פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשע"ט, 2019, שאלון: 35481

מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

1. המרחק בין עיר א' לעיר ב' הוא 120 ק"מ.

מכונית נסעה בבוקר מעיר א' לעיר ב' במהירות קבועה.

בערב חזרה המכונית מעיר ב' לעיר א' באותה הדרך. המכונית נסעה במשך שעה באותה המהירות שבה נסעה בבוקר. היא עצרה בצד הדרך למשך 2 דקות, ולאחר מכן המשיכה בנסיעתה עד עיר א' במהירות הגבוהה ב־ 10 קמ"ש ממהירות נסיעתה בבוקר.

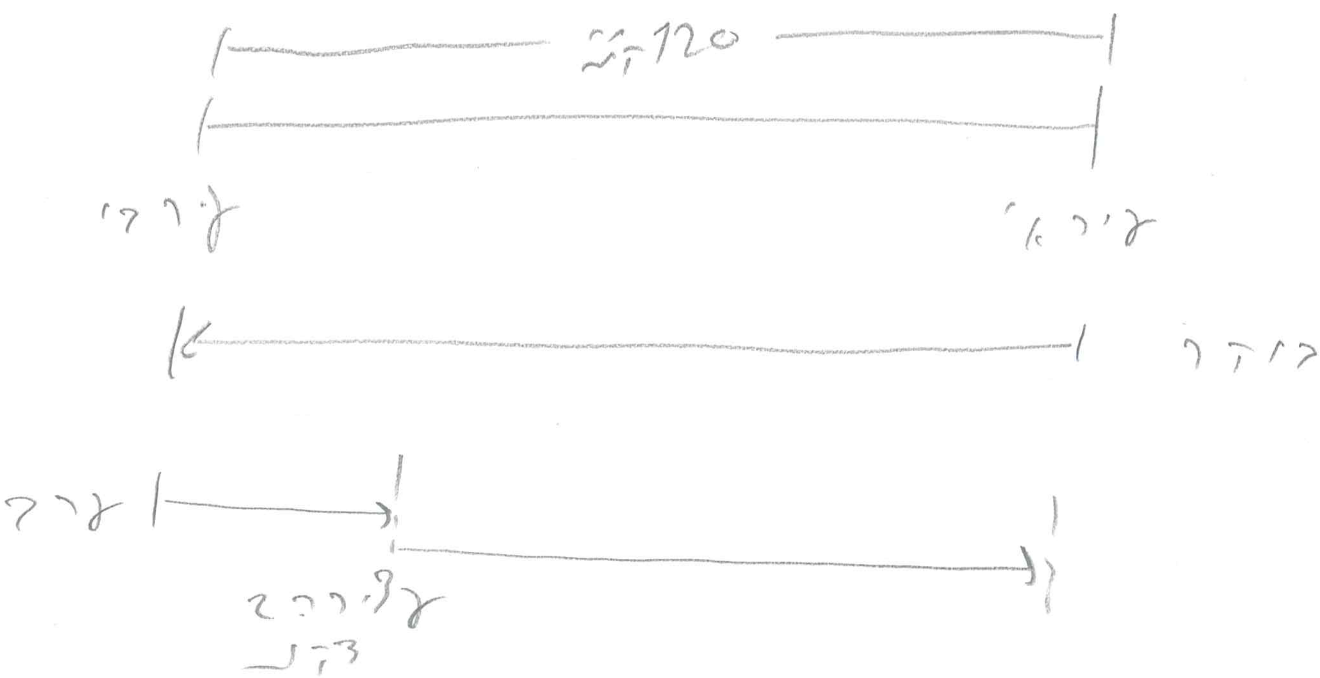
זמן הנסיעה של המכונית בערב (כולל משך זמן העצירה) היה שווה לזמן הנסיעה שלה בבוקר.

א. מצא את מהירות המכונית בבוקר.

ב. השעה שבה יצאה המכונית מעיר ב' בדרכה חזרה לעיר א' הייתה שמונה בערב.

מה היה המרחק שלה מעיר א' בשעה תשע ו־ 8 דקות בערב?

נתאר את הנתונים בשרטוט:



כעת נסדר את הנתונים בטבלה:

דרך	מהירות	זמן	תיאור התנועה
120	x	$\frac{120}{x}$	נסיעה בבוקר מ-א' ל-ב'
x	x	1	נסיעה בערב שעה ראשונה
0	0	$\frac{2}{60}=\frac{1}{30}$	עצירה
$120-x$	$x+10$	$\frac{120-x}{x+10}$	נסיעה בערב מעצירה עד עיר ב'

הסבר לטבלה:

שלב א': הכנו את המספרים הידועים ואז שרטנו
והמרנו 2 דקות ל-$\frac{2}{30}$ שעה.

שלב ב': סימנו את המהירות בדיוק ב-X קמ"ש
והשלמנו את כל המהירויות

שלב ג': השלמנו את הטבלה בעמודת הזמן והדרך
עפ"י הנוסחה זמן X מהירות = דרך

תשובה: מהירות המכונית בבוקר

היא $\boxed{\text{90 קמ"ש}}$

ב. נבדוק מה המרחק שעברה המכונית

עד שעה תשע ושמונה דקות.

היא נסעה שעה במהירות 90 קמ"ש

ועוד 6 דקות במהירות של 100 קמ"ש:

המרחק שעברה עד שעה תשע ושמונה דק' $= 1 \cdot 90 + \frac{6}{60} \cdot 100 = 100$ ק"מ

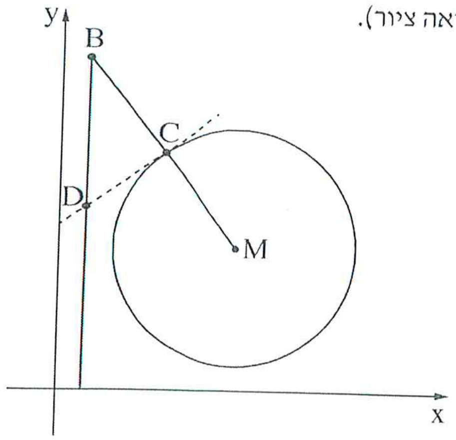
כל הדרך היא 120 ק"מ ולכן המכונית

היתה במרחק של $\boxed{\text{20 ק"מ מעיר א'}}$

2. נתון מעגל שמרכזו $M(7,6)$. הישר MB חותך את המעגל בנקודה C (ראה ציור).

נתון: $B(1, 14)$,

$MC = CB$.



א. מצא את משוואת המעגל.

העבירו משיק למעגל בנקודה C.

ב. מצא את משוואת המשיק.

מן הנקודה B הורידו אנך לציר ה־ x. המשיק והאנך נחתכים בנקודה D.

ג. חשב את שטח המשולש BCD.

הנקודה E נמצאת על האנך שהורידו מנקודה B לציר ה־ x.

נתון: $ME \parallel CD$.

ד. מצא את שיעורי הנקודה E.

ה. הראה כי הנקודה D היא מרכז המעגל החוסם את המשולש BME.

א. מרכז המעגל בנקודה $M(7,6)$

לכן משוואת המעגל $(x-7)^2+(y-6)^2=R^2$

נמצא את נקודה C כדי שנוכל לחשב את R.

לפי אמצע קטע:

$$x_C=\frac{x_M+x_B}{2}=\frac{7+1}{2}=4$$

$$y_C=\frac{y_M+y_B}{2}=\frac{6+14}{2}=10$$

נציב את הנקודה $C(4,10)$ במשוואת המעגל:

$$(4-7)^2+(10-6)^2=R^2 \Rightarrow R^2=25$$

משוואת המעגל: $\boxed{(x-7)^2+(y-6)^2=25}$

ב. שיפוע MB: $m_{MB}=\frac{14-6}{1-7}=-\frac{4}{3}$

משיק מאונך לרדיוס אל נקודת ההשקה

ולכן: $m_{MB}\cdot m_{CD}=-1$

מכאן: $-\frac{4}{3}\cdot m_{CD}=-1$

$$m_{CD}=\frac{3}{4}$$

כעת: $y-10=\frac{3}{4}(x-4)$

$$\boxed{y=\frac{3}{4}x+7}$$

ג. נמצא את נקודה D. שיעור x של הנקודה הוא $x=1$, נציב במשוואת המשיק:

$$y=\frac{3}{4}\cdot 1+7=\frac{31}{4}\Rightarrow D\left(1,\frac{31}{4}\right)$$

נחשב את הצלע BD ואת הגובה מנקודה C לצלע BD

$$S_{BCD}=\frac{BD\cdot h}{2}=\frac{(y_B-y_D)\cdot(x_C-x_B)}{2}$$

$$S_{BCD}=\frac{\left(14-\frac{31}{4}\right)\cdot(4-1)}{2}=\boxed{\frac{75}{8}}$$

3. נתון: $ME \parallel CD$

כלומר השיפועים של הקטעים שווים:

$$m_{ME} = m_{CD} = \frac{3}{4}$$

נמצא את משוואת הישר ME:

$$y-6=\frac{3}{4}(x-7)$$

$$y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$$

כעת נציב $x=1$:

$$y=\frac{3}{4}\cdot 1+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$

לסיכום הנקודה היא $\boxed{E(1,\frac{3}{2})}$

ה. מכיוון ש $ME \parallel CD$ ונתון $ME \perp MB$

לכן המשולש BME ישר זווית. נראה

שהנקודה D היא אמצע היתר BE, ולכן

היא תהיה מרכז המעגל החוסם את

משולש BME:

$$\frac{y_B+y_E}{2}=\frac{14+1.5}{2}=\frac{31}{4}=y_M$$

מכיוון שהנקודה D הינו אמצע היתר
לכן הינו מרכז המעגל החוסם את המשולש
.BME

3. במשחק יש שני סיבובים. בכל סיבוב יש שתי אפשרויות בלבד: לזכות או להפסיד. משתתף שזוכה בשני הסיבובים מנצח במשחק כולו.

ההסתברות לזכות בסיבוב הראשון גדולה פי 3 מן ההסתברות להפסיד בו.

א. מהי ההסתברות לזכות בסיבוב הראשון? נמק.

אם משתתף במשחק זכה בסיבוב הראשון, ההסתברות שהוא יזכה בסיבוב השני היא 0.8 .

אם משתתף הפסיד בסיבוב הראשון, ההסתברות שהוא יזכה בסיבוב השני היא 0.6 .

ב. (1) מהי ההסתברות לזכות בדיוק בסיבוב אחד מבין שני הסיבובים?

(2) ידוע שמשתתף זכה בדיוק בסיבוב אחד מבין שני הסיבובים. מהי ההסתברות שהוא זכה בסיבוב הראשון?

ג. (1) מהי ההסתברות לנצח במשחק כולו?

(2) 4 משתתפים משחקים במשחק. מהי ההסתברות שכל המשתתפים ינצחו במשחק כולו?

א. נסמן את ההסתברות לזכות בסיבוב הראשון ב- X. ההסתברות להפסיד היא 1-X.

נתון שההסתברות לזכות בסיבוב הראשון גדולה פי 3 מן ההסתברות להפסיד בו, ולכן:

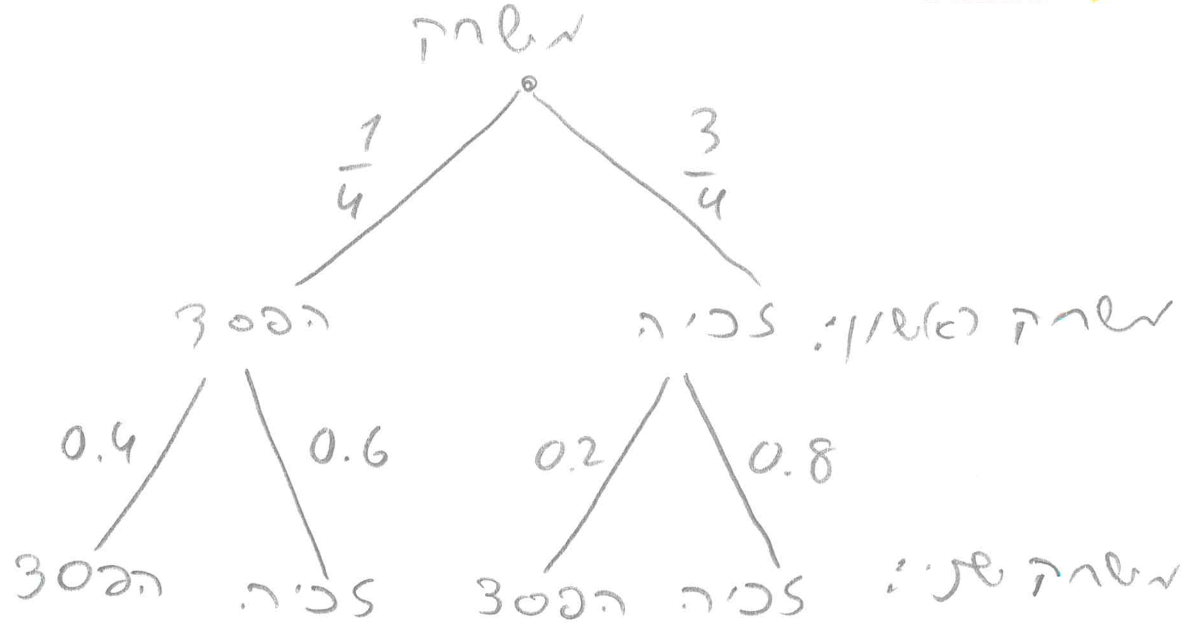
$$X=3(1-X) \Rightarrow X=3-3X$$

$$4X=3$$

$$X=\frac{3}{4}$$

ההסתברות לזכות בסיבוב הראשון $\boxed{P=\frac{3}{4}}$

ב. נתאר את הנתונים על הסיבוב השני בעזרת עץ:



(1)

$$P(\text{לזכות בדיוק בסיבוב אחד}) = \frac{3}{4}\cdot 0.2 + \frac{1}{4}\cdot 0.6 = \boxed{\frac{3}{10}}$$

(2) כי הסתברות מותנית:

$$P\left(\text{לזכות בסיבוב הראשון} \,/\, \text{זכה בסיבוב אחד בדיוק}\right) = \frac{P(\text{לזכות בסיבוב ראשון} \cap \text{זכה בסיבוב אחד בדיוק})}{P(\text{זכה בסיבוב אחד בדיוק})}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\cdot 0.2}{\frac{3}{10}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

ההסתברות שמשתתף יזכה בסיבוב הראשון אם ידוע שהוא זכה בדיוק בסיבוב אחד היא $\boxed{\frac{1}{2}}$

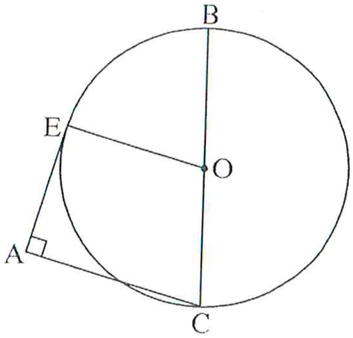
ג. (1) כדי לזכה במשחק פולו יש לזכה בשני הסיבובים:

$$P(\text{לזכה במשחק פולו}) = \frac{3}{4}\cdot 0.8 = \boxed{\frac{3}{5}}$$

ההסתברות לזכה במשחק פולו היא $\boxed{\frac{3}{5}}$

(2) לכל אחד מארבעת המשתתפים סיכוי של $\frac{3}{5}$ לזכה במשחק פולו. לכן ההסתברות שכולם יזכו במשחק פולו היא

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \boxed{\frac{81}{625}}$$



4. נתון מעגל שמרכזו O .

BC הוא קוטר במעגל. מן הנקודה A שמחוץ למעגל העבירו שני ישרים:

האחד משיק למעגל בנקודה E והאחר חותך את המעגל בנקודה C ,

כמתואר בציור שלפניך.

נתון כי $\sphericalangle EAC = 90^{\circ}$.

א. הוכח: $EO \parallel AC$.

ב. הוכח: $\sphericalangle OCE = \sphericalangle ACE$.

ג. הוכח: $\Delta EBC \sim \Delta AEC$.

נתון: $BC \cdot AC = 64$.

ד. (1) חשב את EC .

(2) נתון: $EB = 6$.

חשב את EO .

טענה	נימוק
1. נתון מעגל שמרכזו O	נתון
2. BC קוטר במעגל	נתון.
3. AE משיק למעגל בנקודה E	נתון.
4. AC חותך את המעגל בנקודה C	נתון.
5. $\sphericalangle EAC = 90^{\circ}$	נתון
6. $\sphericalangle AEO = 90^{\circ}$	משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה + (1) + (3)
7. $EO \parallel AC$ משפט זה	2 ישרים הנחתכים ע"י ישר שלישי ויוצרים זוויות חד צדדיות המשלימות ל-180°, מקבילים + (5) + (6)
8. $OE = OC$	כל הרדיוסים במעגל שווים. + (1) + (2) + (3)
9. $\sphericalangle OEC = \sphericalangle OCE$	במשולש, מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות + (8)
10. $\sphericalangle OEC = \sphericalangle ACE$	זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים שוות +

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

	טענה	נימוק
.11	$\sphericalangle OCE = \sphericalangle ACE$ משל ב׳	כלל המעבר + (9) + (10)
.12	$\sphericalangle BEC = 90^\circ$	זווית היקפית הנשענת על הקוטר ישרה + (2).
.13	$\triangle EBC \sim \triangle AEC$ משל ג׳	לפי ז.ז. + (5) + (11) + (12)
.14	$BC \cdot AC = 64$	נתון
.15	$\frac{EC}{AC} = \frac{BC}{EC} \Rightarrow EC^2 = AC \cdot BC$	יחס דמיון במשולשים דומים + (13)
.16	$EC^2 = AC \cdot BC = 64$ $EC = 8$ משל ד׳ (1)	(14) + (15) + חישוב.
.17	$EB = 6$	נתון.
.18	$EB^2 + EC^2 = BC^2$ $6^2 + 8^2 = BC^2 = 100$ $BC = 10$	פיתגורס + (12) + (16) + (17)
.19	$EO = \frac{1}{2} BC = 5$	במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר + (1) + (2) + (12) + (18)

5. במעגל שהרדיוס שלו הוא 10 , חסום משולש שווה שוקיים ABC $(AB = BC)$, כמתואר בציור שלפניך.

נתון כי $\sphericalangle ABC = 130^\circ$.

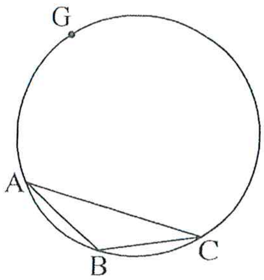
א. חשב את אורך הצלע AC .

ב. חשב את שטח המשולש ABC .

G היא נקודה על המעגל כך ש- GC הוא קוטר במעגל.

הישר GB חותך את הצלע AC בנקודה E .

ג. חשב את אורך הקטע EB .



א. נתון כי $\triangle ABC$ הוא שווה שוקיים וכי זווית הראש $\sphericalangle ABC = 130^\circ$.

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את $\triangle ABC$ הוא 10.

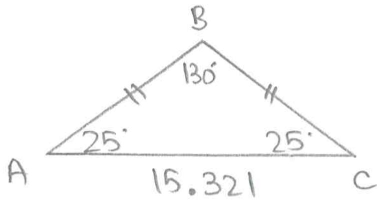
נעזר במשפט הסינוסים במשולש ABC החסום במעגל:

$$\frac{AC}{\sin(130^\circ)} = 2\cdot 10$$

$$AC = 20\cdot\sin(130^\circ)$$

$$\boxed{AC = 15.321}$$

ב. במשולש ABC , נחשב את גודל זוויות הבסיס:



$$\sphericalangle A = \sphericalangle C = \frac{180^\circ - 130^\circ}{2} = 25^\circ$$

$$\boxed{S_{\triangle ABC} = \frac{(15.321)^2\cdot\sin 25\cdot\sin 25}{2\sin(130^\circ)} = 27.364}$$

ג. במשולש ABC נמצא את אורך הצלע BC בעזרת משפט הסינוסים:

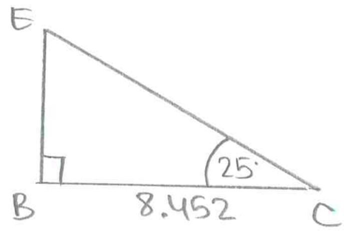
$$\frac{BC}{\sin 25} = \frac{15.321}{\sin 130^\circ}$$

$$BC = 8.452$$

נתון כי GC הוא קוטר במעגל.

זווית היקפית הנשענת על קוטר במעגל הינה בת 90° ולכן: $\measuredangle GBC = 90^\circ$.

E נמצאת על GB ולכן ניתן לומר כי $\measuredangle GBC = \measuredangle EBC = 90^\circ$ (ראה ציור מטה).

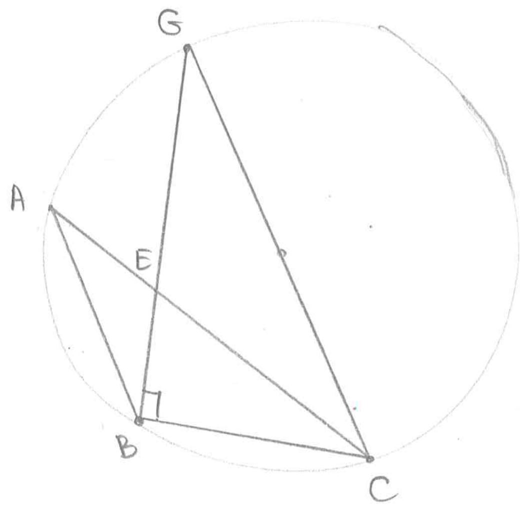


במשולש EBC נחשב את אורך הצלע EB:

$$\tan 25^\circ = \frac{EB}{8.452}$$

$$EB = 8.452 \cdot \tan 25$$

$$\boxed{EB = 3.941}$$



6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + x - 2}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(5) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. האם גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$? אם הוא חותך את האסימפטוטה, מצא את שיעורי נקודת החיתוך.

ד. נתון: לפונקציה $g(x) = f(x) + c$ (c הוא פרמטר) יש אסימפטוטה אופקית $y = 5$. מצא את c . נמק.

א. (1) מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$:

$$x^2+x-2 \neq 0$$

נמצא עבור אילו ערכי x המכנה מתאפס:

$$x^2+x-2=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{לכן, תחום ההגדרה הוא: } x\neq 1,\ x\neq -2.}$

(2) אסימפטוטות אנכיות: $x=1$, $x=-2$.
אסימפטוטה אופקית: $y=3$.

(3) חיתוך הפונקציה עם ציר ה- x : $f(x)=0$:

$$\frac{3x^2}{x^2+x-2}=0$$

$$3x^2=0 \quad /:3$$

$$x^2=0 \quad /\sqrt{\ }$$

$$x=0 \Rightarrow \boxed{(0,0)}$$

חיתוך הפונקציה עם ציר ה- y : נציב $x=0$:

$$f(0) = \frac{3\cdot 0^2}{0^2+0-2} = 0 \Rightarrow (0,0)$$

לסיכום, $\boxed{\text{נק' החיתוך היחידה עם הצירים היא } (0,0)}$

4) מציאת שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ ע"י גזירה והשוואת הנגזרת ל-0:

$$f'(x) = \frac{6x(x^2+x-2) - 3x^2(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^3+6x^2-12x-6x^3-3x^2}{(x^2+x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2-12x}{(x^2+x-2)^2}$$

$f'(x) \stackrel{!}{=} 0$:

$$\frac{3x^2-12x}{(x^2+x-2)^2} = 0$$

$$3x^2-12x=0$$

$$3x(x-4)=0$$

$3x=0$, $x-4=0$

$x=0$, $x=4$

מציאת שיעורי ה-y ע"י הצבה בפונקציה $f(x)$:

$$f(0) = \frac{3\cdot 0^2}{0^2+0-2} = 0 \Rightarrow (0,0)$$

$$f(4) = \frac{3\cdot 4^2}{4^2+4-2} = \frac{8}{3} \Rightarrow \left(4,\frac{8}{3}\right)$$

מציאת סוג הקיצון בעזרת טבלת עליה - ירידה:

x	(-3)	-2	(-1)	0	$(\frac{1}{2})$	1	(2)	4	(5)
y'	+	—	+	0	−	—	−	0	+
y	↗	—	↗	0	↘	—	↘	$\frac{8}{3}$	↗

הצבת ערכי דיגום בנגזרת, לשם מציאת תחומי עליה וירידה.
ניתן להציב את ערכי הביניים במונה הנגזרת בלבד כיוון שמכנה הנגזרת חיובי בהכרח.

$$f'(-3) = \frac{3\cdot(-3)^2-12\cdot(-3)}{+} = (+)$$

$$f'(-1) = \frac{3\cdot(-1)^2-12\cdot(-1)}{+} = (+)$$

$$f'(\tfrac{1}{2}) = \frac{3\cdot(\frac{1}{2})^2-12\cdot(\frac{1}{2})}{+} = (-)$$

$$f'(2) = \frac{3\cdot 2^2-12\cdot 2}{+} = (-)$$

$$f'(5) = \frac{3\cdot 5^2-12\cdot 5}{+} = (+)$$

לסיכום,

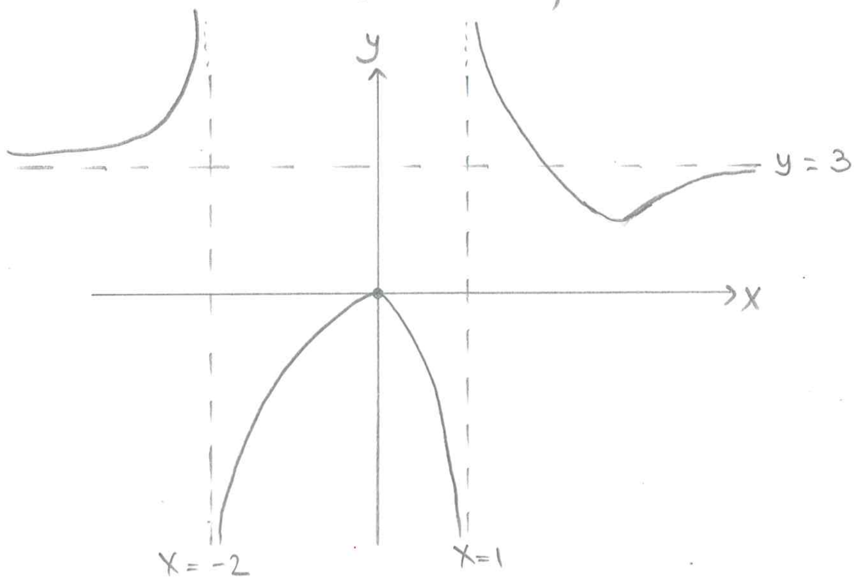
נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הן:
$(0,0)$ מקסימום
$(4,\frac{8}{3})$ מינימום

(5) מציאת תחומי העליה והירידה עפ"י הטבלה מסעיף קודם:

עליה: $x<-2$, $-2<x<0$, $x>4$.

ירידה: $0<x<1$, $1<x<4$.

ב. סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$:



ג. עפ"י השרטוט ניתן לראות כי גרף הפונקציה $f(x)$ אכן חותך את האסימפטוטה האופקית $y=3$.

מציאת שיעורי נקודת החיתוך: $f(x)=3$:

$$\frac{3x^2}{x^2+x-2} = 3 \quad / \cdot (x^2+x-2)$$

$$3x^2 = 3(x^2+x-2)$$

$$3x^2 = 3x^2+3x-6$$

$$3x = 6 \quad /:3$$

$$x=2$$

לפי האסימפטוטה האופקית $y=3$, שיעורי ה-y של כל הנקודות הם 3 ולכן הנקודה היא: $\boxed{(2,3)}$

3. נתון כי לפונקציה $g(x)=f(x)+c$ יש אסימפטוטה אופקית $y=5$.
c הוא פרמטר, המייצג מספר קבוע.
הוספת מספר קבוע חיובי, תעלה את הפונקציה המקורית c יח' מעלה.

בפונקציה $f(x)$ האסימפטוטה האופקית היא $y=3$.
על מנת שהאסימפטוטה האופקית של $g(x)$ תהיה $y=5$,
הפרמטר c צריך להיות שווה ל-2.
על כן - $\boxed{c=2}$

7. נתונה הפונקציה $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+9x+a$ המוגדרת לכל x. a הוא פרמטר.

א. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ y (אם יש צורך, הבע באמצעות a).

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש צורך, הבע באמצעות a), וקבע את סוגן.

ג. מצא את הערך של a שבעבורו נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$ נמצאת על ציר ה־ x. נמק.

הצב $a=18$ במשוואת הפונקציה $f(x)$, וענה על הסעיפים ד-ו.

ד. רשום את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ו. (1) חשב את השטח ברביע השני המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה־ x וציר ה־ y.

(2) A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ y, ו־ B היא נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.

הראה שגרף הפונקציה $f(x)$ מחלק את המשולש ABO לשני שטחים שהיחס ביניהם הוא 1:3

(O — ראשית הצירים).

א. מציאת שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר y:

$$f(0)=-\frac{1}{3}\cdot0^3+9\cdot0+a$$

$$f(0)=a$$

נקודת החיתוך היא: $\boxed{(0,a)}$

ב. מציאת שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, ע"י גזירה והשוואה ל-0

$$f'(x)=-\frac{1}{3}\cdot3x^2+9$$

$$f'(x)=-x^2+9$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -x^2+9=0$$

$$x_1=3,\quad x_2=-3$$

מציאת שיעורי ה-y ע"י הצבה ב-$f(x)$:

$$f(3)=-\frac{1}{3}\cdot3^3+9\cdot3+a$$

$$f(3)=18+a \Rightarrow (3,18+a)$$

$$f(-3) = -\frac{1}{3}\cdot(-3)^3 + 9\cdot(-3) + a$$

$$f(-3) = -18 + a \Rightarrow (-3, -18+a)$$

מציאת סוג הקיצון בעזרת טבלת עליה - ירידה:

x	(-4)	-3	(0)	3	(4)
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↓	$-18+a$	↗	$18+a$	↓

הצבת ערכי בוחן בנגזרת:

$$f'(-4) = -(-4)^2 + 9 = -$$
$$f'(0) = -0^2 + 9 = +$$
$$f'(4) = -4^2 + 9 = -$$

לסיכום, נקודות הקיצון הן:
מינימום $(-3, -18+a)$
מקסימום $(3, 18+a)$

ג. על מנת שנקודת המינימום $(-3, -18+a)$ תימצא על ציר ה-x, שיעור ה-y שלה צריך להיות 0.
נבדוק עבור איזה ערך של a שיעור ה-y של נקודה זו שווה ל-0:

$$-18 + a = 0$$
$$a = 18$$

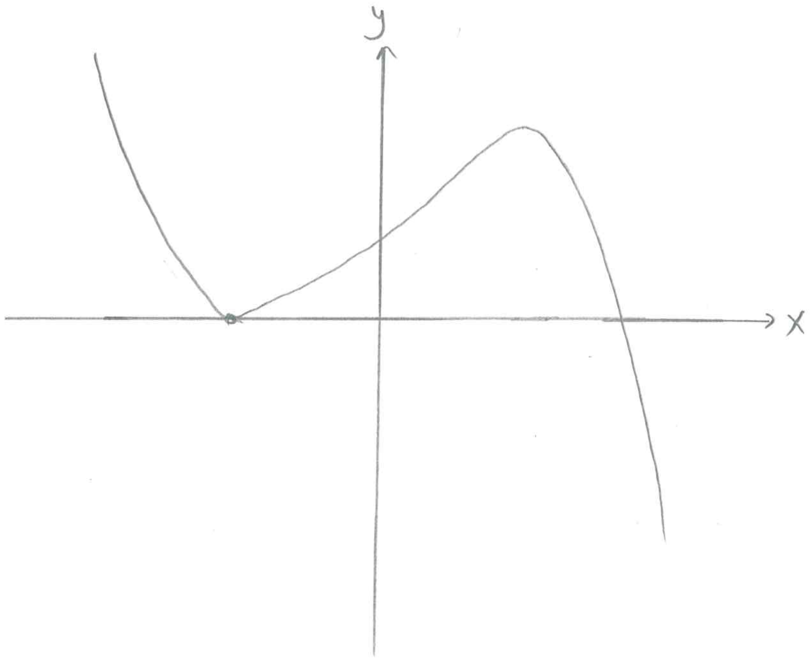
כלומר, כאשר $a=18$, נקודת המינימום נמצאת על ציר ה-x.

את הסעיפים הבאים נחקור עבור $a=18$, זהו: $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+9x+18$.

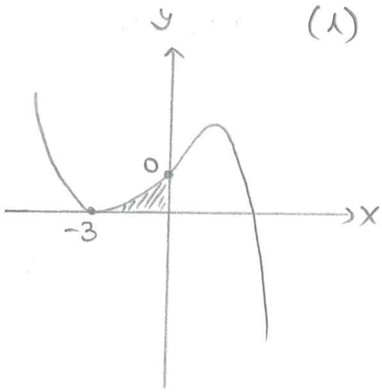
ג. נציב $a=18$ בנקודות הקיצון שמצאנו בסעיף ב:

$\boxed{\begin{array}{l}(3,36) \text{ מקסימום} \\ (-3,0) \text{ מינימום.}\end{array}}$

ה. סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$:



ו. (א)



חישוב השטח המוגבל ברביע השני ע"י גרף הפונקציה, ציר ה-x וציר ה-y (השטח המסומן):

$$\int_{-3}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3+9x+18\right)dx=$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{9\cdot x^2}{2}+18x\Big]_{-3}^{0}$$

$X=0$; $-\frac{1}{3}\cdot\frac{0^4}{4}+\frac{9\cdot 0^2}{2}+18\cdot 0=0$

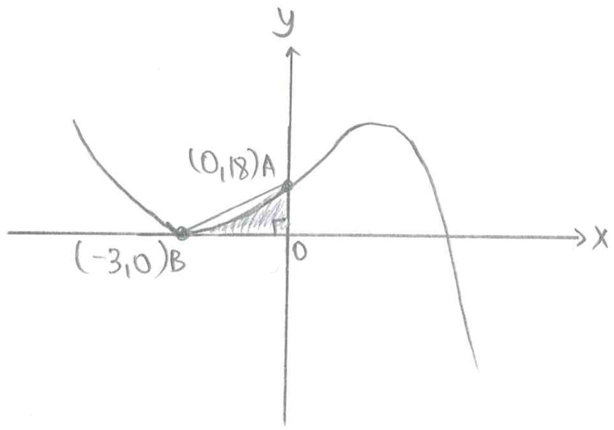
$X=-3$; $-\frac{1}{3}\cdot\frac{(-3)^4}{4}+\frac{9\cdot(-3)^2}{2}+18\cdot(-3)=-20.25$

$$\boxed{S_{\text{מקווקו}} = 0-(-20.25) = 20.25 \text{ יח"ר}}$$

(2) בסעיף א' מצאנו כי נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y היא: $(0,a)$. $a=18$ ולכן, הנקודה היא $(0,18)$.

לכן, הנקודה A היא $(0,18)$.

הנקודה B היא נקודת המינימום של הפונקציה: $(-3,0)$.



בסעיף ו' (1) חישבנו את השטח המקווקו!
על מנת לחשב את השטח הלבן, נחשב את שטח המשולש ישר הזווית ABO ונחסר ממנו את השטח המקווקו:

$$\left.\begin{array}{l} AO = y_A - y_O = 18-0=18 \\ BO = x_O - x_B = 0-(-3)=3 \end{array}\right\} \quad S_{\Delta ABO} = \frac{18\cdot 3}{2} = 27 \text{ יח"ר}$$

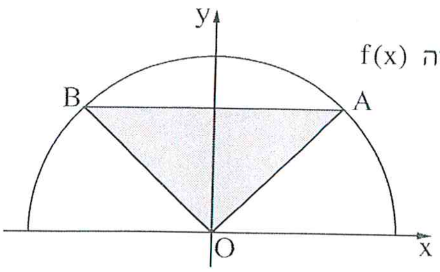
$$S_{\text{לבן}} = S_{\Delta ABO} - S_{\text{מקווקו}}$$

$S_{לבן} = 27 - 20.25 = 6.75$ יח"ר

יחס השטחים המבוקש הוא:

$$\boxed{\frac{S_{לבן}}{S_{מקווקו}} = \frac{6.75}{20.25} = \frac{1}{3}}$$

8. בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ המוגדרת בתחום $-5 \le x \le 5$.



הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון.

דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה־ x . הישר חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה B שברביע השני. הנקודה O היא ראשית הצירים.

נסמן את שיעור ה־ x של הנקודה A ב־ t .

א. (1) הבע באמצעות t את שיעורי הנקודה B .

(2) הבע באמצעות t את שטח המשולש ABO .

ב. מצא את t שבעבורו שטח המשולש ABO הוא מקסימלי.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

א. (1) נסמן: $x_A = t$.

A היא נקודה על $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ ולכן נסמן את שיעור ה-y שלה מעצם הצבת $x=t$:

$f(t) = \sqrt{25-t^2}$.

A ו- B נמצאות על ישר המקביל לציר ה-x . לכן לשתי הנקודות יש את אותו שיעור y . אם כך - $y_B=\sqrt{25-t^2}$.

הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית כיוון ש- x מופיע בחזקת 2, אשר מתקיים: $f(x)=f(-x)$. היות וזו פונקציה זוגית נסיק כי לכל 2 נקודות עם שיעור y זהה, יהיו שיעורי x נגדיים. כלומר: $x_B = -x_A = -t$.

לסיכום, שיעורי הנקודה B הם: $\boxed{(-t, \sqrt{25-t^2})}$

(2) חישוב שטח המשולש ABO לפי הנוסחה: $\frac{AB \cdot y_A}{2}$

$AB = x_A - x_B = t-(-t) = 2t$

$y_A = \sqrt{25-t^2}$

$$S_{\Delta ABO} = \frac{\cancel{2}t\cdot\sqrt{25-t^2}}{\cancel{2}} = \boxed{t\cdot\sqrt{25-t^2}}$$

ב. על מנת למצוא את t עבורו שטח המשולש ABO הוא מקסימלי, נמצא את הפונקציה המתארת את שטח המשולש ונשווה אותה ל-0.

$$f(t) = t\cdot\sqrt{25-t^2}$$

$$f'(t) = 1\cdot\sqrt{25-t^2} + t\cdot\frac{(-\cancel{2}t)}{\cancel{2}\sqrt{25-t^2}}$$

$$f'(t) = \sqrt{25-t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{25-t^2}}$$

$$f'(t) = 0 \;:$$

$$\sqrt{25-t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{25-t^2}} = 0 \quad / \cdot \sqrt{25-t^2}$$

$$25-t^2-t^2=0$$

$$2t^2 = 25 \quad /:2$$

$$t^2 = 12.5 \quad /\sqrt{\ }$$

$$\boxed{t_1 = \sqrt{12.5} = 3.535} \qquad t_2 = \cancel{-\sqrt{12.5}}$$

נפסל כי נתון
שהנקודה A
ברביע ה- I.
$(t>0)$

נבדוק עבור $t=\sqrt{12.5}$ את סוג הקיצון בעזרת טבלת עליה-ירידה:

t	(3)	$\sqrt{12.5}$	(4)
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$

נציב ערכי דיגום בנגזרת:

$$f'(3)=\sqrt{25-3^2}-\frac{3^2}{\sqrt{25-3^2}}=\oplus$$

$$f'(4)=\sqrt{25-4^2}-\frac{4^2}{\sqrt{25-4^2}}=\ominus$$

עפ"י הטבלה, הוכחנו כי עבור $t=\sqrt{12.5}$ שטח המשולש ABO הוא מקסימלי.