

## פתרון הבחינה

# במתמטיקה

קיץ תשע"ט, 2019, שאלון: 35482  
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.




**סדרות**

1. היא סדרה חשבונית שהאיבר הראשון שלה הוא  $a_1$  וההפרש שלה הוא 4.

$$b_n = a_n + 8n$$

א. הוכח כי  $b_n$  היא סדרה חשבונית ומצא את ההפרש שלה.

$$c_n = a_n + b_n$$

ב. הוכח כי  $c_n$  היא סדרה חשבונית.

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

ג. מצא את  $c_1$ .

(2) מצא את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה  $c_n$ .

פתרון:

א.  $a_n$  מסדרה חשבונית:  $a_1 = a_1$ ,  $d = 4$

$b_n$  מסדרה חשבונית:  $b_n = a_n + 8n$

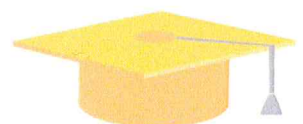
נוכיח כי ההפרש  $b_{n+1} - b_n$  קבוע:

$$b_{n+1} = a_{n+1} + 8(n+1) = a_{n+1} + 8n + 8$$

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} + 8n + 8 - a_n - 8n$$

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n + 8$$

ההפרש  $a_{n+1} - a_n$  שווה ל-4 ולכן:



$$b_{n+1} - b_n = u + d = 12$$

ההפרש קבוע  $d=12$  ולכן סדרת  $b_n$  חשבונית.

$$C_n = a_n + b_n \quad \text{ק. נה"ו:}$$

נוכיח כי ההפרש  $C_{n+1} - C_n$  קבוע:

$$C_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}$$

✓ כאלו:

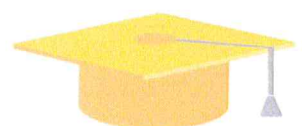
$$C_{n+1} - C_n = (a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n)$$

$$= a_{n+1} + b_{n+1} - a_n - b_n$$

$$= a_{n+1} - a_n + b_{n+1} - b_n$$

$$= u + 12 = 16$$

ההפרש קבוע  $d=16$  ולכן סדרת  $C_n$  חשבונית.



$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$d = 16$$

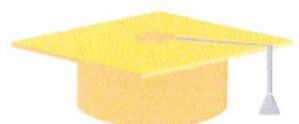
$$b_1 = a_1 + 8 \cdot 1 = \frac{1}{2} + 8 = 8\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$c_1 = a_1 + b_1 = \frac{1}{2} + 8\frac{1}{2} = \boxed{9}$$

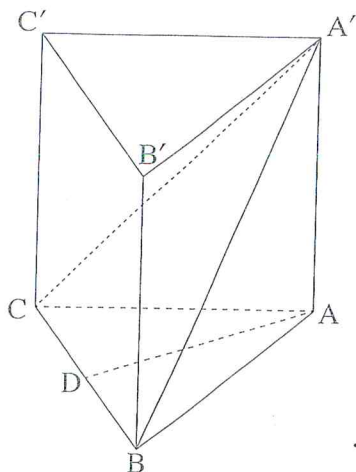
$$S_{20} = \frac{20}{2} [2c_1 + (20-1) \cdot d] \quad (2)$$

$$= 10 [2 \cdot 9 + 19 \cdot 16]$$

$$= \boxed{3220}$$



טריגונומטריה במרחב



2.  $ABCA'B'C'$  היא מנסרה משולשת וישרה

שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ( $AC = AB$ ).

הנקודה D היא אמצע הקטע CB (ראה ציור).

נתון:  $AD = 12$ ,  $\angle CAB = 40^\circ$ .

א. חשב את אורך הצלע CB.

ב. הסבר מדוע המשולש  $CA'B$  הוא משולש שווה שוקיים.

נתון כי שטח המשולש  $CA'B$  הוא 80.

ג. חשב את גודל הזווית שבין הקטע  $DA'$  ובין בסיס המנסרה,  $ABC$ .

ד. חשב את נפח המנסרה  $ABCA'B'C'$ .

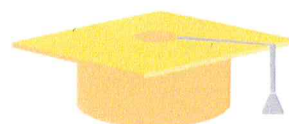
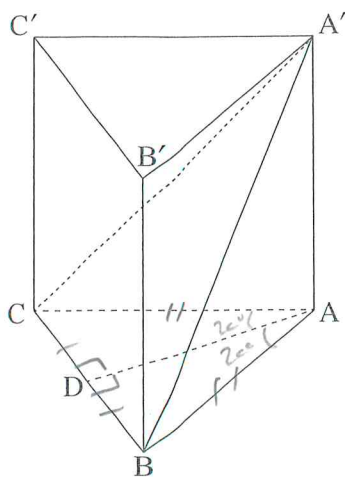
נסמן את הנמוך מ A' ל BC כ H

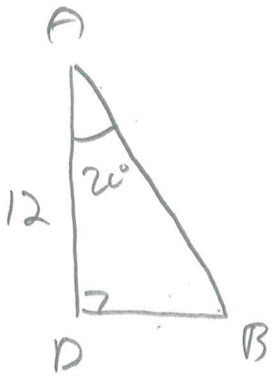
AD תיכון זכאי בג' שיש שווה שוקיים, אז

הוא גם זכאי וגם חוקי ל A' B C:

$$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$$

$$\angle ABD = \angle CAD = 20^\circ$$





c. (השאלה) BD במשולש ABD:

$$\tan 20^\circ = \frac{BD}{12} \Rightarrow BD = 4.3676$$

$$CB = 2 \cdot BD = \boxed{8.735} \quad \delta / \epsilon$$

ב. מתקיים:  $AB = AC$  (נתון)  
 $AA' = AA'$  (כאן אולי אגרונו)

$\angle BAA' = \angle CAA' = 90^\circ$  (נתון) (שאלה נוספת)  
 (שאלה נוספת)

$\triangle BAA' \cong \triangle CAA'$  (משפט הסימ) (3.5.3)

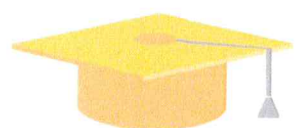
$A'C = A'B$  (קצוות)

משולש  $CA'B$  שווה שוקיים

d. הציור הוא שווה  $\triangle ADA'$ .

$$S_{CA'B} = 80 \quad \text{(נתון)}$$

סימנינו קבצים  $CA'B$  במשולש  $CA'B$



ואכן הנושא טובה. מכיון:

$$\frac{BC \cdot A'D}{2} = 80$$

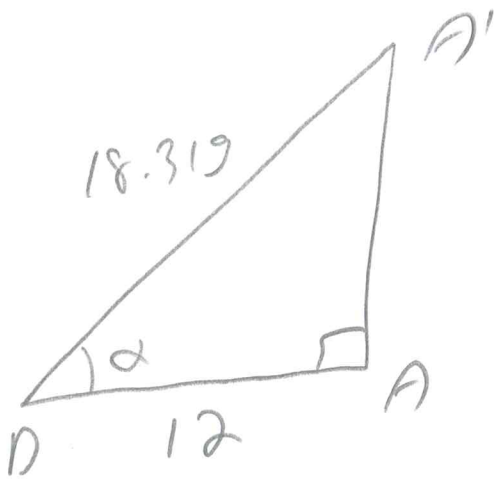
$$\frac{8.735 \cdot A'D}{2} = 80$$

$$A'D = 18.32$$

כך במשולש AA'D:

$$\cos \angle A A' D = \frac{12}{18.32}$$

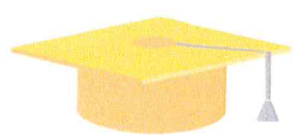
$$\angle A A' D = 49.078^\circ$$



$$V_{ABCA'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA'$$

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{8.735 \cdot 12}{2} = 52.41$$

3.



נחשב את האורך  $AA'$  דהיינו  
 גובה המשולש פיתאגורס:

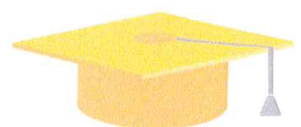
$$AA'^2 + AM^2 = A'M^2$$

$$AA'^2 + 12^2 = 18.32^2$$

$$AA' = 13.84$$

נכאן:

$$V_{ABCA'B'C'} = 52.41 \cdot 13.84 = \boxed{725.3544}$$





3. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .  
 נתון:  $f(0) = 0.75$ ,  $f'(x) = -3 \sin 2x$ .  
 פונקציית הנגזרת,  $f'(x)$ , מוגדרת גם היא בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .
- מצא ביטוי אלגברי לפונקציה  $f(x)$ .
  - מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ .
  - מצא את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון, וקבע את סוגן.
  - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
  - חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$  ועל ידי ציר ה- $x$  בתחום שבין נקודות החיתוך שמצאת בסעיף ב.

א. מצא את הביטוי אלגברי לפונקציה  $f(x)$  על ידי אינטגרל של  $f'(x)$ :

$$\int (-3 \sin 2x) dx = \frac{3 \cos 2x}{2} + C$$

נתון כי:  $f(0) = 0.75$ , אז

$$\frac{3 \cos(2 \cdot 0)}{2} + C = 0.75$$

$$1.5 + C = 0.75$$

$$C = -0.75$$

$$f(x) = \frac{3 \cos 2x}{2} - 0.75$$

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ :  $f(x) = 0$

$$\frac{3 \cos 2x}{2} - 0.75 = 0$$

$$1.5 \cos 2x = 0.75$$

$$\cos 2x = 0.5$$

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad ; \quad 2x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$



$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k$$

k	x
0	$\frac{\pi}{6}$ ✓
x	
-x	

↓

$(\frac{\pi}{6}, 0)$
----------------------

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$$

k	x
0	
1	$\frac{5\pi}{6}$ ✓
-x	
2	

↓

$(\frac{5\pi}{6}, 0)$
-----------------------

ג. מצאתם שלדיוי נקודות הקיצון של הפונקציה לוי השולמה הנמצאת ל-0:

$$f'(x) = -3\sin 2x$$

$$-3\sin 2x = 0 \quad /: (-3)$$

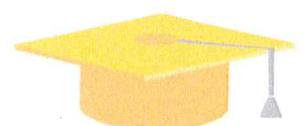
$$\sin 2x = 0$$

$$\sin 2x = \sin(0)$$

$$2x = \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2} k$$

k	x	
0	0 ✓	→ $f(0) = 0.75$
1	$\frac{\pi}{2}$ ✓	→ $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2} \cos(2 \cdot \frac{\pi}{2}) - 0.75 = -2.25$
2	$\pi$ ✓	→ $f(\pi) = \frac{3}{2} \cos(2\pi) - 0.75 = 0.75$
-x		



אנליזה של סוג הקיצון בעזרת טבלת לזיה - ירושה:

x	0	$(\frac{\pi}{6})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{3\pi}{4})$	$\pi$
y'	0	-	0	+	0
y	0.75	↓	$-2\frac{1}{4}$	↑	0.75

הצדק של כיוון קינוי קצרות:

$$f'(\frac{\pi}{6}) = -3\sin(2 \cdot \frac{\pi}{6}) = \ominus$$

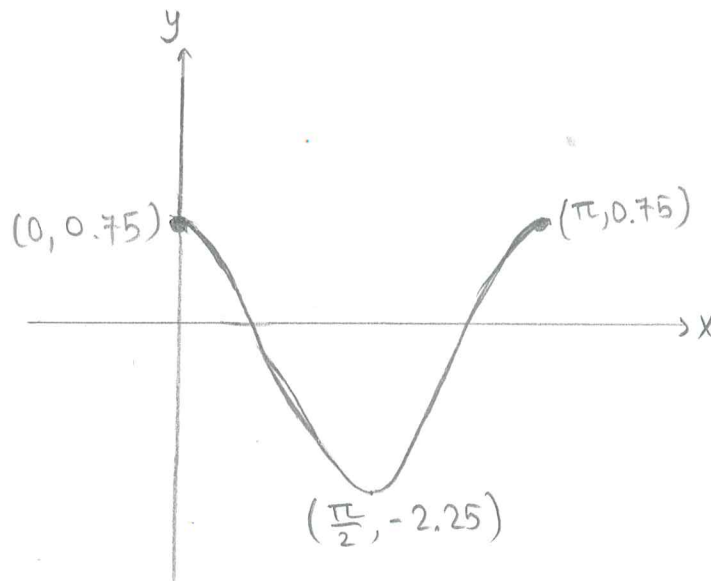
$$f'(\frac{3\pi}{4}) = -3\sin(2 \cdot \frac{3\pi}{4}) = \oplus$$

פסוקס:

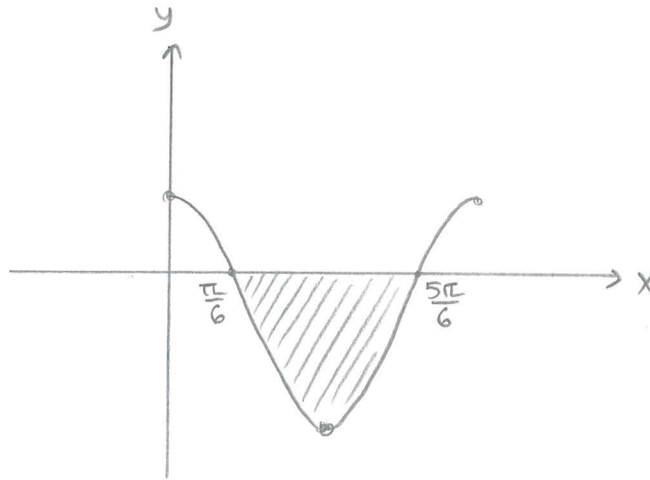
אין צורך לחיוב קצרות  
לעזרת קיצון קצרות,  
מכיון שמחילא מצאנו אזור.

מקסימום קצרה	$(0, 0.75)$
מינימום	$(\frac{\pi}{2}, -2.25)$
מקסימום קצרה	$(\pi, 0.75)$

3. סקיצה של זרף הפונקציה  $f(x)$ :



ה. חישוב השטח המוגדר על ידי הפונקציה וציר ה- $x$ , בתחום שבין לקואורטות החיתוך עם ציר ה- $x$  :



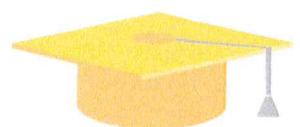
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[ 0 - \left( \frac{3\cos 2x}{2} - 0.75 \right) \right] dx =$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left( -\frac{3}{2} \cos 2x + 0.75 \right) dx = \left. -\frac{3}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} + 0.75x \right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} : \frac{-3 \sin \left( 2 \cdot \frac{5\pi}{6} \right)}{4} + 0.75 \cdot \frac{5\pi}{6} = 2.613$$

$$x = \frac{\pi}{6} : \frac{-3 \sin \left( 2 \cdot \frac{\pi}{6} \right)}{4} + 0.75 \cdot \frac{\pi}{6} = -0.256$$

$$\boxed{S_{\text{מקום}} = 2.613 - (-0.256) = 2.869 \text{ יח}^2}$$



4. נתונה הפונקציה  $f(x) = -3e^x(2e^x - 4)$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.
- ג. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגה.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ה. נתונה הפונקציה  $g(x) = -\frac{1}{2}f(x)$ .
  - (1) כתוב מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ , וקבע את סוגה.
  - (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

א. תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ :  $x \in \mathbb{R}$

נקודת החיתוך עם ציר y:

$$f(0) = -3e^0(2e^0 - 4) = 6$$

↓

$$(0, 6)$$

ב. נקודות החיתוך עם ציר x:

$$-3e^x(2e^x - 4) = 0$$

$$\begin{aligned} -3e^x &= 0 \\ &\text{אין פתרון} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2e^x - 4 &= 0 \\ e^x &= 2 \end{aligned}$$

$$x = \ln 2$$

↓

$$(\ln 2, 0)$$

ג. שיאני נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ : נמצא ונשווה ל-0

$$f'(x) = -3e^x(2e^x - 4) + (-3e^x)(2e^x)$$

$$-3e^x(2e^x - 4) - 3e^x \cdot 2e^x = 0$$

$$-3e^x(2e^x - 4 + 2e^x) = 0$$

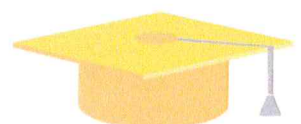
$$\begin{aligned} -3e^x &= 0 \\ &\text{אין פתרון} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4e^x &= 4 \\ e^x &= 1 \end{aligned}$$

$$x = 0$$

מכאן

$$(0, 6)$$



מצאתם סוג הקיצון על פי טבלת חזיה - יחידה:

x	(-1)	0	(1)
y'	+	0	-
y	↗	6	↘

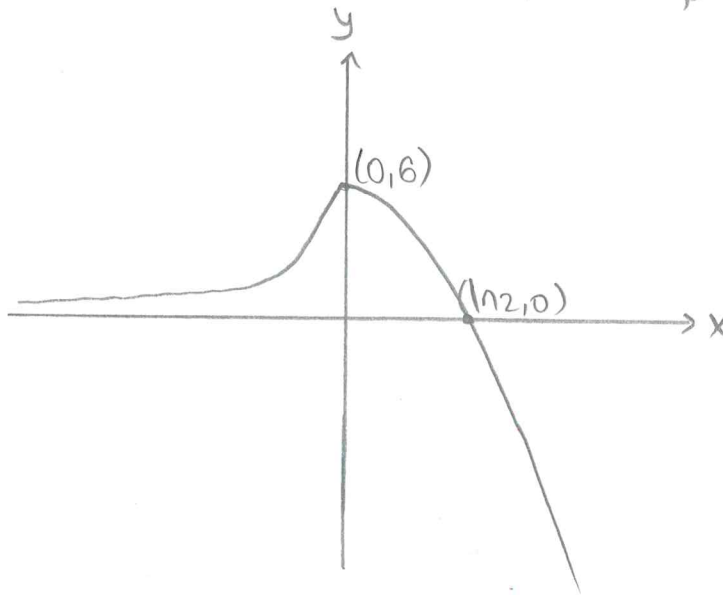
נציה חזיה קנייה קנייה:

$$f'(-1) = -3e^{-1} \cdot (4 \cdot e^{-1} - 4) = \oplus$$

$$f'(1) = -3e^1 \cdot (4e^1 - 4) = \ominus$$

סוג קיצות הקיצון (0,6)  
הוא מקסימום.

ג. שרטוט זיה הפונקציה f(x):



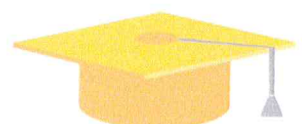
ה.  $g(x) = -\frac{1}{2}f(x)$  ווק, לזיה השינוי הקוא:

- תחומי הזיה הפסס לתחומי יחיה, ולזיה.

- קוצת הקיצון מסוג מקסימום קזת קוצת מינימום.

- זיה הזיה ה- y קפונקציה f(x) מופסו ק:  $-\frac{1}{2}$ .

(1) זיה קוצת הקיצון של הפונקציה g(x): (0, -3) מסוג מינימום



5. נתונה הפונקציה  $f(x) = \ln(-x^2 + ax)$ , שתחום ההגדרה שלה הוא  $0 < x < a$ .  $a > 0$  הוא פרמטר:  
ידוע כי לפונקציה  $f(x)$  יש נקודת קיצון.

א. הראה כי שיעור ה- $x$  של נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  הוא  $\frac{a}{2}$ .

נתון כי שיעור ה- $y$  של נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  הוא  $\ln\left(2\frac{1}{4}\right)$ .

ב. מצא את  $a$ .

הצב  $a = 3$  במשוואת הפונקציה  $f(x)$  ובתחום ההגדרה שלה, וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. קבע את הסוג של נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ .

ד. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ .

בתשובתך השאר 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לציר ה- $x$ .

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה- $f(x)$ .

א. נתון כי לפונקציה  $f(x)$  יש נקודת קיצון. לפי, נמצא ונשווה את הנגזרת ל-0.  
קמירה ו"מצא שיעור  $x$  יחיד שלו הנגזרת אומאפסית ל תפיה נק' הקיצון. א ק:

$$f'(x) = \frac{-2x + a}{-x^2 + ax}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x + a}{-x^2 + ax} = 0$$

$$-2x + a = 0$$

$$\boxed{x = \frac{a}{2}}$$

אכן, שיעור ה- $x$  של נק' הקיצון של הפונקציה הוא  $\frac{a}{2}$ .

ב. נתון כי שיעור ה- $y$  של נק' הקיצון הוא:  $\ln\left(2\frac{1}{4}\right)$ . לפי:  $f\left(\frac{a}{2}\right) = \ln\left(2\frac{1}{4}\right)$

$$\ln\left[-\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a \cdot \frac{a}{2}\right] = \ln\left(2\frac{1}{4}\right)$$

$$\ln(0.25a^2) = \ln(2.25)$$

$$0.25a^2 = 2.25$$

$$a^2 = 9$$



$a_1 = 3$ ,  $a_2 = -3$   
 (פסל כי ניתן  
 אסו

א. מסדוף אף הרואונו כי האוסר  $x = \frac{a_1}{2}$  אפונקצוה תקופת קויוטו. מסדוף ק' אצאנו כ  $a=3$ , אפי, שיעוריה  $x$  של נק' קויוטו תואו  $x = \frac{3}{2} = 1.5$ . נאצאו אורס אף תקויוטו אפי סאלר עלוה - וכו צוה :

x	0	(1.2)	1.5	(2)	3
y'	///	+	0	-	///
y	///	↗		↘	///

הצקת סורכו קויוטו קמצרת:

$$f'(1.2) = \frac{-2 \cdot 1.2 + 3}{-(1.2)^2 + 3 \cdot 1.2} = \oplus \frac{5}{18}$$

$$f'(2) = \frac{-2 \cdot 2 + 3}{-(2)^2 + 3 \cdot 2} = \ominus \frac{1}{2}$$

נק' הקויוטו (2.25) חו, 1.5, תקפ תקופת אקסיומוס.

א. (1) אצוואת תקופת החותך של הפונקצוה אפ צוה  $x$  ;  $f(x) = 0$

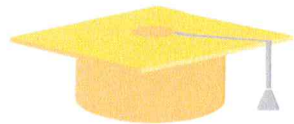
$$\ln(-x^2 + 3x) = 0$$

$$\log_e(-x^2 + 3x) = 0$$

$$e^0 = -x^2 + 3x$$

$$1 = -x^2 + 3x$$

$$-x^2 + 3x - 1 = 0$$





$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{-2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2.62 \\ x_2 = 0.38 \end{array} \right.$$

נקודות קיצון:  $(2.62, 0)$ ,  $(0.38, 0)$

(2) לקבוע פונקציה אטלם לפי האסימפטוטות האנכיות מתקבלות קצוות תחום ההזדמנות. לפי:

$$-x^2 + 3x > 0$$

$$-x^2 + 3x = 0$$

$$x(-x + 3) = 0$$

$$\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}$$

לפי כן, האסימפטוטות האנכיות הן:  $x=0, x=3$

(3) סקיצה של אזור הפונקציה  $f(x)$

