

1. בציור שלפניך מתואר מסלול לרכיבה באופניים בצורת משולש שווה צלעות ABC, שאורך צלעו a מטר.

ביום מסוים יצאו שני רוכבי אופניים באותו הזמן מן הנקודה A לכיוון הנקודה B. הם רכבו לאותו הכיוון לאורך המסלול המשולש.

כל אחד מהם רכב במהירות קבועה. המהירות של רוכב א גדולה ב-2 מטרים לשנייה מן המהירות של רוכב ב.

כאשר הגיע רוכב א אל הנקודה A לאחר שהשלים פעמיים את המסלול המשולש, הגיע רוכב ב אל הנקודה B בפעם השנייה.

א. מצא את המהירות של כל אחד מרוכבי האופניים.

ב. באיזו נקודה על המשולש יהיה רוכב ב, כאשר יגיע רוכב א אל הנקודה A אחרי שהשלים 5 פעמים את המסלול המשולש?

כאשר הגיע רוכב א אל הנקודה A אחרי שהשלים 5 פעמים את המסלול, הוא הסתובב והחל לרכוב לכיוון הנגדי – מן הנקודה A לכיוון הנקודה C – בלי לשנות את מהירותו.

רוכב ב המשיך לרכוב בכיוון הנסיעה המקורי, בלי לשנות את מהירותו. הרוכבים נפגשו בנקודה M.

ג. מצא על איזו צלע של המשולש נמצאת הנקודה M, ומצא באיזה יחס הנקודה M מחלקת את הצלע שמצאת.

למחרת שוב יצאו הרוכבים מן הנקודה A, רכבו לכיוון הנקודה B והמשיכו לרכוב במסלול המשולש, כל אחד מהם

רכב באותה המהירות שרכב ביום שלפני כן. רוכב א חלף על פני רוכב ב בפעם הראשונה 6 דקות אחרי שיצאו לדרך.

ד. מצא את היקף המשולש. נמק את תשובתך.

א. נגזרים:

מהירות א חכב א' : $x+2$ מטרים לשנייה
מהירות ב חכב ב' : x מטרים לשנייה

זמן	מסלול	מהירות	הערות
6a	$\frac{6a}{x+2}$	x+2	רוכב א' אחריו בפעם הראשונה
4a	$\frac{4a}{x}$	x	רוכב ב' בנקודה B בפעם השנייה

$\frac{זמן}{מסלול} = \frac{מהירות}{x}$



אכיוון והרוכבים לקחו יומיים הפסיקה הכתמים אלה שווים ולכן:

$$\frac{6a}{x+2} = \frac{4a}{x}$$

$$6ax = 4a(x+2) \quad | : a \neq 0$$

$$6x = 4x + 8$$

$$x = 4$$

מהירות	רוכב א'	6 מטרים לשנייה
מהירות	רוכב ב'	4 מטרים לשנייה

שימו לב!
ניתן היה למצוא את המהירות גם בקצרה הקאה: במין שרוכב א' עבר 6 צלעות חכב ב' עבר 4 צלעות ולכן מהירות א' חכב א' צלעות פי 1.5 מהירות חכב ב' ולכן מתקיים $1.5x = x + 2$
 $\frac{1}{2}x = 2$
 $x = 4$
במטון זה ניתן לסתור אם את המסקנה סעיפי השאלה.

צורך	מס	מהירות	
15a	$\frac{15a}{6}$	6	רוכב א' אחריו האמת 5 פסגים אית המטלף
	$\frac{15a}{6}$	4	רוכב ב' כאשר רוכב א' סיים אית המטלף 5 פסגים

מהירות א' = צורך

$$4 \cdot \frac{15a}{6} = 10a$$

וספיק אסוף

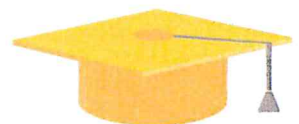
אם נסך ולכן כאשר רוכב A רוכב ב' זה יהיה בקוצרה B.

רוכב ב' אספיק לעקר אית המטלף 5 פסגים

ג. מכיוון ורוכב א' נמצא בקוצרה A, ורוכב ב' נמצא בקוצרה B והם יוצאים בכיוונים הנגדיים ופגשו בחיבור הצרכים שלהם צריך להיות $2a$.
לכן: $t - t$ המין שפגש ששניהם יוצאים בכיוונים הנגדיים.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



800 מתקווים:

$$6t + 4t = 2a$$

$$10t = 2a$$

$$t = \frac{1}{5}a$$

800

מכאן $\frac{1}{5}a$ מנות (מנצח) א' ומנצח BC ביחס 4:1

3. כאשר מנצח E ותלוי א' בני מנצח E קטנים היאטנה הפרש הצרכים ביניהם זהו תיקף הממשל וענן:

צ'יק	מנ	ההיות	מנצח התלוי צ'יק
2160	360	6	
1440	360	4	מנצח התלוי צ'יק

$$2160 - 1440 = \text{תיקף הממשל}$$

$$P_{ABC} = 720 \text{ ש"ח}$$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



2. נתונה סדרה a_n המקיימת לכל n את הכלל: $a_{n+1} + a_n = 6n + 5$.
- א. הוכח כי מתקיים $a_{n+2} = a_n + c$ (c הוא מספר קבוע), ומצא את c.
- ב. כתוב דוגמה לסדרה a_n המקיימת את הכלל, והיא אינה סדרה חשבונית (כתוב לפחות 4 איברים ראשונים בסדרה).
- ג. נתון כי הסדרה a_n כולה היא חשבונית. חשב את a_1 .
- ד. בנו סדרה חדשה בת $2n + 1$ איברים: $a_1 - 1, a_2 - 2, a_3 - 3, \dots, a_{2n+1} - (2n + 1)$. האיבר האמצעי בסדרה החדשה הוא 43. חשב את סכום הסדרה החדשה.

פתרון:

$$a_{n+1} + a_n = 6n + 5$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+1} = 6n + 5 - a_n$$

נניח $n > 1$ כנראה הנתון:

$$a_{n+2} + a_{n+1} = 6(n+1) + 5$$

$$a_{n+2} + a_{n+1} = 6n + 11$$

$$: a_{n+1} \quad \leftarrow \quad -8$$

$$a_{n+2} + 6n + 5 - a_n = 6n + 11$$

$$\boxed{a_{n+2} = a_n + 6}$$

$$c = 6$$

כלומר:



ב. נראה $a_1 = 1$, ונחשב a_2 :

$$a_2 = 6 \cdot 1 + 5 - a_1 = 11 - 1 = 10$$

$$a_3 = 7$$

$$a_4 = 17$$

דיבאנו את המספרים: $1, 10, 7, 17, \dots$

זה סדרה איננה חשבונית.

ד. נביטוי סעיף א' ההפרש בין אלה $\frac{c}{2} = 3$

נניח $h = 4$ כאלו הנתון ונבא:

$$a_2 = 6 \cdot 1 + 5 - a_1 = 11 - a_1$$

ונדריש הפה $d = 3$:

$$a_2 - a_1 = 3$$

$$11 - a_1 - a_1 = 3$$

$$2a_1 = 8$$

$$\boxed{a_1 = 4}$$



3. הסדרה a_n (חזרה ארבעה, האיבר הראשון הוא

$$a_{n+1}, \text{ כאשר } n \text{ זוגי, } a_{n+1} = 43$$

לפי הבניה של הסדרה החזרה: $a_{n+1} = a_n - (n+1)$

$$a_{n+1} = 4 + 3n - n - 1 = 2n + 3$$

$$2n + 3 = 43$$

$$n = 20$$

בסדרה החזרה יש 20 איברים.
השם של הסופר.

ציון הירוקים - נונה שהסדרה החזרה היא סדרה חשבונית:

$$a_{n+1} - a_n = [a_{n+1} - (n+1)] - [a_n - n]$$

$$= a_{n+1} - a_n - 1 = d - 1 = 2$$

הסדרה החזרה חשבונית עם הפרש $d=2$.

$$a_1 = a_1 - 1 = 4 - 1 = 3$$

זכור:

$$S_{20} = \frac{20}{2} [2 \cdot 3 + 40 \cdot 2] = \boxed{1763}$$



377 שניה - מיסור ספולאים:

$$\begin{aligned}
 S_{41} &= a_{1-1} + a_{2-2} + \dots + a_{41-41} \\
 &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{41}) - (1 + 2 + \dots + 41) \\
 &= \frac{41}{2} [2 \cdot 4 + 40 \cdot 3] - \frac{41}{2} [1 + 41] = \\
 &= 2,624 - 861 = \boxed{1,763}
 \end{aligned}$$



3. בקופסה יש 12 כדורים כחולים, 20 כדורים אדומים ו-8 כדורים צהובים.
 על 28 מן הכדורים רשומה הספרה 1, ועל השאר רשומה הספרה 0.
 $\frac{1}{4}$ מן הכדורים שרשומה עליהם הספרה 1 הם צהובים.
 מספר הכדורים האדומים שרשומה עליהם הספרה 1 גדול פי 4 ממספר הכדורים הכחולים שרשומה עליהם הספרה 0.
- דני מוציא באקראי כדור מן הקופסה.
- א. מהי ההסתברות שהכדור שהוציא דני הוא כדור כחול ושרשומה עליו הספרה 1?
- ב. אם ידוע שדני הוציא באקראי כדור כחול אז כדור שרשומה עליו הספרה 1, מהי ההסתברות שהוא הוציא כדור שרשומה עליו הספרה 0?
- דני החזיר את הכדור לקופסה, וכעת הוא משחק במשחק: הוא מוציא באקראי כדור מן הקופסה, רושם לעצמו את הספרה שעליו ומחזיר את הכדור לקופסה.
- בכל פעם שהוא מוציא כדור שרשומה עליו הספרה 1 הוא צובר נקודה.
- הוא יפסיק לשחק כאשר הוא יצבור 5 נקודות.
- ג. מהי ההסתברות שדני יצבור 5 נקודות אחרי 6 פעמים בדיוק?

א נצטרך:

$x = \text{מספר הכדורים הכחולים שרשומה עליהם הספרה 0}$

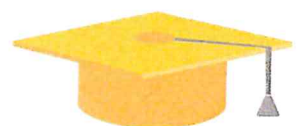
ואכן $4x = \text{מספר הכדורים האדומים שרשומה עליהם הספרה 1}$

הספרה 1.

מכיוון שיש 12 כדורים כחולים. נסיק למה שכל הכחולים שרשומה עליהם הספרה 1 היא $12 - x$.

מכיוון ש $\frac{1}{4}$ מן הכדורים שרשומה עליהם הספרה 1 הם צהובים נובע שיש 7 כדורים צהובים שרשומה עליהם הספרה 1.

כך נסכים את כל הכדורים שרשומה עליהם הספרה 1



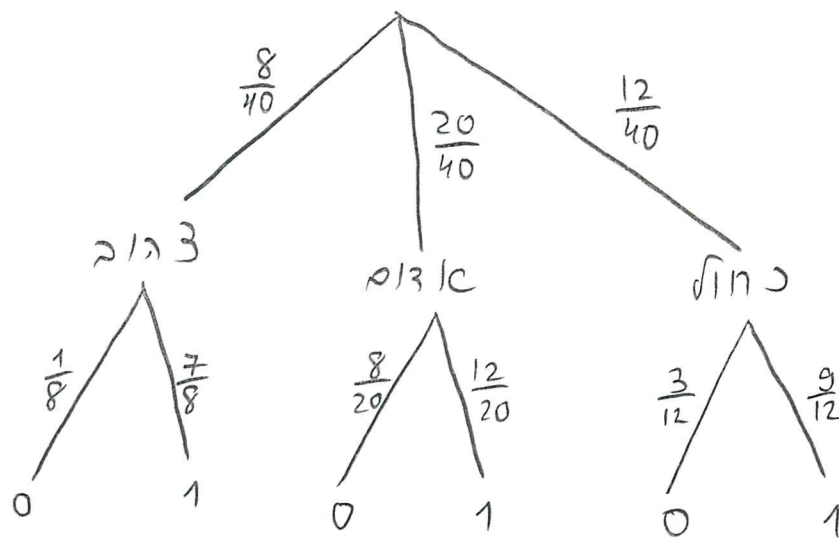
$$12 - x + 4x + 7 = 28$$

אפשרות 28:

$$3x = 9$$

$$\boxed{x = 3}$$

כעג טען עכניו זיאזרמא עס האטארה
שליטה כזור בוזר מהקובסאל:



א ע"כ העץ הנ"ל ההסתברות שבני הוזיא כחול שמופע

$$\frac{12}{40} \cdot \frac{9}{12} = \boxed{\frac{9}{40}}$$

ב עבור הנטן ש"בני הוזיא באקראי כזור כחול אלו
כזור שמופע אלו הסברה 1, נסיק שבמסלולים העץ

ש"כלים אהבות הם:

I כזור כחול שמופע אלו הסברה 1

II כזור כחול שמופע אלו הסברה 0



III כדור אדום שמוציא עיני הסברה 1

IV כדור לבן שמוציא עיני הסברה 1

מגוון מסתווים אליו המסלול שגורם עיני מחבר השאלה
(הוא המסלול כדור כחול שמוציא עיני הסברה 0).

ואכן ההסתברות היא:

$$P\left(\frac{\text{הסברה 0}}{\text{כחול}}\right) = \frac{\frac{12}{40} \cdot \frac{3}{12}}{\frac{12}{40} \cdot \frac{9}{12} + \frac{12}{40} \cdot \frac{3}{12} + \frac{20}{40} \cdot \frac{12}{20} + \frac{8}{40} \cdot \frac{7}{8}} = \frac{3}{31}$$

ג. בשפה בוצרה ההסתברות שלפני כדור שמוציא עיני

הסברה 1 היא $\frac{28}{40} = 0.7$

ד. מנת שני יצבור 5 נקודות אחרי 6 ניסיונות

בדיוק עיני לעמוד בשני הנאים בו מנייה:

מנייה I - 5 השאלות הראשונות עיני לצבור בדיוק

4 נקודות.

מנייה II - בניסיון שניה שיש עיני לצבור נקודה.

מותר ואין גורם בין השאלות השנייה אפשר עכ"ל

באותו כפל בין ההסתברויות הנאים הנ"ל.



הסתברות גנאי I -

$$p_5(4) = \binom{5}{4} \cdot 0.7^4 \cdot 0.3^1$$

$$p\left(\binom{5}{1}\right) = 0.7$$

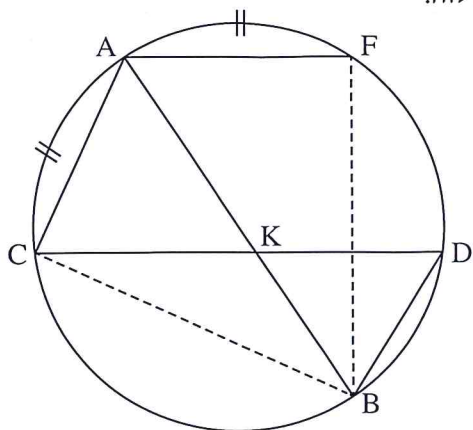
הסתברות גנאי II -

חסר הבהססברות שצני יצבור 5 נקודות
 ? 6 שאלות כציוק היא :

$$\binom{5}{4} \cdot 0.7^4 \cdot 0.3^1 \cdot 0.7 = \boxed{0.252105}$$



4. AB הוא קוטר במעגל. CD ו-AF הם שני מיתרים במעגל המקבילים זה לזה.



AB ו-CD נחתכים בנקודה K (ראה ציור).

נתון כי $\widehat{CA} = \widehat{AF}$ (הקשתות המסומנות בציור).

א. (1) הוכח כי $\sphericalangle FAB = \sphericalangle CAB$.

(2) הוכח כי $BK = BD$.

ב. הוכח כי המרובע AFKC הוא מעוין.

ג. נתון גם כי $BD \cdot AB = CD \cdot AC$.

(1) הוכח כי $\triangle BDC \sim \triangle CAB$.

(2) הוכח כי CD הוא קוטר במעגל.

נימוק	טענה	סדר כתיבה
נתון	AB קוטר	1
נתון	AF CD	2
נתון	$\widehat{CA} = \widehat{AF}$	3

(4) $\sphericalangle AFB = \sphericalangle ACB = 90^\circ$

(5) $\sphericalangle ABF = \sphericalangle ABC$



(6) $\sphericalangle FAB = \sphericalangle CAB$

נ.ש.ל. כ" (1)

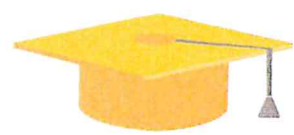
(7) $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC$

(8) $\sphericalangle CKA = \sphericalangle BAF$

זווית היקפית הנשענת
על קוטר היא ישרה
מחזקת זווית היקפית של
מיתר זהה זווית היקפית של
המיתר הנשען באותו מעגל.
ABF ו-ABC זווית היקפית
הנשענת על אותו קוטר
זווית היקפית הנשענת על
אותו קוטר שווה. זווית 15
זווית היקפית הנשענת על
אותו קוטר שווה. זווית 15.
זווית היקפית הנשענת על
אותו קוטר שווה. זווית 15.
זווית היקפית הנשענת על
אותו קוטר שווה. זווית 15.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



נילוד

שאלה דפדופייה שאלה
15 א 15

כאן התקרה. אפי 6, 7, 8, 9

מת שאלה שאלה במשולש
מינהם נקמה שאלה

כאן התקרה. אפי 6, 8

מת שאלה שאלה במשולש
מינהם נקמה שאלה

אם זהו שאלה שאלה במשולש
נשארים מתחילים שאלה. אפי 1

כאן התקרה. אפי 13, 14

אפי 2

היובן מה שאלה שאלה נקמה
שאלה שאלה שאלה שאלה שאלה
שאלה שאלה שאלה שאלה שאלה
שאלה שאלה שאלה שאלה שאלה

אפי 14, 17

טענה

$\angle DKB = \angle CKA$ (9)

$\angle BKD = \angle BDK$ (10)

\Downarrow
 $KB = KD$ (11)

משולש (2)

$\angle CAK = \angle CKA$ (12)

\Downarrow
 $AC = KC$ (13)

$AF = AC$ (14)

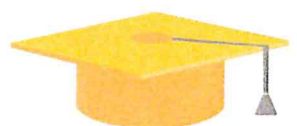
$AF = KC$ (15)

$AF \parallel KC$ (16)

\Downarrow
 $AFKC$ מקבילים (17)

$AFKC$ מעין (18)

משולש ב'



ניל"ד
ני"ו

לפי 19

משפט צ'ינג'ן 3.5.3
לפי 7, 20

5/11 מתחילת המסלול
בולטים שאלה 15, 16. לפי 21

לפי 4, 22

מיתרי ששטחם 5/11 - ישרה
הוא דיאלר

גז'ס

$BD \cdot AB = CD \cdot AC$ (19)

$\frac{BD}{AC} = \frac{DC}{AB}$ (20)

$\triangle BDC \sim \triangle CAB$ (21)

נ.ש.ל' ג' (1)

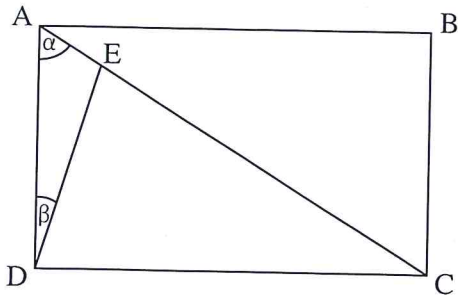
$\angle ACB = \angle DCB$ (22)

$\angle DCB = 90^\circ$ (23)

CD דיאלר (24)

נ.ש.ל' ג' (2)





5. נתון מלבן ABCD. הנקודה E נמצאת על האלכסון AC (ראה ציור).

נתון כי $\angle DAC = \alpha$,

$\angle ADE = \beta$.

R_1 הוא רדיוס המעגל החוסם את המלבן ABCD.

R_2 הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.

א. הבע את היחס $\frac{R_1}{R_2}$ באמצעות α ו- β .

ב. הראה כי כאשר $\alpha = \beta$ מתקיים $\frac{R_1}{R_2} < 2$.

ג. נתון כי $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 15^\circ$.

(1) הראה כי $\triangle DEC$ הוא משולש שווה שוקיים.

(2) הבע את BE^2 באמצעות R_1 .

כ $\triangle ADC$ חוסם באותו מעגל בו חוסם המלבן ABCD
אכן הרדיוס של המעגל החוסם את $\triangle ADC$ הוא R_1

מתייחס לנוי? $\triangle ADC$ יחיד? $\angle ACD = 90 - \alpha$

ע"כ נשכח הסעיפים

$$\frac{AD}{\sin(90-\alpha)} = 2R_1$$

ע"כ כנול $\sin(90-\alpha) = \cos \alpha$ אכן

$$I \left[\frac{AD}{\cos \alpha} = 2R_1 \right]$$

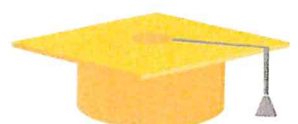
$\triangle AED$ חוסם במעגל הרדיוס הוא R_2 . מתייחס לנוי?

אכן? $\angle AED = 180 - (\alpha + \beta)$

$$\frac{AD}{\sin(180 - (\alpha + \beta))} = 2R_2$$

ע"כ כנול $\sin(180 - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$ אכן

$$II \left[\frac{AD}{\sin(\alpha + \beta)} = 2R_2 \right]$$



מתחלקת הביניים I ! II : (אולי ?)

$$\frac{2R_1}{2R_2} = \frac{\frac{AD}{\cos \alpha}}{\frac{AD}{\sin(\alpha+\beta)}} \rightarrow \boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos \alpha}}$$

כי $\beta = \alpha$, ונסתכן $\frac{R_1}{R_2}$

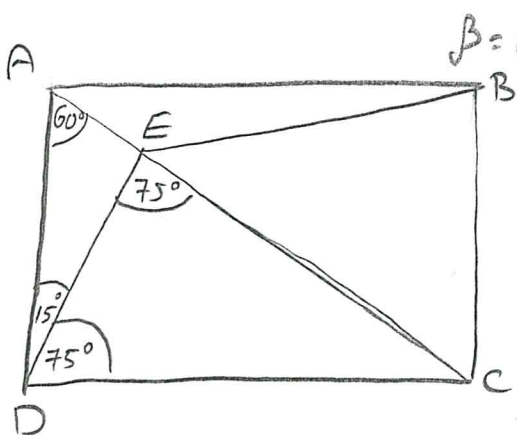
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha} = 2 \sin \alpha$$

α הינה שווה חצי מהזווית α בשורה ישרה

שווה חצי $\sin \alpha < 1$

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = 2 \sin \alpha < 2}$$

חצי נעטן עתה סייק ?



$\alpha = 60^\circ$! $\beta = 15^\circ$ (1) נציב בסרטוט

ונספר שווה .

$\angle ADE = 15^\circ$ חצי $\angle ADC = 75^\circ$.

$\triangle AED$ חצי $\triangle CED$

חצי שווה מסתובב שם הפנימי

שאינו צמודים לה. $\angle CED = 75^\circ$

נוקט ע $\triangle CED$ שווה שוקיים למחר ! $\angle EDC = \angle DEC$



ג (2) בסעיף א' עליה ע' $\frac{AD}{\cos \alpha} = 2R_1$

אם כן $AD = R_1 \leftarrow AD = 2 \cos(60) R_1$

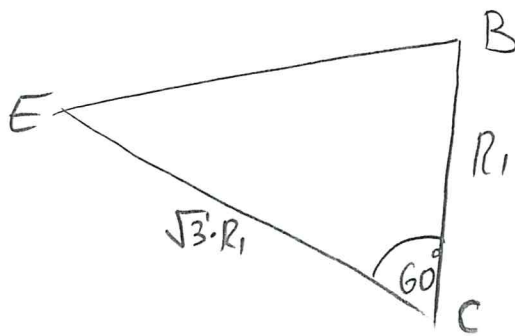
נאמר! ABCD מרובע $BC = R_1$ אם כן.

ברק נוסבר נתקב אה AD : ΔADC הוא ישר מלי

אכן היתר שלו הוא הקוטר של המעגל החוסם אותו $AC = 2R_1$ גמור וביטוי?

ΔADC הן $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ נובע ע AD שמוח מוח 30° הוא חצי מהיתר. כעג נתקב אה DC ? ΔADC ונסבור עליה סגיא קוצב $EC = DC$.

$\frac{DC}{\sin \alpha} = 2R_1 \rightarrow DC = 2 \sin 60 R_1 = \boxed{\sqrt{3} R_1 = EC}$

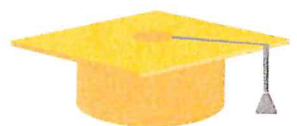


כעג, ΔBEC נראה כק: נעזר בשפט הקוסנוסים כדי לתקב אה BE^2

$BE^2 = CB^2 + CE^2 - 2 \cdot CB \cdot CE \cos(60)$

$BE^2 = R_1^2 + (\sqrt{3}R_1)^2 - 2 \cdot \sqrt{3}R_1 \cdot R_1 \cdot \frac{1}{2} = 4R_1^2 - \sqrt{3}R_1^2$

$\boxed{BE^2 = R_1^2(4 - \sqrt{3})}$





6. נתונה הפונקציה $f(x) = a \cdot \cos 2x + \sin^2 x$ המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$. a הוא פרמטר.
- א. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית א אי-זוגית ב אף לא אחת מהן? נמק.
- ב. מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (הבע באמצעות a אם צריך), אם נתון כי הפונקציה אינה קבועה? קבע את סוגן בהתאם לערך של a (התייחס לשתי האפשרויות עבור a).
- ג. מצא את הערך של a שעבורו הפונקציה $f(x)$ היא קבועה. נמק.
- נתון: $a > 1$.
- ד. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- (2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
- ה. נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה- x שווה ל-12. מצא את a .



$$f(x) = a \cos 2x + \sin^2 x \quad (6)$$

$$-\pi \leq x \leq \pi$$

$$f(-x) = a \cos(-2x) + (\sin(-x))^2 \quad (7)$$

$$f(-x) = a \cos 2x + (-\sin x)^2$$

$$f(-x) = a \cos 2x + \sin^2 x = f(x)$$

⇔

$f(x) \text{ היא פונקציה זוגית}$

נק' קיצון

(8)

$$f'(x) = -2a \sin 2x + 2 \sin x \cos x = 0$$

$$-2a \sin 2x + \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x (-2a + 1) = 0$$



$$\sin 2x = 0$$

$$2x = \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2} k \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$x = -\pi, \quad x = -\frac{\pi}{2}, \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \pi$$

$$f(\pi) = a \cos 2\pi + \sin^2 \pi = a = f(-\pi)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a \cos \pi + \sin^2 \frac{\pi}{2} = -a + 1 = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(0) = a \cos(2 \cdot 0) + \sin^2 0 = a$$

כ'ב' אגז'וק א'ת א'ו א'ק'צ'ו'ן, אגז'וק
 א'ט א'ק'ט' .

$$-2a + 1 > 0 \quad \underline{I}$$

$$s.t. \quad a < \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = (-2a + 1) 2 \cos 2x$$



$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (-2a+1) \cdot 2 \cos\left(-2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) < 0$$

$$f''(0) = (-2a+1) \cdot 2 \cos(2 \cdot 0) > 0$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-2a+1) \cdot 2 \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) < 0$$

⇓

$$\left(-\frac{\pi}{2}, 1-a\right) \max, \left(\frac{\pi}{2}, 1-a\right) \max$$

$$(0, a) \min, (-\pi, a) \min_{\text{קצב}}, (\pi, a) \min_{\text{קצב}}$$

$$-2a+1 < 0 \quad \text{או} \quad \underline{\text{II}}$$

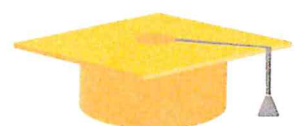
$$\text{כל} \quad , \quad a > \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = (-2a+1) \cdot 2 \cos 2x$$

⇓

הסימנים של $f''(x)$ גמק קיצון כנהיות
 נמצים אסימטות גמקכה I (כאשר $a < \frac{1}{2}$)

⇓



$$\left(-\frac{\pi}{2}, 1-a\right) \text{ min}, \quad \left(\frac{\pi}{2}, 1-a\right) \text{ min},$$

$$(0, a) \text{ max}, \quad (-\pi, a) \text{ max קצב}, \quad (\pi, a) \text{ max קצב}$$

$$f(x) = a \cos 2x + \sin^2 x = \quad \textcircled{d}$$

$$= a(1 - 2\sin^2 x) + \sin^2 x =$$

$$= a - 2a\sin^2 x + \sin^2 x =$$

$$= a - \sin^2 x(-2a + 1)$$

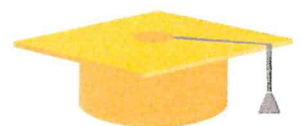
$$-2a + 1 = 0 \quad \text{כאשר}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = a \quad \text{כפי' } f(x) \text{ קבוע}$$

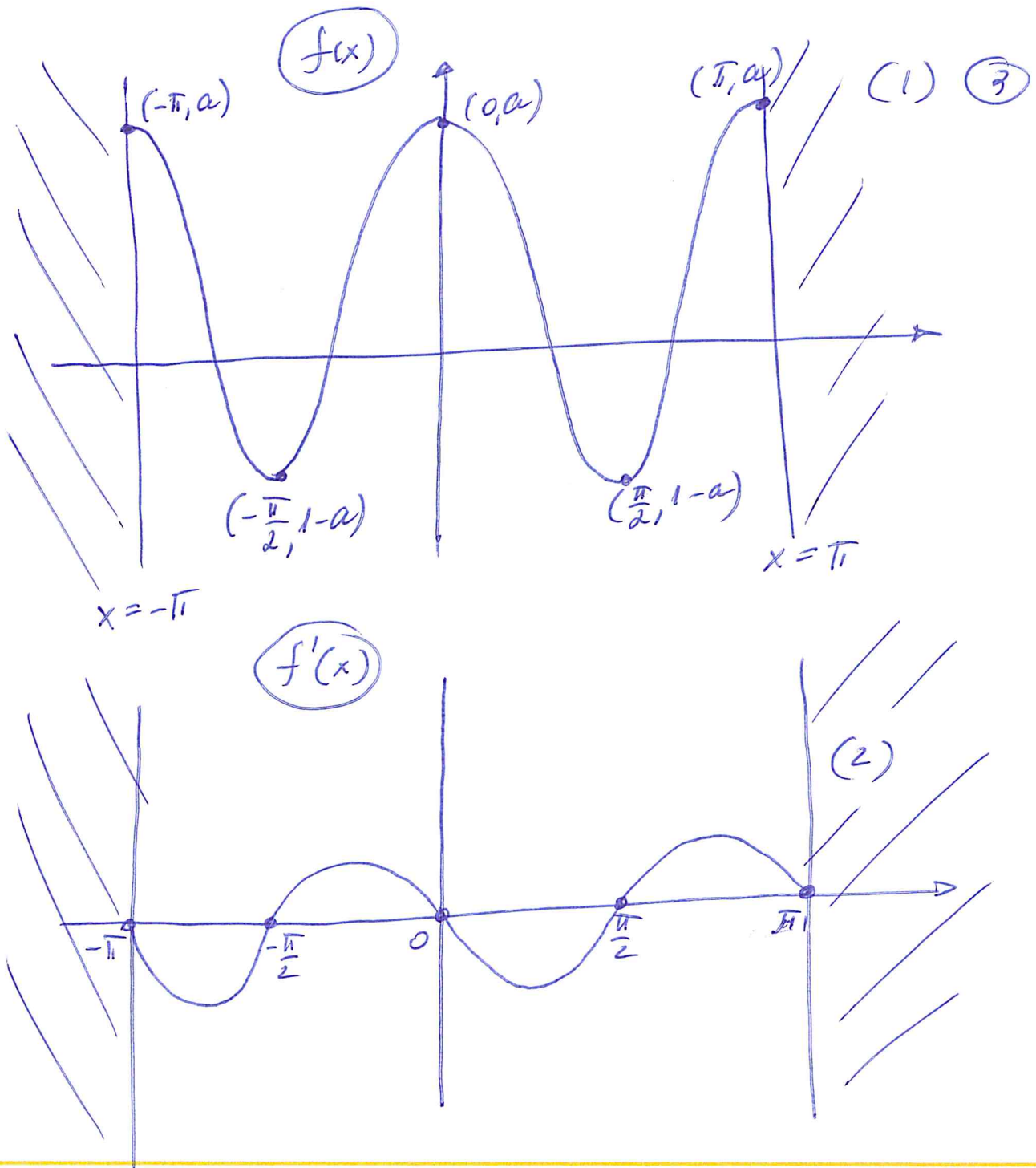


$$\boxed{a = \frac{1}{2}}$$



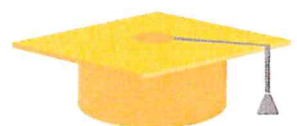
נתון $a > 1$
 \Downarrow

תמונה $a > \frac{1}{2}$ וסוף \geq (מקרה II)



למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
 אל תתפשר עליה.



(ה)

$$f'(-x) = \sin(-2x) \cdot (-2a+1) = -\sin 2x(-2a+1)$$

$$f'(-x) = -f'(x)$$

 \Downarrow

$f'(x)$ א'יזוטרה ולכן אכזר

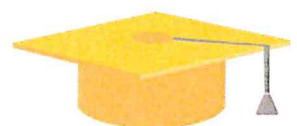
על $f'(x)$ סימטריה יחסית ל $(0,0)$.

ולכן הסתם בין הסכמים $f'(x)$ ל x כה x
 בין הסקולות הסטאטיסטיים, הם שווים.

אם סתם בין $f'(x)$ ל x שווה ל 12 ,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -f'(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f'(x) dx = 6 \quad \text{sk}$$

$$\underbrace{-f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + f(x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}}_{\Downarrow} = 6$$

 \Downarrow




$$-f\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-f(0)) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6$$

$$-(1-a) + a + a - (1-a) = 6$$

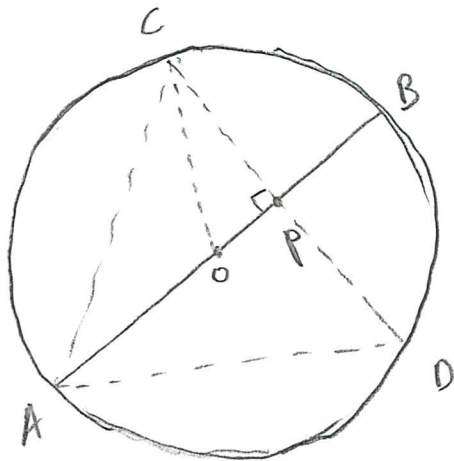
$$-1 + a + a + a - 1 + a = 6$$

$$4a = 8$$

$$a = 2$$



7. נתון מעגל ובו קוטר AB. רדיוס המעגל הוא 10. הנקודה P נמצאת על הקוטר AB בין מרכז המעגל ובין הנקודה B. דרך הנקודה P מעבירים אנך ל-AB החותך את המעגל בנקודות C ו-D. מצא את השטח המקסימלי של המשולש ACD.



נשאל ציור אפסי בהתאם לתנאים:
 * נסמן $OP = x$ מהכז המעגל
 * הנ"ל עזר אם רדיוס המעגל $(CO = 10)$
 * $CP = PD$ קטע הוולס/ממרכז המעגל
 ואלוהן (היתר) (CO) , חוצה אלוה

* (נסמן) $OP = x$
 חיבור קטעים $AO + OP = AP = 10 + x$
 רדיוס
 * $CP^2 + OP^2 = CO^2$ לפי משפט פיתגורס
 $CP^2 + x^2 = 100$
 $CP = \sqrt{100 - x^2}$

נבנה את שטח המשולש כפונקציה של x:

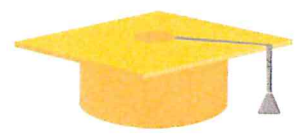
$$f(x) = \frac{CD \cdot AP}{2}$$

* $CD = 2CP$

$$f(x) = \frac{2\sqrt{100 - x^2} (10 + x)}{2}$$

$$f(x) = \sqrt{100 - x^2} (10 + x)$$

לפי התנאים המקומיים $0 < x < 10$ (P בין O ל-B), תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא $0 < x < 10$ ולכן תחום ההגדרה של פונקציית הקיבול $(0 < x < 10)$



$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}} (10+x) + \sqrt{100-x^2} \cdot 1$$

$$f'(x) = \frac{-2x(10+x)}{2\sqrt{100-x^2}} + \sqrt{100-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-10x - x^2 + 100 - x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 10x + 100}{\sqrt{100-x^2}}$$

נשווה את הנגזרת ל-0 כדי למצוא נקודות קיצון.

$$-2x^2 - 10x + 100 = 0$$

$$x = -10, \quad x = 5$$

$$0 < x < 10$$

נקודות קיצון פנימי (בין הנקודות A ו-B) נמצאות בתחום הפתוח.

נבדוק את הנקודה הקיצונית (מסומנת) ונמצא שהיא נקודה קיצונית מקסימום.

ע"פ טבלת סימנים:

$$f''(x) = -4x - 10$$

$$f''(5) = -30$$

$$f''(5) < 0$$

לכן $x=5$ היא נקודה קיצונית מקסימום.



נתון: $f(s) = \dots$

$$f(s) = \sqrt{100 - s^2} (10 + s)$$

$$f(s) = S_{ACD} = 15\sqrt{75} = 75\sqrt{3}$$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



8. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + bx - c}{x^2 - 4}$. הם פרמטרים.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ב. מצא את b .

נתון: לגרף הפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x בין שתי האסימפטוטות האנכיות שלה.

ג. מצא את תחום הערכים של c .

ד. (1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה (הבע באמצעות c אם צריך).

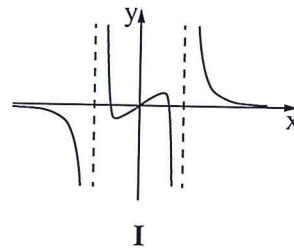
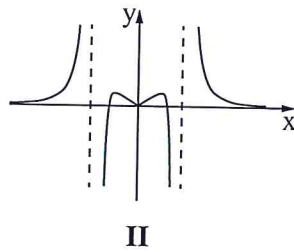
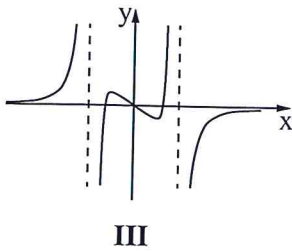
(2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$, וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרות הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$.

לפניך גרפים III-I.

(1) איזה מן הגרפים, III-I, הוא גרף הפונקציה $g(x)$? נמק.

(2) הבע באמצעות c את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .



$$f(x) = \frac{x^2 + bx - c}{x^2 - 4}$$

8

תחום ההגדרה

9

$$x^2 - 4 \neq 0$$

$$x^2 \neq 4$$

$$x \neq \pm 2$$

לכל $f(x)$

מתקיים

10

\Downarrow

$$f(-x) = f(x)$$

$$\frac{(-x)^2 + b(-x) - c}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2 + bx - c}{x^2 - 4}$$

$$\frac{x^2 - bx - c}{x^2 - 4} = \frac{x^2 + bx - c}{x^2 - 4} \cdot (x^2 - 4)$$

$$x^2 - bx - c = x^2 + bx - c$$

$$-bx - c = bx - c \Rightarrow -2bx = 0$$

ההגדרה

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אנל תתפשר עליה.



$$x=1 \text{ נ'ה, } x \neq \pm 2 \quad \text{נ'ג} > 3$$

$$2b=0$$

$$\boxed{b=0}$$

Ⓔ נסיון: יש שם נק' מיסוך אם צ'כ ה' x
 כ'אם $-2 < x < 2$

$$\frac{x^2 - c}{x^2 - 4} = 0 \quad | \cdot (x^2 - 4)$$

$$x^2 - c = 0$$

$$x^2 = c$$

$$x = \sqrt{c} \quad \Downarrow, \quad x = -\sqrt{c}$$

$$0 < \sqrt{c} < 2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{0 < c < 4}$$



(3) (1) נק' קיצון

$$f(x) = \frac{x^2 - C}{x^2 - 4}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 - C)}{(x^2 - 4)^2} = 0 \quad / \cdot (x^2 - 4)^2$$

$$2x(x^2 - 4 - x^2 + C) = 0$$

$$2x(C - 4) = 0 \quad / : 2$$

$$C - 4 < 0$$

$$x = 0$$

ואכן נמון לבלק $C - 4 > 0$

$$f(0) = \frac{C}{4}$$

נבדוק $f''(x) = 2(C - 4) < 0$

כ"ה אכנה

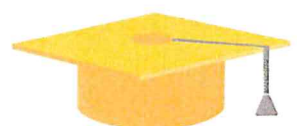
ח'וק'

בתחום

ההגדרה

⇓

$$\left(0, \frac{C}{4}\right) \max$$

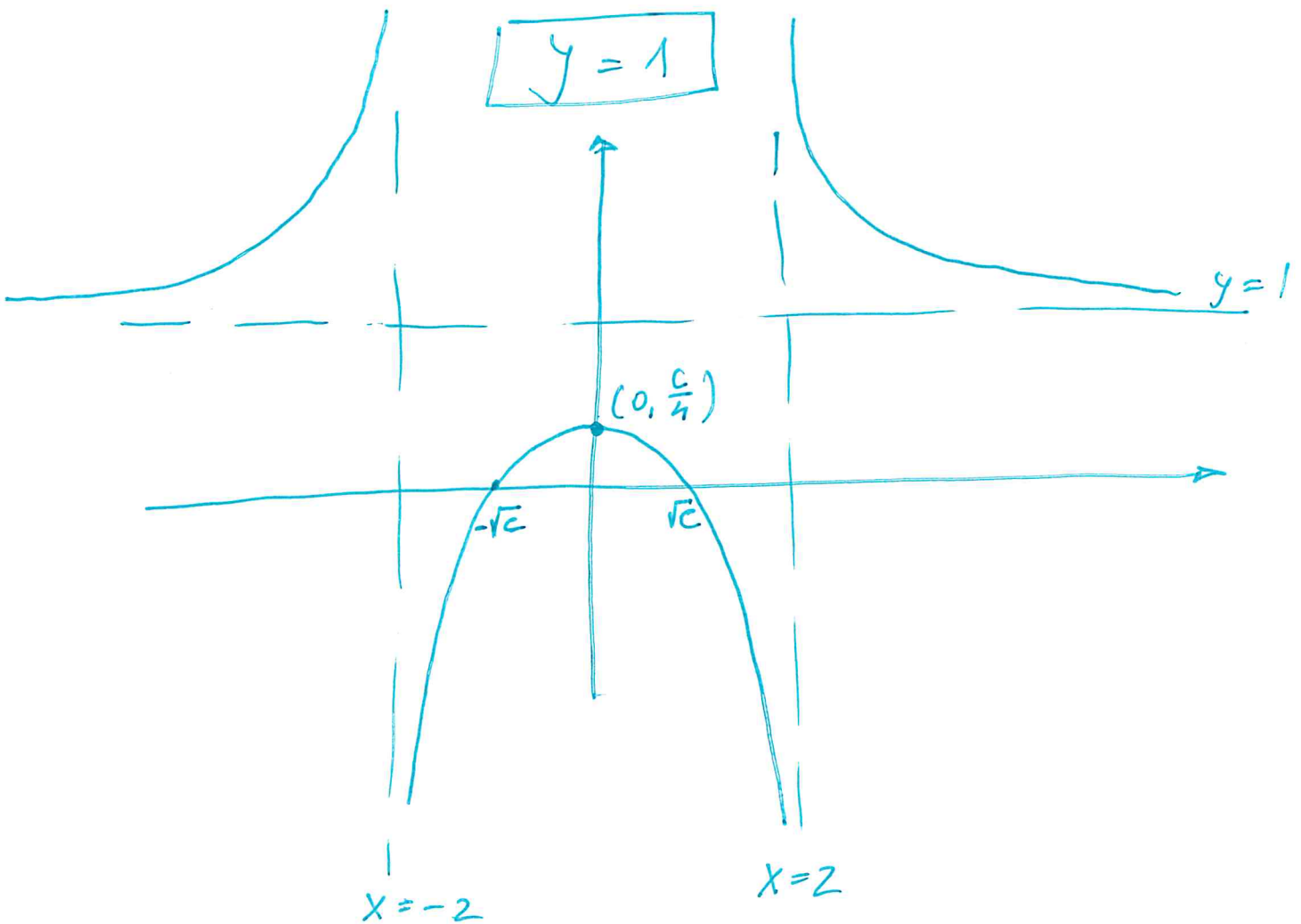


7 (2) אס' אופק'ית

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - c}{x^2 - 4} = 1$$



$$y = 1$$



$$f'(3) = 2 \cdot 3 \cdot (c - 4) < 0 \Rightarrow x > 2 \text{ : } f(x) \text{ יורדת}$$

$$f'(-3) = 2 \cdot (-3) \cdot (c - 4) > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ : } f(x) \text{ עולה}$$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



$$g(x) = f(x) \cdot f'(x) \quad (2)$$

$$g(x) = 0$$

(1)

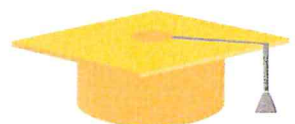
$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0$$

$$x = -\sqrt{c} \quad x = \sqrt{c} \quad x = 0$$

	$x < -2$	$-2 < x < -\sqrt{c}$	$-\sqrt{c} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{c}$	$\sqrt{c} < x < 2$	$x > 2$
$f(x)$	+	-	+	+	-	+
$f'(x)$	+	+	+	-	-	-
$g(x)$	+	-	+	-	+	-



III : $g(x) \leq 0$ לכל x



(2) (ה)

$$S_1 = \int_{-\sqrt{c}}^0 f(x) \cdot f'(x) dx$$

הצבה

$$u = f(x)$$

$$du = f'(x) dx$$

$$dx = \frac{du}{f'(x)}$$

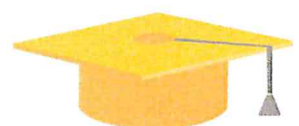
$$S_1 = \int u \cdot f'(x) \cdot \frac{du}{f'(x)} = \int u du = \frac{u^2}{2}$$

$$S_1 = \frac{f^2(x)}{2} \Big|_{-\sqrt{c}}^0 = \frac{f^2(0)}{2} - \frac{f^2(-\sqrt{c})}{2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{c}{4}\right)^2}{2} = \frac{c^2}{32}$$

למידע על פסיכומטרי
 ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



$$S_2 = \int_0^{\sqrt{c}} -f(x) \cdot f'(x) dx = - \left. \frac{f^2(x)}{2} \right|_0^{\sqrt{c}} =$$

$$= - \frac{f^2(\sqrt{c})}{2} - \left(- \frac{f^2(0)}{2} \right) = \frac{c^2}{32}$$

$$S = S_1 + S_2 = 2 \cdot \frac{c^2}{32} = \boxed{\frac{c^2}{16}}$$

