

## פתרון הבחינה

# במתמטיקה

קיץ תשע"ט, 2019, שאלון: 35581  
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



1. במאפייה יש שתי מכונות לייצור עוגות: מכונה I ומכונה II.  
 כל אחת מן המכונות מייצרת עוגות בקצב קבוע משלה.  
 ביום ראשון זמן העבודה של שתי המכונות היה שווה.  
 ביום ראשון מכונה I ייצרה 80 עוגות יותר ממספר העוגות שייצרה מכונה II.  
 ביום שני ייצרה מכונה II את אותו מספר עוגות שייצרה מכונה I ביום ראשון, ומכונה I ייצרה את אותו מספר עוגות שייצרה מכונה II ביום ראשון.  
 ביום שני היה זמן העבודה של מכונה II ארוך פי  $\frac{25}{9}$  מזמן העבודה של מכונה I באותו יום.  
 א. חשב כמה עוגות סך הכול ייצרו שתי המכונות ביום ראשון.

- נסמן:  $T_1$  – הזמן הדרוש למכונה I לייצר עוגה אחת,  
 $T_2$  – הזמן הדרוש למכונה II לייצר עוגה אחת.  
 ב. חשב את היחס  $\frac{T_1}{T_2}$ . נמק.  
 ג. (1) בפרק זמן מסוים מכונה I ייצרה בדיוק 47 עוגות.  
 כמה עוגות שלמות ייצרה מכונה II בפרק הזמן הזה? הסבר.  
 (2) ידוע ששתי המכונות עבדו אותו פרק זמן, וכל אחת מהן ייצרה מספר שלם של עוגות.  
 האם ייתכן שבפרק הזמן הזה שתי המכונות יחד ייצרו 26 עוגות? נמק.

א. נגזיר:

מכונה I מהירות א עוגות בשעה  
 מכונה II מהירות י עוגות בשעה  
 זמן העבודה ביום הראשון:  $t$  שעות.

מכונה	המספר	זמן	אורך
מכונה I יום ראשון	x	t	x t
מכונה II יום ראשון	y	t	y t
מכונה I יום שני	x	$\frac{y t}{x}$	y t
מכונה II יום שני	y	$\frac{x t}{y}$	x t



הזמן שאני 1

I:  $xz = yz + 80$       לפי הנתון:

II:  $\frac{xz}{y} = \frac{25}{9} \cdot \frac{yz}{x}$       |  $\cdot 9xy$

II:  $9x^2z = 25y^2z$       |  $z \neq 0$

$9x^2 = 25y^2$       |  $\sqrt{\quad}$

$3x = 5y$       |  $x, y > 0$

$x = \frac{5}{3}y$

II  $\rightarrow$  I:  $\frac{5}{3}yz = yz + 80$

$\frac{2}{3}yz = 80$

$yz = 120$

$\uparrow$

$xz = 200$

$xz + yz = 320$

סה"כ זמן ביום האמון:

$T_1 = \frac{1}{x}$

2. לפי הנתון:

$T_2 = \frac{1}{y}$

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}} = \frac{y}{x} = \frac{y}{\frac{5}{3}y} = \frac{3}{5}$



הוצק שאלה 4

$$\frac{47}{x}$$

זכור) הזמן הצרוש למכנה I לייצג 47 אולגה קולו  
ההספק של מכונה II בזמן זה קולו :  $y \cdot \frac{47}{x}$

נציב:  $x = \frac{5}{3}y$

$$y \cdot \frac{47}{\frac{5}{3}y} = 28.2$$

למכנה II ייצג 28 אולגה שלמות.

ז (2) זה שתי המכונות ייצגו 26 אולגה 3 חזק אסתקוים:

$$x \cdot z + y \cdot z = 26$$

נציב:  $x = \frac{5}{3}y$

$$\frac{5}{3}y \cdot z + y \cdot z = 26$$

$$\frac{8}{3}y \cdot z = 26$$

$$y \cdot z = 9.75$$

מספר האולגה שמכונה II צריכה לייצג קולו 9.75  
ומכיוון שמספר האולגה של שתי המכונות ייצגו 26 אולגה שלם 15

15 אולגה ייצגו 26 אולגה של שתי המכונות ייצגו 26 אולגה.



2.  $a_n$  היא סדרה הנדסית אי-סופית שהמנה שלה היא  $q$ .  $|q| \neq 1$ .

נתון:  $a_3 \cdot a_7 = 1$ .

א. חשב את  $a_5$  (מצא את שתי האפשרויות).

נתון:  $a_5 > 0$ .

ב. (1) הבע את  $a_1$  באמצעות  $q$ .

(2) האם קיים  $n$  טבעי שעבורו  $a_n = \frac{1}{a_1}$ ? אם כן – מצא אותו. אם לא – נמק.

(3) האם קיים  $n$  טבעי שעבורו  $a_n = \frac{1}{a_{13}}$ ? אם כן – מצא אותו. אם לא – נמק.

ג. (1) הבע באמצעות  $q$  את 7 האיברים הראשונים של הסדרה  $a_n$ .

(2) נתון:  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k = 1$  (הוא מספר טבעי).

מצא את הערך של  $k$ , והסבר מדוע הוא הערך האפשרי היחיד של  $k$ .

$$a_3 \cdot a_7 = 1$$

$$a_1 \cdot q^2 \cdot a_1 \cdot q^6 = 1$$

$$a_1^2 \cdot q^8 = 1$$

$$(a_1 \cdot q^4)^2 = 1$$

$$a_5^2 = 1 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$

$$a_5 = 1 \quad a_5 = -1$$

10.  $a_5$  נמשך כאן 8

עיקר הנתון:

ב-10) נאמר ונתון  $a_5 > 0$  נמשך כאן הנתון  $a_5 = 1$  ע

$$a_1 q^4 = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{q^4}$$



$$a_n = \frac{1}{a_1}$$

ב (2)

$$a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{a_1}$$

$$\frac{1}{q^4} \cdot q^{n-1} = \frac{1}{\frac{1}{q^4}}$$

$$q^{n-1} = q^8$$

מאחר !  $q \neq 1$   
ניתן להסיר  $q$

$$n-1=8$$

$$\boxed{n=9}$$

$$\boxed{a_9 = \frac{1}{a_1} \text{ מסקנה}}$$

$$a_n = \frac{1}{a_{13}}$$

ב (3)

$$a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{a_1 \cdot q^{12}}$$

$$\frac{1}{q^4} \cdot q^{n-1} = \frac{1}{\frac{1}{q^4} \cdot q^{12}}$$

$$q^{n-1} = q^{-4}$$

$$n-1=-4$$

$$n = -3 \text{ (כאשר } q \neq 1 \text{)! } n \text{ יכול}$$

$$\boxed{\frac{1}{a_{13}} \text{ מסקנה: לא קיים איבר שווה}}$$



$$a_1 = \frac{1}{q^4}, a_2 = \frac{1}{q^3}, a_3 = \frac{1}{q^2}, a_4 = \frac{1}{q}, a_5 = 1 \quad (1) \text{ ז}$$

$$a_6 = q, a_7 = q^2$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdots a_k = 1$$

ז (2) איבר שלי בטור a :

$$\frac{1}{q^4} \cdot \frac{1}{q^3} \cdot \frac{1}{q^2} \cdots q^{k-5} = 1$$

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$$

$$q^{-4} \cdot q^{-3} \cdot q^{-2} \cdots q^{k-5} = 1$$

$$a_k = \frac{1}{q^4} \cdot q^{k-1}$$

$$q^{-4-3-2+\dots+k-5} = 1$$

$$a_k = q^{k-5}$$

נסכים את החזקות ז' נוסח סכום של טור

$$I \text{ איבר} = -4$$

תסבוג:

$$n = 1$$

$$n = k$$

$$S_k = \frac{k(-4+k-5)}{2} = \frac{k(k-9)}{2}$$

$$q^{\frac{k(k-9)}{2}} = 1$$

$$\frac{k(k-9)}{2} = 0$$

$$k(k-9) = 0$$

$$k=0 \quad \boxed{k=9}$$

$a_1 \cdot a_2 \cdots a_9 = 1$  : מסק נ'

ניתן לראות ש  $k=9$  הוא הפתרון היחיד.



ג(2) בתריון נוסף -

בסעיפים קודמים ראינו  $\epsilon$   $a_6$  הוא ההופכי של  $a_1$

$a_7$  " " " " של  $a_3$

$a_8$  " " " " של  $a_4$

ע"י חישוב של  $a_8$  ניתן להראות שהוא ההופכי של  $a_2$ .

אנו יוצעים שכתל את כוללים מספר בהופכי

שלו אנו מקבלים 1. בנוסף  $a_5=1$ . ולכן אם

נכתוב את  $p$  האיברים הכאשונים נקבל 1.  $|K|=9$

הסיבה  $\epsilon$   $p=9$  הוא הכתרון החיז היא שהחל

ל סיום (הוא) אין איברים איבר הופכי בסדרה בא

מיקום (זמננו) את בסעיף ב(3) ולכן

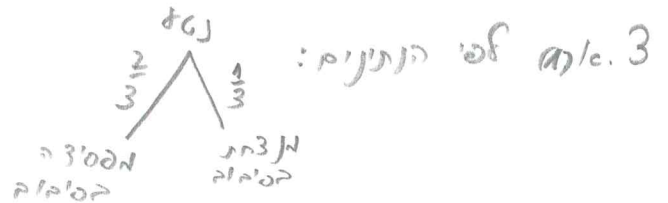
אם נאסיק לכתוב את האיברים בסדרה אחר

המיקום התישעו המכילג אהיה שונה לאחר.





3. גלי ונטע משחקות משחק ובו אפשר לקבוע את מספר הסיבובים. בכל סיבוב אחת מהן זוכה והאחרת מפסידה. המנצחת במשחק כולו תהיה זו שתזכה ביותר סיבובים מחברתה. אם לשתיהן מספר שווה של זכויות בסיבובים, התוצאה במשחק כולו תהיה תיקו. נתון: בכל סיבוב הסיכוי של נטע לזכות הוא  $\frac{1}{3}$ .
- א. ביום ראשון שיחקו גלי ונטע 4 סיבובים במשחק.  
(1) מהי ההסתברות שנטע ניצחה במשחק כולו?  
(2) מהי ההסתברות לתוצאת תיקו במשחק כולו?
- ב. גם ביום שני שיחקו גלי ונטע 4 סיבובים במשחק. הפעם הן החליטו מראש שאם התוצאה במשחק של 4 הסיבובים תהיה תיקו – הן ישחקו עוד 3 סיבובים כדי להכריע את תוצאת המשחק, ומי שתזכה ביותר סיבובים, תנצח במשחק כולו.  
מהי ההסתברות שנטע תנצח במשחק כולו?
- ג. ידוע שנטע ניצחה במשחק כולו בדיוק באחד משני הימים: ראשון או שני. מהו הסיכוי שהיא ניצחה במשחק כולו ביום שני?



א. נוסח התנאי המתאים:  $P(\text{ניצחה}) = P(3) + P(4) =$

$n = 4$   
 $k = 3, 4$   
 $p = \frac{1}{3}$

$$= \binom{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{4}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{8}{81} + \frac{1}{81} = \boxed{\frac{9}{81}}$$

ב. נוסח התנאי המתאים:  $P(\text{ניצחה}) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$

$n = 4$   
 $k = 2$   
 $p = \frac{1}{3}$

$$= \boxed{\frac{8}{27}}$$



המשק של 3 יום.  

$$P(\text{תנצח קמשתק כלול קיום השני}) = P(\text{משתקים } 4-2) + P(\text{משתקים } 7 \text{ לאתרי})$$

לפי (1), (2)  

$$P(\text{משתקים } 4-2) = \frac{1}{9}$$

כאשר מנצח  

$$P(\text{משתקים } 7 \text{ לאתרי}) = \frac{8}{27} \cdot P(\text{משתקים } 2-2 \text{ לאתרי})$$

$$P(\text{משתקים } 7 \text{ לאתרי}) = \frac{8}{27} \cdot \left( \binom{3}{2} \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \binom{3}{3} \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right)$$

$$P(\text{משתקים } 7 \text{ לאתרי}) = \frac{8}{27} \cdot \left( \frac{2}{9} + \frac{1}{27} \right) = \frac{56}{729}$$

$$P(\text{תנצח קמשתק כלול קיום השני}) = \frac{1}{9} + \frac{56}{729} = \frac{137}{729}$$

$$P(\text{קיום שני} \mid \text{קמשתק כלול קיום השני}) = \dots$$

$$= \frac{P(\text{קמשתק כלול קיום השני} \mid \text{קיום שני}) \cdot P(\text{קיום שני})}{P(\text{קמשתק כלול קיום השני})} = \frac{P(\text{קמשתק כלול קיום השני} \mid \text{קיום שני})}{P(\text{קמשתק כלול קיום השני})} + \dots$$



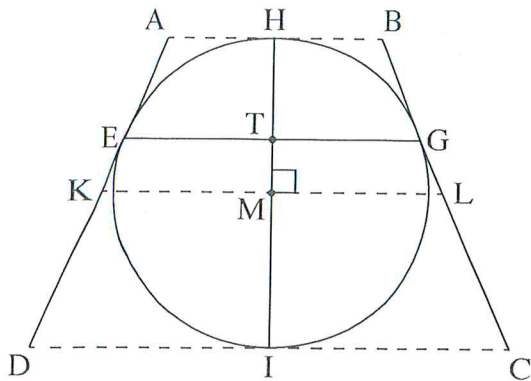
המשק שאלה 3.

ע. לפי סעיפים קולטים:

$$P \left( \begin{array}{c|c} \begin{array}{l} \text{רצח} \\ \text{רצח} \\ \text{קיום טני} \end{array} & \begin{array}{l} \text{רצח} \\ \text{קיום} \\ \text{קיום} \\ \text{טני} \\ \text{היום} \end{array} \end{array} \right) = \frac{\left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \frac{137}{729}}{\frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{137}{729}\right) + \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(\frac{137}{729}\right)} = \frac{\frac{1096}{6561}}{\frac{592}{6561} + \frac{1096}{6561}}$$

$$= \left[ \frac{137}{211} \right]$$





4. EG הוא מיתר במעגל שמרכזו M ורדיוסו r.  
 דרך הנקודות E ו-G העבירו משיקים למעגל.  
 דרך מרכז המעגל, M, העבירו ישר המקביל למיתר EG  
 וחותך את המשיקים בנקודות K ו-L, כמתואר בציור.  
 דרך מרכז המעגל, M, העבירו אנך ל- KL  
 אשר חותך את המיתר EG בנקודה T  
 ואת המעגל בנקודות H ו-I, כמתואר בציור.  
 נסמן:  $TG = a$ .

א. (1) הוכח:  $TG \cdot ML = MG^2$ .

(2) הבע את אורך הקטע KL באמצעות a ו-r.

דרך הנקודות H ו-I העבירו משיקים למעגל כך שנוצר טרפז שווה שוקיים ABCD שחוסם את המעגל, כמתואר בציור.

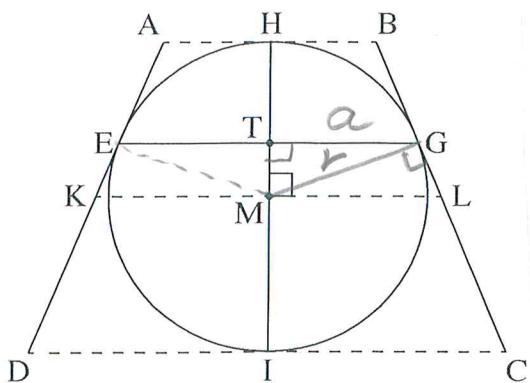
ב. (1) הוכח:  $BC = KL$ .

(2) הבע את היקף הטרפז ABCD באמצעות a ו-r.

ג. האם היחס בין היקף הטרפז ABCD והיקף המעגל יכול להיות קטן מ-  $\frac{4}{\pi}$ ? נמק.

נימוק	טענה	נספח
נתון	$GE \sim ME$	(1)
נתון	$KL \parallel GE$	(2)
נתון	$HI \perp KL$	(3)
נתון	$TG = a$	(4)
בניית עזר, מרכז מעגל הטרפז + נתון	נקודת רציס $M = \text{מרכז}$	(5)
נתון	$GL \perp GE$ בנקודה G	(6)
משוואה שאלון ארציים תאריך נקודת הישקה 5, 5, 5	$\angle MGL = 90^\circ$	(7)





נימוק  
כיון שהמסלול קווי ישרים  
הקבילים שלול 151.

לפי 2

המסלול צמיח 5.5. לפי  
7, 8, 9

יחס הזוויות הנגזרות  
בהשקעים עומים.

לפי 11

הקביל נתונים. לפי 5, 4

לפי 13

אנו מניחים שהקביל  
חופף אתו. לפי 3, 5

לפי 13 + 11

מסקנה

$\angle GML = \angle TGM$  (8)

$\angle MTG = 90^\circ$  (9)

$\triangle GTM \sim \triangle MGL$  (10)

$\frac{ML}{MG} = \frac{MG}{TG} = \frac{LG}{TM}$  (11)

$TG \cdot ML = MG^2$  (12)

נניח  $MG = a$

$a \cdot ML = r^2$  (13)

$ML = \frac{r^2}{a}$  (14)

$TE = TG$  (15)

$TE = TG = ML = \frac{r^2}{a}$  (16)



נימוק

טענה

מספר

- נתון

17
- גשיר שאורך ארציוס  
אל נקודה הישנה  
עם. 17

$\angle KME = 90^\circ$

18
- אפי 18, 7 כאל האקור

$\angle KME = \angle MGL = 90^\circ$

19
- הוא נקודה שאלה בעל  
יש 15 ו 16 אפי

$\angle MEG = \angle MGE$

20
- 16, 5

15 ו 16 מתחלפות בין  
יש בים נדבליק שאלה

$\angle KME = \angle MET$

21
- אפי 21, 20

כאל האקור אפי

$\angle KME = \angle GML$

22
- אפי 16, 5

$EM = GM = r$

23
- שאל אפי 5 ק. 5

אפי 23, 22, 19

$\angle KEM \cong \angle LGM$

24
- נאקע שאלה בישאליק  
חופפ. שאלה

$\angle KME = \angle ML$

25
- מיבוי האקור אפי 25, 14

$KL = \frac{2r^2}{a}$

26

נ.ש.ג. א' (2)



נלמד

טענה

מסבר

שתיק שווונן ארציוס  
ולו נקודת ההשקה.

$\angle BHI = \angle CIH = 90^\circ$

(27)



אם ביו עניישהיך  
יש לומר חזק צדדי  
שאלה (א-8)  
הישרים נקבאים אפי 3

$AB \parallel CD \parallel EG$

(28)



אפי 28

$HB \parallel CI$

(29)

ארבע שאלות  
נתון

מ ABCD ארבע  
שתיים הן ישרות

(30)



שאלה דמיט ארבע  
שאלות שונות - 90

$\angle BCD \neq 90^\circ$

(31)



אפי 27, 28, 29

$HI \parallel CB$

(32)

אפי 27, 29

$HB \parallel CI$  ארבע

(33)

הוא שיונו מיתקן סוף  
בארבע ומהא זקסיסיון  
הוא הלא מיתקן ארבע

מ הלא מיתקן  
בארבע

(34)

אפי 28, ומהו של א  
עוהר כריכס הנהגה.

הלא מיתקן בארבע שאלה  
למהיה סכום הפסיסיון אפי

$m = \frac{HB + CI}{2}$

(35)

27, 28, 29





נילוז

לפי 25

אם מדובר שאלה אנחנו  
יוצאים שני שיקים  
אנחנו הם שאלות האחרים

הלכה לפי 36, 37

היבוי האננו ע"דו ישר

כל רובג טחוסם אנחנו  
סנוס קצת וצביו טאול  
אכסופ בקצת הנצית  
הנותרת לפי 30

נתון

לפי 26, 39, 41

לפי 40, 42

נוסחת היקף אנחנו

טג

$$KL = HB + CI$$

$$\begin{cases} HB = BG \\ CI = CG \end{cases}$$

||  
↓

$$KL = RG + CG$$

$$KL = BC$$

נ"ח (1) >

$$AD + BC = AB + CD$$

$$AD = BC$$

$$AD = BC = \frac{2k^2}{a}$$

$$P_{ABCD} = \frac{8k^2}{a}$$

נ"ח (2) >

$$P_{\text{היקף}} = 2\pi k$$

מספר

(36)

(37)

(38)

(39)

(40)

(41)

(42)

(43)

(44)





ניחוח

טעם

מספר

(45)

חיסוך אלגרו

$$\frac{P_{ABC}}{P} = \frac{uv}{a\pi}$$

מחזורי ישרה בשולר  
למח נעלה - הולר  
הנבול בשולר.  
אפי 4, 5, 7

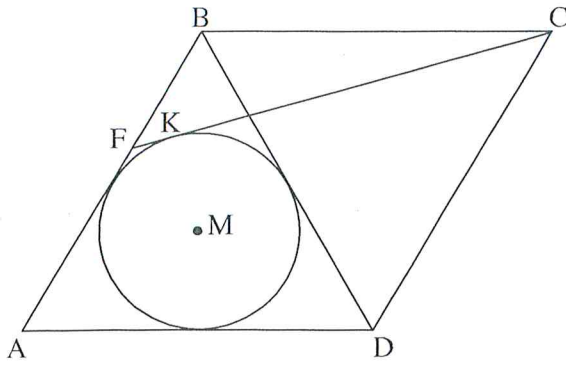
$a < v$

(46)

חיסוך. אפי  
46, 45

(47) היום בין הולר חפס  
זה הולר חפס לא יכיל  
אפי חפס -  $\frac{4}{\pi}$ .  
נעלה



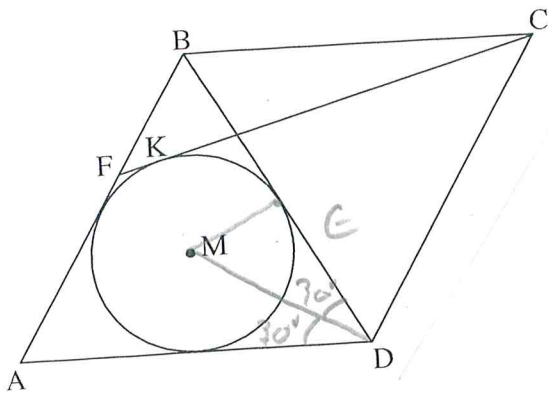


5. ABCD הוא מעוין שאורך צלעו הוא a.  
נתון:  $\angle BAD = 60^\circ$ .

במשולש ABD חסום מעגל שמרכזו M.  
מן הקודקוד C העבירו משיק למעגל  
שהמשכו חותך את הצלע AB בנקודה F  
והוא משיק למעגל בנקודה K (ראה ציור).

- א. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.
- ב. (1) הסבר מדוע הנקודה M נמצאת על אלכסון המעוין AC.
- (2) חשב את גודל הזווית ACF.
- ג. הבע באמצעות a את שטח המשולש ACF.

נוסף על הנתונים אלו:



א. (סמן ילד ודו"ב ההלכה של  
BD עם הנקודה E, ינוניו  
כביוס E מ, ו הלא M.

נתון:  $\angle BMD = 60^\circ$

$\angle BMD = \angle BMD = 60^\circ$  (הילד = 180 -  $\angle ABD$ )

M גולה 1/5 א,  $\angle ADM = \angle BDM = 30^\circ$

$\angle EMD = 90^\circ$  (15 - בין שני זכיוס ילד ודו"ב  
ההלכה)

$r = 2 \cdot OM$  (משולש ישר-זווה בעל 30-60-90  
הנילב על שני שווה אמצעית היתר)

כך נקודת הלא M.



(הסדר זהה)  $BM = DM = 2r$   
 (לפי ציור ממ)

מבואן בהשוואה:  $BM$

$$BD = AD = AB = a$$

$$\angle BMD = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$$

ד"ן:

$$\frac{a}{\sin 120^\circ} = \frac{2r}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \boxed{r = \frac{\sqrt{3}a}{6}}$$

ב. (1) הלא כסיון  $AC$  חוצה את  $AD$  בנקודה  $M$ .

מ  $AM$  חוצה את  $AD$  בנקודה  $M$  כי  $AM$  חוצה את  $AD$  בנקודה  $M$  כי  $AM$  חוצה את  $AD$  בנקודה  $M$ .

ד"ן  $M$  (נקודה) חוצה את  $AC$



7. (2) חשב את  $CE$  בהינתן  $CD$ :

$$\frac{CE}{a} = \sin 60^\circ \Rightarrow CE = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

עקב זה היקף הטרפז:

$$MC = CE + EM = \frac{\sqrt{3}a}{6} + \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$MC = \frac{2\sqrt{3}}{3} a$$

נניח כי  $CM$  ונתבונן בשאלת  $CM$ :

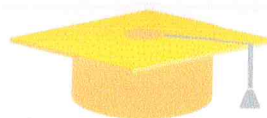
$$CM = r = \frac{\sqrt{3}a}{6}$$

(יש להימנע, למעשה, מרציוס או נדון)  $\angle MCA = 90^\circ$   
הישרה

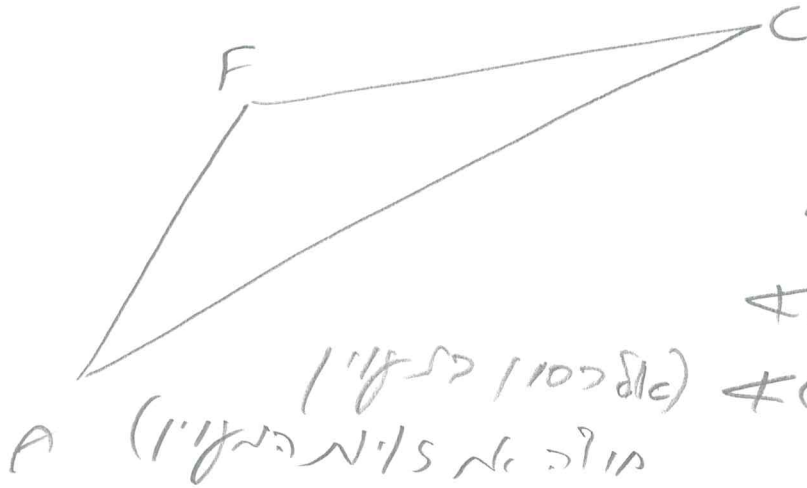
$$MC = \frac{2\sqrt{3}}{3} a$$

$$\sin \angle ACF = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{6}}{\frac{2\sqrt{3}}{3} a} = \frac{1}{4} \quad \text{לכאן:}$$

$$\angle ACF = 14.478^\circ$$



ד. הן שני  $\triangle ACF$ :



$$AC = \sqrt{3}a$$

$$\angle ACF = 14.478^\circ$$

$$\angle CAF = 30^\circ$$



$$\angle AFC = 135.522^\circ$$



$$\frac{AF}{\sin 14.478^\circ} = \frac{\sqrt{3}a}{\sin 135.522^\circ}$$



$$AF = 0.618a$$



$$S_{AFC} = \frac{AF \cdot AC \cdot \sin 70^\circ}{2} = \boxed{0.267a^2}$$



6. נתונה משפחת הפונקציות:  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{2x - a}$ .  $a$  הוא פרמטר המקיים  $-4 < a < 2$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- (1) מסבר מדוע לפונקציה  $f(x)$  אין אסימפטוטה מקבילה לציר ה- $y$ .
- (2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המקבילות לציר ה- $x$ .
- (3) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים?
- (4) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. הבע באמצעות  $a$  את שיעורי ה- $x$  שבעבורם  $f'(x) = 0$  (אם יש כאלה).
- (1) מצא את הערך של  $a$  שבעבורו  $f'(x) \neq 0$  לכל  $x$  בתחום ההגדרה.
- (2) הצב  $a = -1$  במשוואת הפונקציה  $f(x)$  וענה על הסעיפים ג-ד.
- ג. מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה)?
- (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- (2) חשב את  $\int_3^4 \frac{1}{f(x)} dx$ . תוכל להשאיר שורש בתשובתך.
- ד.



שאלה 6

$$-4 < a < 2 \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x-a}$$

(k) (1) תמוס הנמם צככ

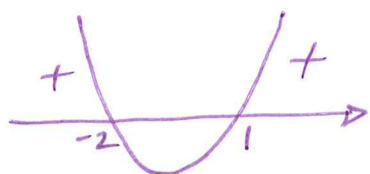
$$x^2+x-2 \geq 0$$

$$2x-a \neq 0$$

$$(x+2)(x-1) \geq 0$$

$$x \neq \frac{a}{2}$$

$$x = -2 \quad x = 1$$



$$x \leq -2, x \geq 1$$

מיון ע  $-4 < a < 2$ , נקוד ,  $-2 < \frac{a}{2} < 1$

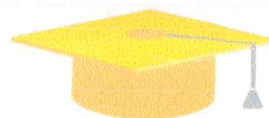
וקיטנו ע  $x \neq \frac{a}{2}$ . מכאן,  $x$  שונה ממספס

כלסכו הנמצא ג'ן  $-2$  ו  $1$ , אכלו התמוס

שמצאו מתגל הנודע מכפצנת הסוכס,

לאמכיל מספכ'ס בתמוס הצכ. ולכן תמוס

המפצנת שאלו  $x \leq -2, x \geq 1$ .



(אין אם ישול  $x$  שלילי  
דחוק הכנסה).

(2) אסמאלה אנל

כפ' שהסכמנו גא' (א),

(א)  $f(x)$  אינה מוגדרת  $x$  שלילי

גם האפנה. ולכן אין פונקציה  
אסמאלה אנל.





(3) אסימטות אופקיות

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x-a} = \frac{1}{2}, \quad \boxed{y = \frac{1}{2}, x > 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x-a} = -\frac{1}{2}, \quad \boxed{y = -\frac{1}{2}, x < 0}$$

(4) נק' חיתוך עם צ'כ ה X

$$\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x-a} = 0 \quad | \cdot 2x-a$$

$$\sqrt{x^2+x-2} = 0 \quad | \uparrow^2$$

$$x^2+x-2=0$$

$$(x+2)(x-1)=0$$

$$x = -2 \quad x = 1$$

$$\boxed{\begin{matrix} (-2, 0) \\ (1, 0) \end{matrix}}$$



אין נת' מיומון עם צ'י ה' י  
כ'  $x=0$  לא ג' תחום ההעברה.

(5)

	$x <$	$-2$	/	$1$	$< x$
$x$	(-3)		/		(2)
$f(x)$	-		/		+

החומר של  $f(x)$  ח'ול'  
נצ'ק דמכנה של  $f(x)$

$$2 \cdot (-3) - a = -6 - a < 0$$

$$2 \cdot 2 - a = 4 - a > 0$$



$x < -2$	$f(x) < 0$ ע'קונ
$x > 1$	$f(x) > 0$ ע'קונ





② (1)

$$f'(x) = \frac{\frac{(2x+1)(2x-a)}{2\sqrt{x^2+x-2}} - 2\sqrt{x^2+x-2}}{(2x-a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{(2x+1)(2x-a) - 4(x^2+x-2)}{2\sqrt{x^2+x-2}}}{(2x-a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2+2x-2ax-a-4x^2-4x+8}{2(2x-a)^2\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$f'(x) = \frac{-2ax-2x-a+8}{2(2x-a)^2\sqrt{x^2+x-2}} = 0$$

$$-2ax-2x-a+8=0$$

$$x(2a+2) = 8-a$$

$$x = \frac{8-a}{2a+2}$$



(2)

$$f'(x) \neq 0$$

קטגוריה

$$2a + 2 = 0 \quad \text{כאשר}$$

$$2a = -2$$

$$a = -1$$

(c)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{2x + 1}$$

(1)  $f'(x) \neq 0$  כאשר  $a = -1$

ולכן יש  $f(x)$  ו' $f(x)$  נק' ק' ציון פנימיות.

	$x < -2$	/	1	$< x$
$f'(x)$	+	/		+
$f(x)$	↗	/		↗

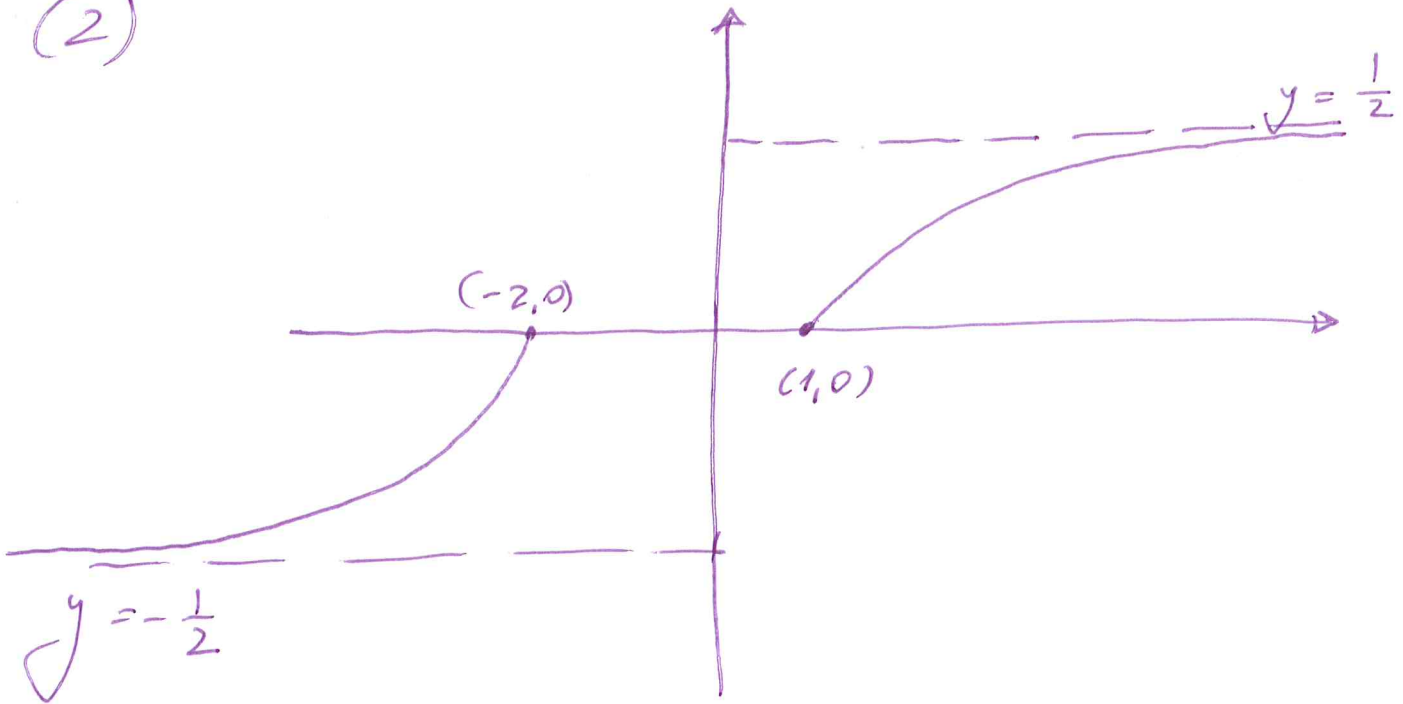
$$f'(x) = \frac{2x + 1}{2(2x + 1)^2 \sqrt{x^2 + x - 2}}$$

קטגוריה



$f(x)$  עולה ללא אסימטוטה אנכית

(2)



3

$$\int_3^4 \frac{1}{f(x)} dx = \int_3^4 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-2}} dx$$

הצבה:

$$u = x^2 + x - 2$$

$$du = (2x+1) dx$$

$$dx = \frac{du}{2x+1}$$





$$\int_3^4 \frac{2x+1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{2x+1} = \int_3^4 \frac{2}{2\sqrt{u}} du =$$

$$= 2\sqrt{u} = 2\sqrt{x^2+x-2} \Big|_3^4 =$$

$$= 2\sqrt{4^2+4-2} - 2\sqrt{3^2+3-2} = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{10} =$$

$$= 2.16$$





7. נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 \sin x$  המוגדרת בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

- א. (1) קבע אם הפונקציה  $f(x)$  היא זוגית או אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית. נמק.  
 (2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון.  
 (3) הסבר מדוע הפונקציה  $f(x)$  היא אי-שלילית בתחום הנתון.  
 (4) קבע אם פונקציית הנגזרת,  $f'(x)$ , היא זוגית או אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית. נמק.

ב. (1) הראה ששיעורי ה- $x$  שעבורם  $f'(x) = 0$  מקיימים  $\tan x = -\frac{1}{3}x$ .

(2) בצור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות

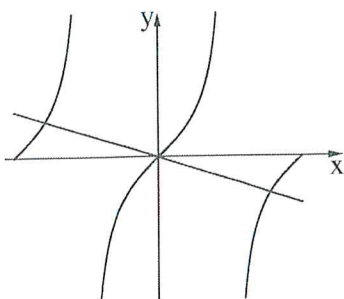
$$g(x) = \tan x \quad \text{ו} \quad h(x) = -\frac{1}{3}x$$

בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

היעזר בצור,

וקבע כמה נקודות בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$

מקיימות  $f'(x) = 0$ .



נתון: שיעור ה- $x$  של אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  הוא 2.46 בקירוב.

ענה על הסעיפים ג-ד בעבור התחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

- ג. (1) מה הם שיעורי ה- $x$  של כל נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  בתחום? נמק וקבע את סוגן.  
 (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום.  
 ד. (1) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת,  $f'(x)$ , בתחום.  
 (2) כמה נקודות פיתול לכל הפחות יש לפונקציה  $f(x)$  בתחום? נמק.

א (1)  $\sin(-x) = -\sin(x)$  ; אולי יזכירם ;

$$f(-x) = (-x)^3 \sin(-x) = -x^3 \cdot (-\sin x) = x^3 \sin x = f(x)$$

הסבר נוסף:  $f(x) = x^3$  היא פונ' אי' ס' /

$f(x) = \sin(x)$  היא פונ' ז' ס' /

מכאן שפונ' אי' ס' נלמג פונ' ז' ס' /

$$0 = x^3 \sin x$$

א (2) חיתוך עם  $x$ :

$$x^3 = 0$$

$$\sin(x) = 0$$

$$x = 0$$

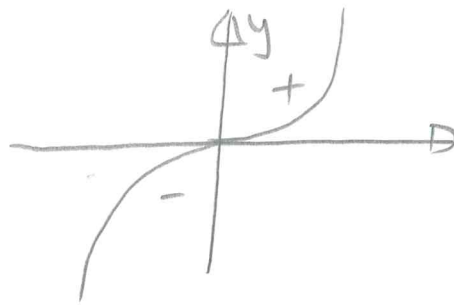
$$x = 0 + \pi k$$

$$x = \pi, 0, -\pi$$

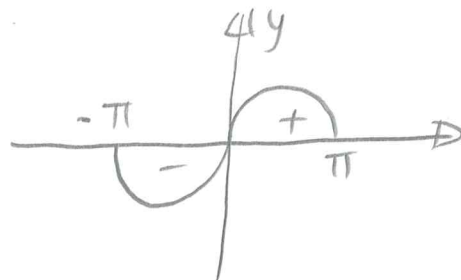
$$(\pi, 0) \quad (0, 0) \quad (-\pi, 0)$$



א (3) את יוצרים שבאשר  $0 < x < \pi$  פונ'  $y = \sin x$  חיובי  
 וגם הפונ'  $y = x^3$  חיובי ולכן מכפולן חיובי  
 בתחום זה.  
 מאחר והפונ'  $f(x)$  צויה נמן לחסיק שביא חיובי  
 גם בתחום  $-\pi < x < 0$  עקור  $\pi, -\pi, x = 0$  הפונ' ממשלסם  
 ולכן נמן עקבוץ שבפונ'  $f(x)$  אי-שלילי עכף ערק א בתחום.  
 הסבר נוסף: הפונ'  $y = x^3$  נכאי כן:



הפונ'  $y = \sin x$  נכאי כן:



ולכן המכפול בינן גמיז אי-שלילי.





א) אנו יוצעים שטור הפונ' באי, נגזיר בהכרח  
אי-נוגזר. נוכי' אס' :

$$f'(x) = 3x^2 \sin(x) + x^3 \cos(x) = x^2(3\sin x + x \cos x)$$

(יצי' א'  $\cos(-x) = \cos x$  ופונ'  $\sin(-x) = -\sin x$ )

$$f'(-x) = (-x)^2(3\sin(-x) + (-x)\cos(-x)) = x^2(-3\sin(x) - x \cos(x))$$

$$= -x^2(3\sin x + x \cos x) = -f'(x)$$

מאחר והפונ' אי-זוגית ופונ'  $f'(-x) = -f'(x)$  נסיק א'  $f'(x)$  אי-זוגית.

$$f'(x) = x^2(3\sin x + x \cos x) = 0 \quad \text{ב) (1)}$$

$$x^2 = 0 \quad \text{או} \quad 3\sin x + x \cos x = 0 \quad | :3 \quad | : \cos x$$

$$x = 0 \quad \tan x + \frac{x}{3} = 0$$

כאשר  $x=0$   $\tan(0)=0$

אם  $-\frac{1}{3} \cdot 0 = 0$  וכן אם

אם  $\tan x = -\frac{x}{3}$   $x=0$  אז

$$\boxed{\tan x = -\frac{x}{3}}$$

ב) נניח שכלוא הפונ' שפונ' (מתכו' 3 פונ' מתחום. וכן  $f'(x) = 0$  בשו' ערכי  $x$  שונים בתחום.

א) ש' ערכי  $x$  של נקודות הקיצון (הפונ' הם  $x = 2.46$

$x = 0$

$x = -2.46$

הסבר: מאחר והפונ'  $f'(x)$  אי-זוגית נניח פונ' שיהא מתחום  $x=0$  ? א'  $x=0$  (פונ' אי-זוגית ש'  $x=0$  ?



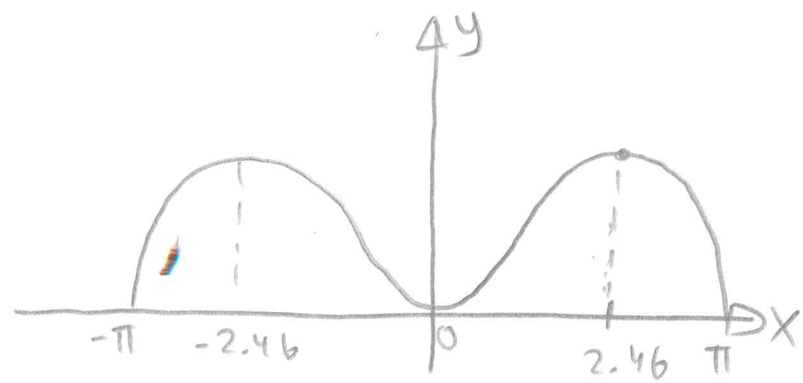
צוקית בהכרח ברושט (הצירוף) וק  $x=2.46$   
 מאחר וברוך יא' - נאג' מנקיים  $f'(2.46) = -f'(-2.46)$  :

אנחנו  $f'(2.46) = 0$  :

כדי לסווג את נקודות הקיצון נמצא טבלה:

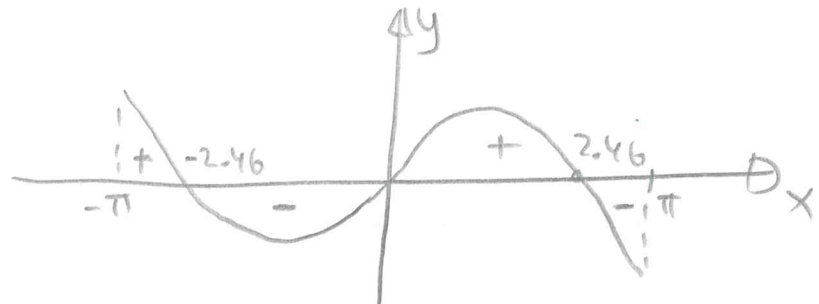
X	$-\pi < x < -2.46$	$x = -2.46$	$-2.46 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2.46$	$x = 2.46$	$2.46 < x < \pi$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	min קצ' ←	max קצ' →	min קצ' ←	max קצ' →	min קצ' ←	max קצ' →	min קצ' ←

מסיכום:  $x = \pi$  מינימום קצה,  $x = 2.46$  מקסימום,  $x = 0$  מינימום קצה,  $x = -2.46$  מקסימום,  $x = -\pi$  מינימום קצה



ג. (2)

3 (1) ע"כ גמול חיובי ושלילי של נא' המוכרים  
 כשנבדק עם נא' ניקם עכסיק שצור נא' נכחו כק:

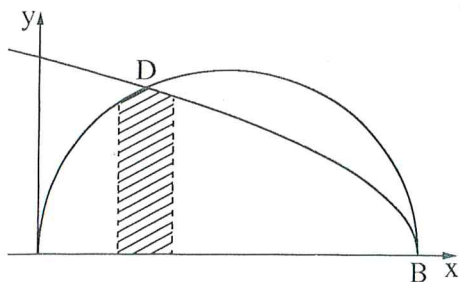


2 (2) מסל הפחול 2 פגועים מאחר ובנגזרת יש 2 נקודות קיצון פנימיים שפחול.



8. בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 7x}$  ו-  $g(x) = \sqrt{14 - 2x}$ .

גרף הפונקציה  $f(x)$  חותך את ציר ה- $x$  בראשית הצירים ובנקודה  $B$ , ואת גרף הפונקציה  $g(x)$  הוא חותך בנקודות  $B$  ו-  $D$ , כמתואר בציור.



א. מצא את תחומי ההגדרה של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$ .

ב. מצא את שיעורי ה- $x$  של הנקודות  $B$  ו-  $D$ .

$a$  הוא פרמטר המקיים  $1 \leq a \leq 2$ .

השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$ ,

על ידי האנכים  $x = a$  ו-  $x = a + 1$  ועל ידי ציר ה- $x$ , מסתובב סביב ציר ה- $x$ .

ג. (1) חשב את  $a$  שבעבורו נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא המקסימלי.

(2) מצא את  $a$  שבעבורו נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא המינימלי.

אם צריך, השאר בתשובותיך שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

$$-x^2 + 7x \geq 0$$

$$-x^2 + 7x = 0$$

$$x(7-x) = 0$$

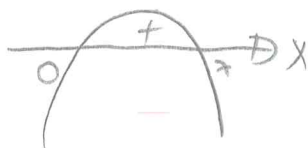
$$x = 0 \quad x = 7$$

$$\boxed{0 \leq x \leq 7}$$

$$14 - 2x \geq 0$$

$$14 \geq 2x$$

$$\boxed{7 \geq x}$$



א (1) גרף של  $f(x)$ :

גרף של  $g(x)$ :

א (2) נקודת חיתוך בין 2 כוונות  $(x)$   $\sqrt{14-2x} = \sqrt{-x^2+7x}$

$$14 - 2x = -x^2 + 7x$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

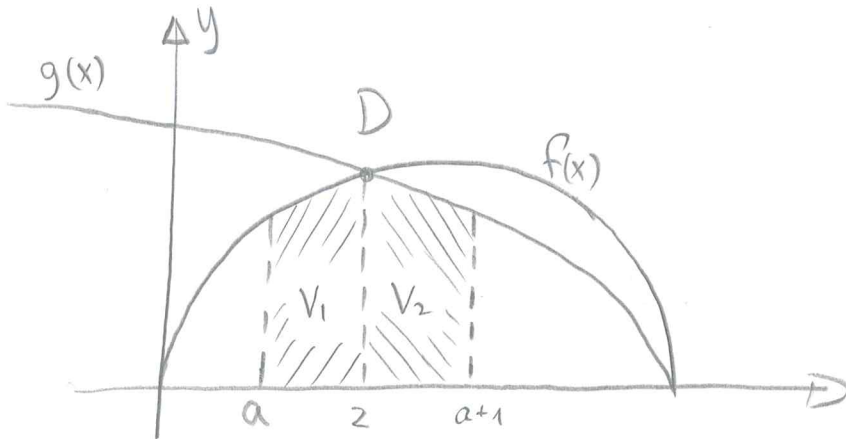
$$(x-7)(x-2) = 0$$

$$\boxed{x_B = 7}$$

$$\boxed{x_D = 2}$$

\* אין צורך לבדוק את תחומי ההגדרה של הפונקציות שנייהם 2 כוונות





ב) ראשית נתאר את הנקבה ע"י  $a$ . לאחר מכן נבטור ע"י  $a$  ונחשב מקם מוחלט (עבור סעיף ב(1)) ומ"ן מוחלט (עבור סעיף ב(2))

$$V_1 = \pi \int_a^2 (f(x))^2 dx = \pi \int_a^2 (\sqrt{-x^2 + 7x})^2 dx = \pi \int_a^2 (-x^2 + 7x) dx$$

$$= \pi \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} \right]_a^2 = \pi \left[ \left( -\frac{2^3}{3} + \frac{7 \cdot 2^2}{2} \right) - \left( -\frac{a^3}{3} + \frac{7a^2}{2} \right) \right]$$

$$= \pi \left[ 14 - \frac{8}{3} + \frac{a^3}{3} - \frac{7a^2}{2} \right] = \pi \left[ \frac{34}{3} + \frac{a^3}{3} - \frac{7a^2}{2} \right]$$

$$V_2 = \pi \int_2^{a+1} (g(x))^2 dx = \pi \int_2^{a+1} (\sqrt{14-2x})^2 dx = \pi \int_2^{a+1} (14-2x) dx =$$

$$= \pi \left[ 14x - \frac{2x^2}{2} \right]_2^{a+1} = \pi \left[ (14(a+1) - (a+1)^2) - (14 \cdot 2 - 2^2) \right]$$

$$= \pi \left[ (a+1)(14 - (a+1)) - 24 \right] = \pi \left[ (a+1)(13-a) - 24 \right]$$



$$V_2 = \pi [13a - a^2 + 13 - a - 24] = \pi [-a^2 + 12a - 11]$$

$$\text{לפיכך } V = V_1 + V_2 = \pi \left[ \frac{34}{3} + \frac{a^3}{3} - \frac{7a^2}{2} \right] + \pi [-a^2 + 12a - 11]$$

$$\text{לפיכך } V = \pi \left[ \frac{34}{3} + \frac{a^3}{3} - \frac{7a^2}{2} - a^2 + 12a - 11 \right] =$$

$$\text{לפיכך } V = \pi \left[ \frac{a^3}{3} - \frac{9a^2}{2} + 12a + \frac{1}{3} \right]$$

כעת נניחם לנפה כפוף חזק ונמקור אתה  
ע"פ השאלה  $a$  בתחום  $1 \leq a \leq 2$

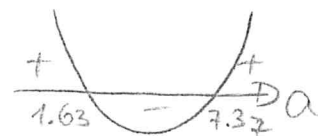
$$V'(a) = \pi \left[ \frac{3a^2}{3} - \frac{9 \cdot 2a}{2} + 12 \right] =$$

$$V'(a) = \pi [a^2 - 9a + 12] = 0$$

$a_1 = \frac{9 + \sqrt{33}}{2} \approx 7.37$  ו/ו  $a_2 = \frac{9 - \sqrt{33}}{2} \approx 1.63$   
(כפוף מאתר ו/ו א ב.ג.ו.)  
תשובה בקיבון

a	1	$1 < a < 1.63$	$1.63 < a < 2$	2
$V'(a)$		+	0	-
$V(a)$	מיני 37	↗	מקסי מני	מיני 37

ע"י ציור הביטוי  $a^2 - 9a + 12$   
נסים תיזכור אל"ל  $V'(a)$



$$V(1) = \frac{49}{6} \pi$$

$$V(1.63) = 9.38 \pi$$

$$V(2) = 9 \pi$$

עבור  $a = 1.63$  הנפה מינימלית

עבור  $a = 1$  הנפה מינימלית

