

מתמטיקה 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

| | | | | | | |
|-----------|---|---|---|------|---|------------|
| פרק ראשון | — | אלגברה והסתברות | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| פרק שני | — | גאומטריה וטריגונומטריה במישור | — | 20×1 | — | 20 נקודות |
| פרק שלישי | — | חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| סה"כ | — | | — | | — | 100 נקודות |

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

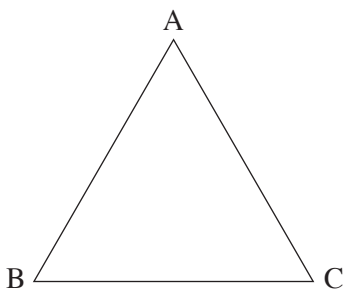
שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. בצויר שלפניך מתואר מסלול לרכיבה באופניים בצורת משולש שווה צלעות ABC , שאורך צלעו a מטר.



ביום מסוים יצאו שני רוכבי אופניים באותו הזמן מן הנקודה A לכיוון הנקודה B . הם רכבו לאותו הכיוון לאורך המסלול המשולש.

כל אחד מהם רכב במהירות קבועה. המהירות של רוכב A גדולה ב-2 מטרים לשנייה מן המהירות של רוכב B .

כאשר הגיע רוכב A אל הנקודה A לאחר שהשלים פעמיים את המסלול המשולש, הגיע רוכב B אל הנקודה B בפעם השנייה.

א. מצא את המהירות של כל אחד מרוכבי האופניים.

ב. באיזו נקודה על המשולש יהיה רוכב B , כאשר יגיע רוכב A אל הנקודה A אחרי שהשלים 5 פעמים את המסלול המשולש?

כאשר הגיע רוכב A אל הנקודה A אחרי שהשלים 5 פעמים את המסלול, הוא הסתובב והחל לרכוב לכיוון הנגדי — מן הנקודה A לכיוון הנקודה C — בלי לשנות את מהירותו.

רוכב B המשיך לרכוב בכיוון הנסיעה המקורי, בלי לשנות את מהירותו. הרוכבים נפגשו בנקודה M .

ג. מצא על איזו צלע של המשולש נמצאת הנקודה M , ומצא באיזה יחס הנקודה M מחלקת את הצלע שמצאת.

למוחרת שוב יצאו הרוכבים מן הנקודה A , רכבו לכיוון הנקודה B והמשיכו לרכוב במסלול המשולש, כל אחד מהם רכב באותה המהירות שרכב ביום שלפני כן. רוכב A חלף על פני רוכב B בפעם הראשונה 6 דקות אחרי שיצאו לדרך.

ד. מצא את היקף המשולש. נמק את תשובתך.

.2

נתונה סדרה a_n המקיימת לכל n את הכלל: $a_{n+1} + a_n = 6n + 5$

א. הוכח כי מתקיים $a_{n+2} = a_n + c$ (c הוא מספר קבוע), ומצא את c .

ב. כתוב דוגמה לסדרה a_n המקיימת את הכלל, והיא אינה סדרה חשבונית (כתוב לפחות 4 איברים ראשונים בסדרה).

נתון כי הסדרה a_n כולה היא חשבונית.

ג. חשב את a_1 .

בנו סדרה חדשה בת $2n + 1$ איברים:

$$a_1 - 1, a_2 - 2, a_3 - 3, \dots, a_{2n+1} - (2n + 1)$$

האיבר האמצעי בסדרה החדשה הוא 43.

ד. חשב את סכום הסדרה החדשה.

.3

בקופסה יש 12 כדורים כחולים, 20 כדורים אדומים ו-8 כדורים צהובים.

על 28 מן הכדורים רשומה הספרה 1, ועל השאר רשומה הספרה 0.

$\frac{1}{4}$ מן הכדורים שרשומה עליהם הספרה 1 הם צהובים.

מספר הכדורים האדומים שרשומה עליהם הספרה 1 גדול פי 4 ממספר הכדורים הכחולים שרשומה עליהם הספרה 0.

דני מוציא באקראי כדור מן הקופסה.

א. מהי ההסתברות שהכדור שהוציא דני הוא כדור כחול ושרשומה עליו הספרה 1?

ב. אם ידוע שדני הוציא באקראי כדור כחול אז כדור שרשומה עליו הספרה 1, מהי ההסתברות שהוא הוציא כדור שרשומה עליו הספרה 0?

דני החזיר את הכדור לקופסה, וכעת הוא משחק במשחק: הוא מוציא באקראי כדור מן הקופסה, רושם לעצמו את הספרה שעליו ומחזיר את הכדור לקופסה.

בכל פעם שהוא מוציא כדור שרשומה עליו הספרה 1 הוא צובר נקודה.

הוא יפסיק לשחק כאשר הוא יצבור 5 נקודות.

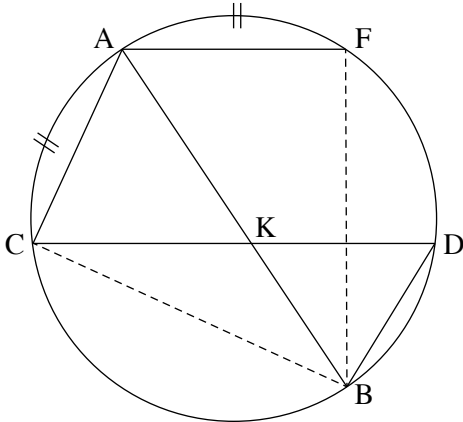
ג. מהי ההסתברות שדני יצבור 5 נקודות אחרי 6 פעמים בדיוק?

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. AB הוא קוטר במעגל. CD ו-AF הם שני מיתרים במעגל המקבילים זה לזה.



AB ו-CD נחתכים בנקודה K (ראה ציור).

נתון כי $\widehat{CA} = \widehat{AF}$ (הקשתות המסומנות בציור).

א. הוכח כי $\angle FAB = \angle CAB$ (1)

ב. הוכח כי $BK = BD$ (2)

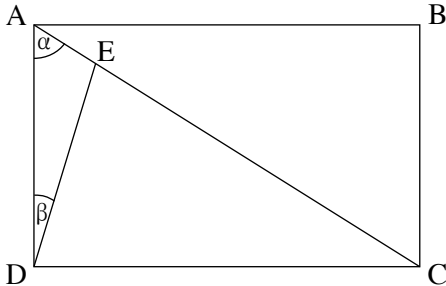
ג. הוכח כי המרובע AFKC הוא מעוין.

ד. נתון גם כי $BD \cdot AB = CD \cdot AC$

ה. הוכח כי $\triangle BDC \sim \triangle CAB$ (1)

ו. הוכח כי CD הוא קוטר במעגל. (2)

5. נתון מלבן ABCD. הנקודה E נמצאת על האלכסון AC (ראה ציור).



נתון כי $\angle DAC = \alpha$

$\angle ADE = \beta$

R_1 הוא רדיוס המעגל החוסם את המלבן ABCD.

R_2 הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.

א. הבע את היחס $\frac{R_1}{R_2}$ באמצעות α ו- β .

ב. הראה כי כאשר $\alpha = \beta$ מתקיים $\frac{R_1}{R_2} < 2$.

ג. נתון כי $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 15^\circ$.

(1) הראה כי $\triangle DEC$ הוא משולש שווה שוקיים.

(2) הבע את BE^2 באמצעות R_1 .

**פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות
ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)**

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = a \cdot \cos 2x + \sin^2 x$ המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$. a הוא פרמטר.

א. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? אן לא אחת מהן? נמק.

ב. מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (הבע באמצעות a אם צריך), אם נתון כי הפונקציה אינה

קבועה? קבע את סוגן בהתאם לערך של a (התייחס לשתי האפשרויות עבור a).

ג. מצא את הערך של a שעבורו הפונקציה $f(x)$ היא קבועה. נמק.

נתון: $a > 1$.

ד. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ה. נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה- x שווה ל-12. מצא את a .

7. נתון מעגל ובו קוטר AB . רדיוס המעגל הוא 10. הנקודה P נמצאת על הקוטר AB בין מרכז המעגל ובין הנקודה B .

דרך הנקודה P מעבירים אנך ל- AB החותך את המעגל בנקודות C ו- D .

מצא את השטח המקסימלי של המשולש ACD .

8. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + bx - c}{x^2 - 4}$. b ו- c הם פרמטרים.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ב. מצא את b .

נתון: לגרף הפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x בין שתי האסימפטוטות האנכיות שלה.

ג. מצא את תחום הערכים של c .

ד. (1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה (הבע באמצעות c אם צריך).

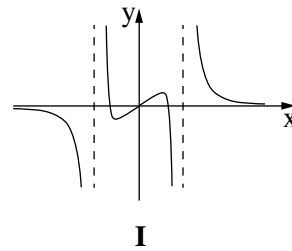
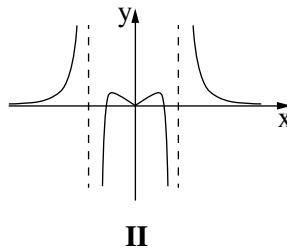
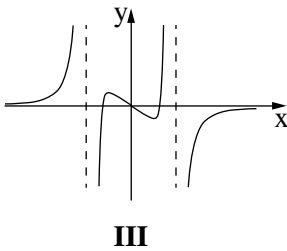
(2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$, וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרות הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$.

לפניך גרפים III-I.

(1) איזה מן הגרפים, III-I, הוא גרף הפונקציה $g(x)$? נמק.

(2) הבע באמצעות c את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .



בהצלחה!