + i}$.

ב. (1) מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^5 = -i$ (הוא מספר מרוכב).

(2) מצא את כל הפתרונות של המשוואה $1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 = 0$ (הוא מספר מרוכב).

הנקודה A נמצאת ברביע השלישי במישור גאוס, והיא מתאימה לאחד מפתרונות המשוואה שפתרת בתת-סעיף ב (2) ABO הוא משולש שווה צלעות במישור גאוס (O – ראשית הצירים).

ג. מצא את המספר המרוכב המתאים לנקודה B (מצא את שתי האפשרויות).

$$a_1 = 1$$

א. (1) נמון שהסדרה הנדסית

$$a_2 = iz$$

נמשך אל מנתה:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = iz$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = (iz)^2 = -z^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = -z^2 \cdot iz = -iz^3$$

$$a_5 = a_4 \cdot q = -iz^3 \cdot iz = z^4$$

$$S_5 = \frac{a_1 \cdot (q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot ((iz)^5 - 1)}{iz - 1} = \frac{i^5 z^5 - 1}{iz - 1} \quad (2) \text{ א}$$

$$= \frac{iz^5 - 1}{iz - 1} \cdot \frac{-i(iz^5 - 1)}{-i(iz - 1)} = \frac{z^5 + i}{z + i}$$

* בשלב 5 בולט שכל $-i$ של מונה ומכנה יאפשר הקצת של i (הוא מספר מרוכב)

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



$$z^5 = -i$$

ב (1)

$$z^5 = \text{CIS}(-90^\circ)$$

$$z_k = \text{CIS}\left(-\frac{90^\circ}{5} + \frac{360^\circ k}{5}\right) = \text{CIS}(-18^\circ + 72^\circ k)$$

$$k = 0 \dots 4$$

$$z_0 = \text{CIS}(-18^\circ), z_1 = \text{CIS}(54^\circ), z_2 = \text{CIS}(126^\circ),$$

$$z_3 = \text{CIS}(198^\circ), z_4 = \text{CIS}(270^\circ)$$

ב (2) ניתן להבחין שהבקשנו לסכום אל

חמש האיברים הראשונים של הסדרה

ההנדסית הנמונה. ע"פ סעיף א (2)

 סכום זה שווה $\frac{z^5 + i}{z + i}$. נשווה לאברי

$$z^5 = -i \iff z^5 + i = 0 \iff \frac{z^5 + i}{z + i} = 0$$

הפתרונות שהתקבלים הם הפתרונות של סעיף ב (1)

$$z_0 = \text{CIS}(-18^\circ), z_1 = \text{CIS}(54^\circ), z_2 = \text{CIS}(126^\circ), z_3 = \text{CIS}(198^\circ), z_4 = \text{CIS}(270^\circ)$$

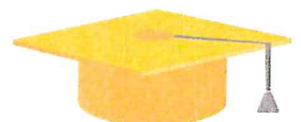
המסקנה פורמון סעיף ב (2) מתאימה לכאורה



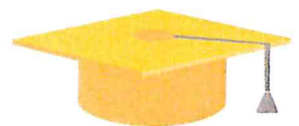
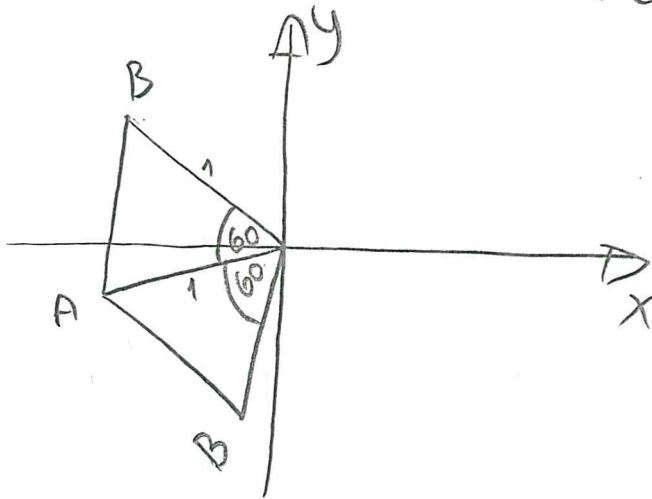
יש אדם זה שהפתרון $z_4 = \text{cis}(270^\circ)$ הופך את
 הסדרה לסדרה הנרדמת. שהמנה שלה היא 1 (כאומר
 לסדרה סדרה קבועה) וכן, הסכום לא יהיה אפס.

אמכן יש אפסוף את הפתרון הצה וזה שאר עם אחרת
 הפתרונות:

$$z_0 = \text{cis}(-18^\circ), z_1 = \text{cis}(54^\circ), z_2 = \text{cis}(126^\circ), z_3 = \text{cis}(198^\circ)$$



ג הנקודה A מתאמה לפיתרון (198)C למחר
 והיא הפיתרון היחיד שניתן להגיע אליו.
 למחר והמאויור במשולש שווה צלעות הן 60°
 והצלעות שוות 1 ניתן להסיק שהצלעות
 OB היא סיבוב של הצלעות OA 60° עם כיוון
 השעון או נגד ולכן הנקודה B היא
 (258)C או (138)C.



4. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(x^2 + ax + 1)$.
 a הוא פרמטר, $-2 < a < 2$.

- א. הראה שהפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .
- ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x (אם יש צורך, הבע באמצעות a).
- ג. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה (אם יש צורך, הבע באמצעות a).
- ד. בסוף השאלה מוצגים שלושה גרפים (I-III) המתארים את גרף הפונקציה $f(x)$ כתלות בפרמטר a .
 כל אחד מן הגרפים מתאים לאחד מן התחומים (1)-(3) של a :

(1) $0 < a < 2$

(2) $-2 < a < 0$

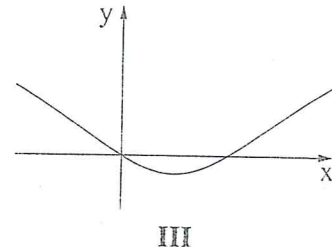
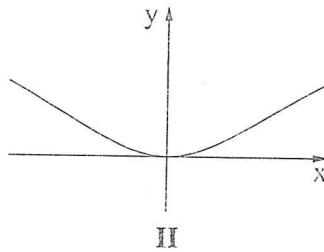
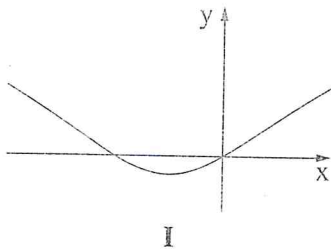
(3) $a = 0$

כתוב איזה מתחומי הערכים (1)-(3) מתאים לכל אחד מן הגרפים.

ענה על סעיף ה בעבור a המקיים $-2 < a < 0$.

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

ה. הבע באמצעות a את האינטגרל: $\int_0^{-a} \ln(4x^2 + 4ax + 4) dx$.



$$f(x) = \ln(x^2 + ax + 1)$$

(4)

$$-2 < a < 2$$

 (א) תחום ההגדרה

$$x^2 + ax + 1 > 0$$

$$\Delta = a^2 - 4 \cdot 1 = a^2 - 4$$

$$-2 < a < 2 \quad \text{ערך מסווג:}$$

 \Downarrow

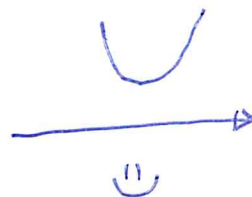
$$a^2 < 4$$

 \Downarrow

$$a^2 - 4 < 0$$

 \Downarrow

הפונקציה אינה מוגדרת אף ציב ה-X



$$x \in \mathbb{R} \quad x^2 + ax + 1 > 0$$

 \Downarrow

$f(x)$ מוגדרת לכל x



נק' חיתוך עם צ'כ ה: $y=0$ (7)

$$\ln(x^2 + ax + 1) = 0$$

$$x^2 + ax + 1 = 1$$

$$x^2 + ax = 0$$

$$x(x+a) = 0$$

$$x=0 \quad x=-a$$

$$\boxed{(0,0) \quad (-a,0)}$$

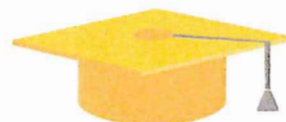
נק' קיצון (8)

$$f'(x) = \frac{2x+a}{x^2+ax+1} = 0 \quad / \cdot (x^2+ax+1)$$

$$2x+a=0$$

$$2x=-a$$

$$x = -\frac{a}{2}$$



$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = \ln\left(\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{a}{2}\right) + 1\right)$$

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = \ln\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + 1\right) = \ln\left(-\frac{a^2}{4} + 1\right)$$

נבדוק $f''(x) = 2 > 0$

כ'כלכלה ס'ול' ר'כל'ר



$$\left(-\frac{a}{2}, \ln\left(-\frac{a^2}{4} + 1\right)\right) \text{ min}$$

אם $0 < a < 2$: I

3

אם $x = -\frac{a}{2}$, $0 < a < 2$.

אם $a = 0$: II

אם $x = 0$, $a = 0$.

אם $-2 < a < 0$: III

אם $x = -\frac{a}{2}$, $-2 < a < 0$.



$$-2 < a < 0 \quad \text{כ}$$

פתרון:

$$\int_0^{-a} (-\ln(x^2 + ax + 1)) dx = S$$

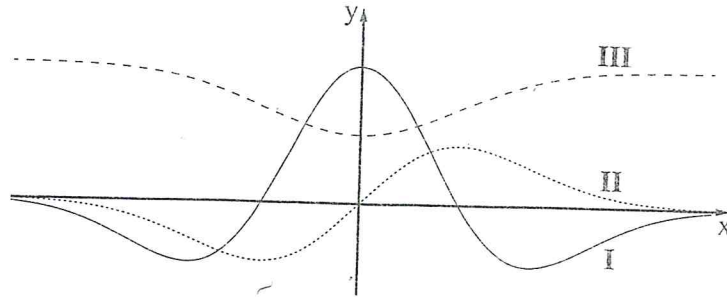
$$\int_0^{-a} \ln(4x^2 + 4ax + 4) dx = \int_0^{-a} \ln 4(x^2 + ax + 1) dx =$$

$$= \int_0^{-a} \ln 4 dx + \int_0^{-a} \ln(x^2 + ax + 1) dx =$$

$$= \ln 4 \cdot x \Big|_0^{-a} - S = \boxed{-a \ln 4 - S}$$



5. לפניך סרטוט המתאר את הגרפים של הפונקציות f , f' , f'' , המוגדרות לכל x .
הגרף III נמצא כולו מעל הגרף II.



- א. התאם כל אחד מן הגרפים I, II, III לפונקציות f , f' , f'' .
נמק את קביעתך.
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f'(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה־y.
נתון כי $f'(x) = x \cdot e^{-x^2}$.
ב. מצא בעבור איזה ערך של x אורך הקטע AB יהיה מקסימלי.
נתון כי האורך המקסימלי של הקטע AB שווה ל־ $1 + \frac{1}{2e}$.
ג. מצא את הפונקציה $f(x)$.

פתרון:
א. עדי תחילה העליה והיורדה של כל גרף, ואבסיסותיהן
שכאשר גרף III עולה גרף II יורד, וכאשר גרף II
יורד גרף III עולה, והיורד היורד של גרף II
היא החתום עם היו א של גרף II. העי צורה
שההיים פיו גרף II עולה I. הבילון ההפונקציה
ההיים חלקו:
גרף III - $f(x)$, גרף II - $f'(x)$, גרף I - $f''(x)$



ג. אנון הילך AB מדף עץ היסוד ערך ה(א) צריך

לערך הפונקציה עבור אנון ערך של $x = t$.
וכיור כי אצל אצל אצל אצל:

$$d_{AB} = f(A) - f(B) = f(t) - f'(t)$$

(ג) מינימום ומזסימיון:

$$d'_{AB} = f'(t) - f''(t) = t e^{-t^2} - (e^{-t^2} + t \cdot (-2t e^{-t^2}))$$

$$d'_{AB} = t e^{-t^2} - e^{-t^2} + 2t^2 e^{-t^2} = e^{-t^2} (2t^2 + t - 1)$$

$$e^{-t^2} (2t^2 + t - 1) = 0$$

✓ ↘
 $\emptyset \quad t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = -1$

e^{-t^2} חיובי לכל t ,

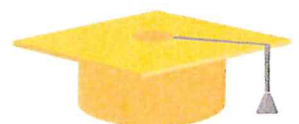
$2t^2 + t - 1 < 0$ כי כוונתנו להיטהר אכן חיובי

עבור $t < -1$ או $\frac{1}{2} < t < 1$

יש אף עבור $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$

מכאן: $t = -1$ מקסימום

$t = \frac{1}{2}$ מינימום



לסיכום:

זכור $x = \frac{1}{2}$ אויב דאס AB יהיה מינימלי.
 זכור $x = -1$ אויב דאס AB יהיה מקסימלי.

ד. נתון: $d_{AB} = 1 + \frac{1}{2e}$ מקסימום

נחזיר: $f(x)$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int x e^{-x^2} dx = -\frac{e^{-x^2}}{2} + C$$

נכזר:

$$d_{AB} = -\frac{e^{-x^2}}{2} + C - x e^{-x^2}$$

נציב:

$$-\frac{e^{-(1)^2}}{2} + C - (1) e^{-(1)^2} = 1 + \frac{1}{2e}$$

$$-\frac{1}{2e} + C + \frac{1}{e} = 1 + \frac{1}{2e}$$

$$C = 1$$

לסיכום, הפונקציה היא

$$f(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2} + 1$$

