

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשע"ט, 2019 מועד ב', שאלון: 35482

מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

נחידע על פסיכומטרי
ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





1. נתונות שתי סדרות חשבוניות, a_n ו- b_n .

נתון: $a_1 = b_1$.

הפרש הסדרה a_n הוא d , והפרש הסדרה b_n הוא $d+1$.

נתון: a_4 גדול ב-2 מ- b_3 .

א. מצא את d .

ב. הראה כי: $b_n = a_n + n - 1$.

בכל אחת מן הסדרות a_n ו- b_n יש n איברים.

ג. הבע באמצעות n את ההפרש בין סכום כל האיברים בסדרה b_n ובין סכום כל האיברים בסדרה a_n .

נתון: ההפרש בין סכום כל האיברים בסדרה b_n ובין סכום כל האיברים בסדרה a_n הוא 780.

סכום כל האיברים בסדרה a_n הוא 3,040.

ד. מצא את a_1 .

10. (נתון: $a_1 = b_1$, הפרש הסדרה a_n הוא d , הפרש הסדרה b_n הוא $d+1$.)

$$a_1 + 3d = b_1 + 2(d+1) + 2 \iff a_4 = b_3 + 2$$

$$a_1 + 3d = a_1 + 2d + 2 + 2$$

$$\boxed{d=4}$$

11. רציף הנתונים ולפי סדרה b_n , (אז a_n הוא הפרש הסדרה b_n), $d+1 = 4+1 = 5$.

$$b_n = b_1 + (n-1) \cdot 5$$

$$\boxed{b_n = a_1 + 5n - 5}$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 4$$

$$\boxed{a_n = a_1 + 4n - 4}$$

$$b_n - a_n =$$

$$a_1 + 5n - 5 - (a_1 + 4n - 4) =$$

$$\boxed{n-1}$$

$$b_n - a_n = n - 1$$

$$\boxed{b_n = a_n + n - 1}$$



א. הקפת סבוב n האוקטונים בסדרה a_n :

$$S_n = [2a_1 + (n-1) \cdot 4] \frac{n}{2}$$

$$S_n = (a_1 + 2(n-1))n$$

$$S_n = a_1 n + 2n^2 - 2n$$

הקפת סבוב n האוקטונים בסדרה b_n :

$$S_n = [2b_1 + (n-1) \cdot 5] \frac{n}{2}$$

$$S_n = [b_1 + \frac{5}{2}(n-1)]n$$

$$S_n = b_1 n + \frac{5}{2}n^2 - \frac{5}{2}n$$

דבי הנטן $a_1 = b_1$:

$$S_n = a_1 n + 2.5n^2 - 2.5n$$

$$S_n(b_n) - S_n(a_n) =$$

$$a_1 n + 2.5n^2 - 2.5n - (a_1 n + 2n^2 - 2n)$$

$$0.5n^2 - 0.5n$$

$$0.5n^2 - 0.5n = 780$$

$$0.5n^2 - 0.5n - 780 = 0$$

$$(a=0.5, b=-0.5, c=-780)$$

$$n_1 = 40$$

$$n_2 = \cancel{39} \leftarrow \begin{matrix} n \\ \text{מספר} \\ \text{דבי} \end{matrix} C$$

ג. נתון: $S_n(b_n) - S_n(a_n) = 780 \Leftrightarrow$



$$S_n(a_n) = 3040 \quad \text{נמון:}$$

$$n = 40 \quad \text{מספר איברי}$$

$$\left[2a_1 + (40-1) \cdot 4 \right] \frac{40}{2} = 3040$$

$$2a_1 + 156 = 152$$

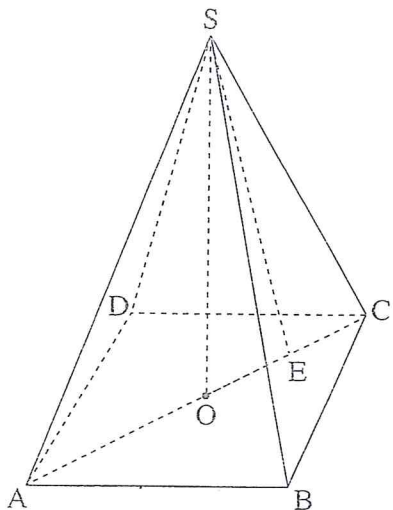
$$2a_1 = -4$$

$$\boxed{a_1 = -2}$$

נמידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
 אל תתפשר עליה.



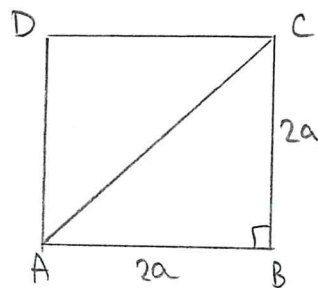


2. נתונה פירמידה ישרה $SABCD$ שבסיסה הוא ריבוע. נתון כי שטח בסיס הפירמידה הוא $4a^2$, הוא פרמטר חיובי.
- הבע באמצעות a את אורך אלכסון הבסיס.
 - נתון כי הזווית שבין מקצוע צדדי ובין בסיס הפירמידה היא 67° .
 - הבע באמצעות a את גובה הפירמידה, SO .
 - נתון כי נפח הפירמידה הוא 15.
- ג. (1) חשב את a .
- (2) הנקודה E היא אמצע הקטע OC .
- חשב את שטח המשולש ASE .
- בתשובותיך השאר 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית.
7. חיברו את אמצעי צלעות הבסיס לקודקוד הפירמידה, S , כך שנוצרה פירמידה ישרה חדשה. חשב את נפח הפירמידה החדשה.

א. בסיום הפירוטופה הינן ריבוע.
(סמן את אורך הריבוע x - א.
שטח הריבוע $= x^2$.

(נתן כי שטח בסיום הפירוטופה $4a^2$ וזן $x^2 = 4a^2 / \sqrt{2}$)

$$\boxed{x = 2a}$$



(קוד x אורך אלכסון הבסיס x אשפס פיתגורס:

$$(2a)^2 + (2a)^2 = AC^2$$

$$4a^2 + 4a^2 = AC^2$$

$$8a^2 = AC^2 / \sqrt{2}$$

$$\boxed{AC = a\sqrt{8}}$$



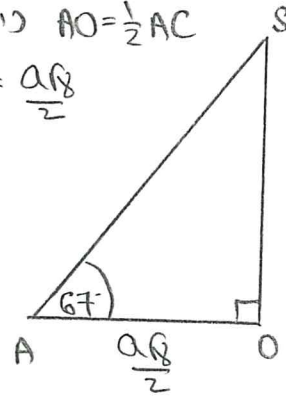
ק. נתון שטרינגון מקביל צדדי גבין בסיס הפירמידה : $\angle SAO = 67^\circ$
 $AO = \frac{1}{2}AC$ כיוון שאוקה הפירמידה מאיך או ארט אנכסון הבסיס.

$$\tan 67^\circ = \frac{SO}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

$$SO = \tan 67^\circ \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{SO = 3.332a}$$

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



ג. (1) נתון כי נפח הפירמידה הוא 15 : $\frac{\text{שטח בסיס} \times \text{גובה הפירמידה}}{3}$

$$\frac{3.332a \cdot 4a^2}{3} = 15$$

$$a^3 = 3.376 \quad \sqrt[3]{\quad}$$

$$\boxed{a = 1.5}$$

$$OC = AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$a = 1.5$$

$$\boxed{OE = \frac{1}{2}OC = 1.061} \quad \Leftarrow \text{כפי הנחש} \quad \boxed{OC = AO = 2.122} \quad \text{נניח}$$

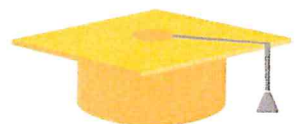
: AE נמצאת אורך הצלע
 $AE = AO + OE = 2.122 + 1.061$

$$\boxed{AE = 3.183}$$

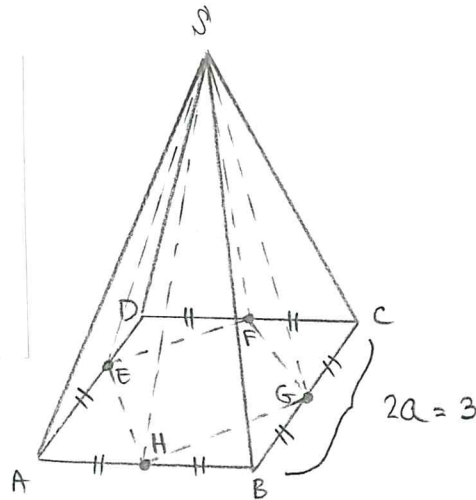
$$S_{\triangle ASE} = \frac{AE \cdot SO}{2}$$

$$SO = 3.332 \cdot 1.5 = 4.998$$

$$\boxed{S_{\triangle ASE} = \frac{3.183 \cdot 4.998}{2} = 7.95}$$



3. נשמחכיון את אמצעי הצלעות של ריבוע, מתקבל ריבוע חדש.
 וכן, הפורמולה החגישה (הקסוס) היא ריבוע.
 ספורמולה זו היא זקנה הפורמולה המקומית ($S_0 = 4.998$).
 זמן, נחשב את שטח הקסוס החגש שנוצר ולכן נח את ארבעת הפורמולה.



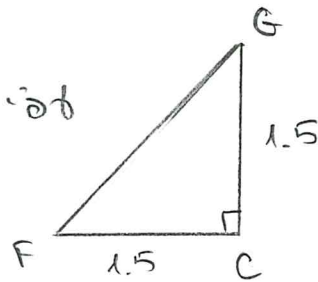
H, G, F, E אמצעי הצלעות AB, BC, CD, DA (התאמה נלמ):

$$CF = CG = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1.5$$

לפי משפט פיתגורס:

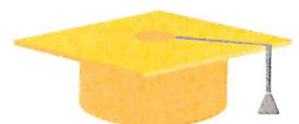
$$1.5^2 + 1.5^2 = FG^2$$

$$\boxed{FG = \frac{3\sqrt{2}}{2}}$$



$$S_{\text{קסוס}} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

$$V_{\text{פורמולה}} = \frac{\frac{9}{2} \cdot 4.998}{3} = \boxed{7.497}$$



3. נתונה הפונקציה $f(x) = 2 - \cos^2 x$, בתחום $-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$.
- א. מצא את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון, וקבע את סוגן.
 - ב. האם יש לגרף הפונקציה $f(x)$ נקודת תיתוך עם ציר ה- x ? נמק.
 - ג. האם הפונקציה היא זוגית או אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמק.
 - ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 - ה. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + c$, c הוא פרמטר. מצא בעבור אילו ערכים של c , גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- x (מצא את שני הערכים האפשריים).

1c. $f'(x) = 0 - 2\cos x \cdot (-\sin x)$

$f'(x) = 2\cos x \sin x$

$f'(x) = \sin 2x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$

$2x = \pi k \quad | :2$

$x = \frac{\pi}{2} k$

אציאת שיטוי ה- y :

k	x	
0	0	✓ $\Rightarrow f(0) = 2 - \cos^2(0) = 1$
1	$\frac{\pi}{2}$	✓ $f(\frac{\pi}{2}) = 2 - \cos^2(\frac{\pi}{2}) = 2$
2	π	$f(-\frac{\pi}{2}) = 2 - \cos^2(-\frac{\pi}{2}) = 2$
-1	$-\frac{\pi}{2}$	✓

$(0, 1), (\frac{\pi}{2}, 2), (-\frac{\pi}{2}, 2)$

אציאת שיטוי ה- y של f בקיצון סרצוות:

$f(-\frac{2\pi}{3}) = 2 - \cos^2(-\frac{2\pi}{3}) = \frac{7}{4}$

$f(\frac{2\pi}{3}) = 2 - \cos^2(\frac{2\pi}{3}) = \frac{7}{4}$

$(-\frac{2\pi}{3}, \frac{7}{4}), (\frac{2\pi}{3}, \frac{7}{4})$



אמצעות טבלת סימנים וקצוות:

x	$-\frac{2\pi}{3}$	$(-\frac{7\pi}{12})$	$-\frac{\pi}{2}$	$(-\frac{\pi}{4})$	0	$(\frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{7\pi}{12})$	$\frac{2\pi}{3}$
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y	$\frac{7}{4}$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$\frac{7}{4}$

הצגת טבלת סימנים וקצוות:

$$f'(-\frac{7\pi}{12}) = \sin(2 \cdot (-\frac{7\pi}{12})) = \oplus$$

$$f'(-\frac{\pi}{4}) = \sin(2 \cdot (-\frac{\pi}{4})) = \ominus$$

$$f'(\frac{\pi}{4}) = \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = \oplus$$

$$f'(\frac{7\pi}{12}) = \sin(2 \cdot \frac{7\pi}{12}) = \ominus$$

אסימטות סגול א':
נק' פריטון יין -

$$\min(-\frac{2\pi}{3}, \frac{7}{4})$$

$$\max(-\frac{\pi}{2}, 2)$$

$$\min(0, 1)$$

$$\max(\frac{\pi}{2}, 2)$$

$$\min(\frac{2\pi}{3}, \frac{7}{4})$$



ג. חיתוך הפונקציה עם ציר x - נציבים: $f(x) = 0$

$$2 - \cos^2 x = 0$$

$$2 = \cos^2 x \quad / \sqrt{\quad}$$

$$\cos x = \sqrt{2}$$

אין פתרון

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\cos x = -\sqrt{2}$$

אין פתרון

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

אכן, אין חיתוך עם ציר ה-x

ד. נוכח שהפונקציה זוגית על ידי מתקן הפלא הקסום: $f(t) = f(-t)$

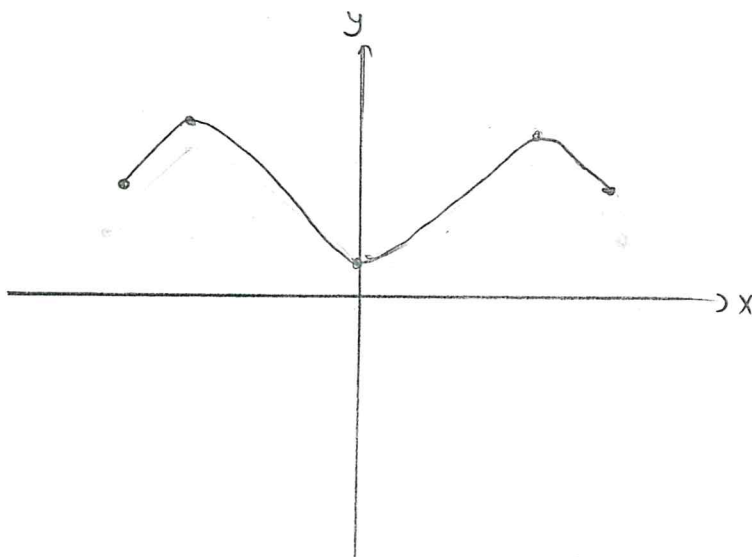
$$f(t) = 2 - \cos^2(t)$$

$$f(-t) = 2 - \cos^2(-t)$$

$$\xrightarrow{\text{דפי הצהרה}} \left[2 - \cos^2(t) \right]$$

$\cos(x) = \cos(-x)$

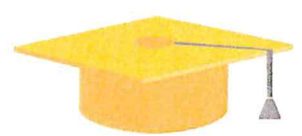
הראינו כי: $f(t) = f(-t)$ ולכן הפונקציה היא זוגית.



ט. שטחים:

נחידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



ה. נתון: $g(x) = f(x) + c$

קרוספת מספר קטן קטן קטן $f(x)$ נוצרת תוצה של הפונקציה
 גלוי מלה (כונש סכ) או לפי מלה כונש c שלתי.

$g(x)$ תשיק זכר ה- x קטנות שבהן $g'(x) = 0$. (קטנה אזנה טענות
 שיעור x זהה ואזו שלדוקן $f(x) = 0$.

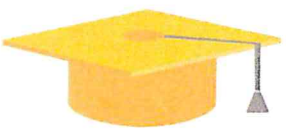
קיימות 3 נקודות בהן $f'(x) = 0$ ופא: $(0, 0)$, $(-\frac{\pi}{2}, 2)$, $(\frac{\pi}{2}, 2)$

לא מנת ששיקו זכר ה- x , שיעורי ה- y שלה נ צייק אהיו- 0 , ונתן;

אופציה א' : $c = -1$
 אופציה ב' : $c = -2$

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
 אל תתפשר עליה.



4. נתונות הפונקציות: $f(x) = e^{2x-1} - 1$, $g(x) = e^{2-x} - 1$.
- $f(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות לכל x .
- א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
 (2) הוכח כי הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x .
 (3) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.
- ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.
 (2) הוכח כי הפונקציה $g(x)$ יורדת לכל x .
 (3) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$.
- ג. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ ושל גרף הפונקציה $g(x)$.
- ד. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.
- ה. חשב את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x . תוכל להשאיר e בתשובתך או לדייק עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

א. 1. חיתוך עם ציר x : $y=0$

$$e^{2x-1} - 1 = 0 \quad / +1$$

$$e^{2x-1} = 1$$

$$e^{2x-1} = e^0$$

$$2x-1 = 0 \quad / +1$$

$$2x = 1 \quad / :2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

חיתוך עם ציר y : $x=0$

$$e^{2 \cdot 0 - 1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 = -0.632$$

$$(0, -0.632)$$



$$f'(x) = 2e^{2x-1} > 0$$

x נכנס

2. e בלב חזקה, ניתן גרביטורה חיובית, ולכן:

x	y
10	178482300
100	2.66×10^{86}

$y \rightarrow \infty$
טווח אינסופי
כאשר $x \rightarrow \infty$

x	y
-10	-0.99
-100	-1

$y \rightarrow -1$
טווח אינסופי
כאשר $x \rightarrow -\infty$

3.

ה. 1. חיתוך עם ציר x: $y=0$

$$e^{2-x} - 1 = 0 \quad | +1$$

$$e^{2-x} = 1$$

$$e^{2-x} = e^0$$

$$2-x = 0 \quad | +x$$

$$x = 2$$

$$(2, 0)$$

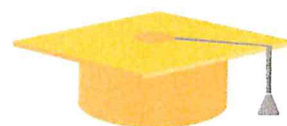
חיתוך עם ציר y: $x=0$

$$e^{2-0} - 1 = e^2 - 1 = 6.39$$

$$(0, 6.39)$$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



$$g'(x) = -e^{2-x} < 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

2.

ע בכל חזקה, נעמך גרנטה חיובי -
לפס טקלם טניס, הגנטה שלטני, ולכין:

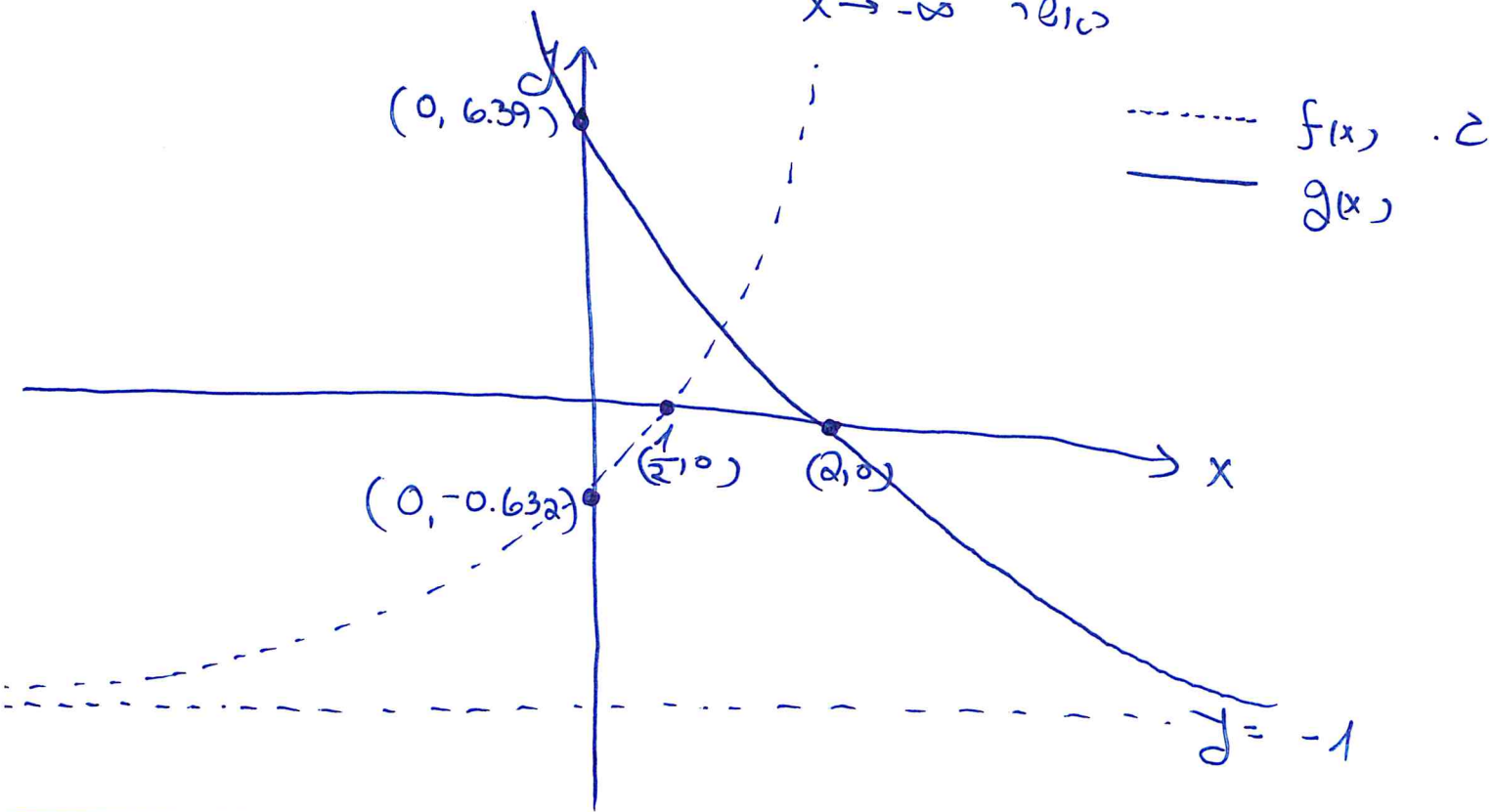
x	y
10	-0.99
100	-1

$y \rightarrow -1$
אין טולקלי -
טולסר $x \rightarrow \infty$

x	y
-10	162753.79
-100	1.48×10^{44}

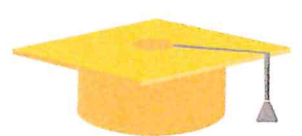
$y \rightarrow \infty$
אין טולקלי -
טולסר $x \rightarrow -\infty$

3.



למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



$$e^{2x-1} - 1 = e^{2-x} - 1 \quad | +1$$

.3

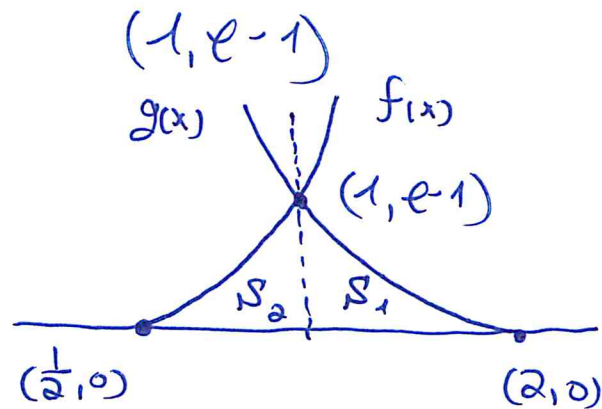
$$e^{2x-1} = e^{2-x}$$

$$2x-1 = 2-x \quad | +x, +1$$

$$3x = 3 \quad | :3$$

$$x = 1$$

$$g(1) = e^{2-1} - 1 = e - 1$$



.4

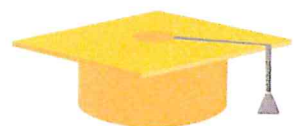
$$S_1 = \int_1^2 [e^{2-x} - 1] dx = \left[-e^{2-x} - x \right]_1^2 = (-1-2) - (-e-1) = e-2$$

$$S_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 [e^{2x-1} - 1] dx = \left[\frac{e^{2x-1}}{2} - x \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \left(\frac{e}{2} - 1 \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{e}{2} - 1$$

$$S_1 + S_2 = e-2 + \frac{e}{2} - 1 = \frac{3}{2}e - 3 = 1.077 \approx e^{\frac{1}{2}}$$

נחידע עכ פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
 אל תתפשר עליה.





5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1 + \ln x}{ax}$, $a > 0$ הוא פרמטר.
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 - מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 - מצא את שיעור הישר x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.
 - רשום את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- נתון כי שיעור הישר y של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא $\frac{1}{4}$.
- מצא את a .
 - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- נתונה הפונקציה $g(x) = -f(x)$.
- רשום את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגה. נמק את תשובתך.

פתרון:

א. $0 < x < \infty$

ב. $ax \neq 0 \rightarrow x \neq 0$

ג. $x > 0$

ד. נקודות החיתוך עם הצירים: $x = 0$ ו- $x = 1$

ה. $1 + \ln x = 0$

$\ln x = -1$

$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

ו. נקודת הקיצון היא $x = \frac{1}{e}$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



ד. נמצא את הפונקציה:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot a x - a \cdot (1 + \ln x)}{(ax)^2} = \frac{-a \ln x}{(ax)^2}$$

נשווה האיבר הנמוך: $-a \ln x = 0$

$$\ln x = 0$$

$$x = 1$$

נדגים את סוג הנדירות:

x	0	1/2	1	2
f'(x)	/	+	0	-
f(x)	/	↗	.	↘

בפינה $x=1$ נהגה (נהגה) נקודת מרובע

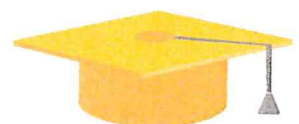
3. ע"פ הטבלה:

תחום עליה: $0 < x < 1$
תחום ירידה: $x > 1$

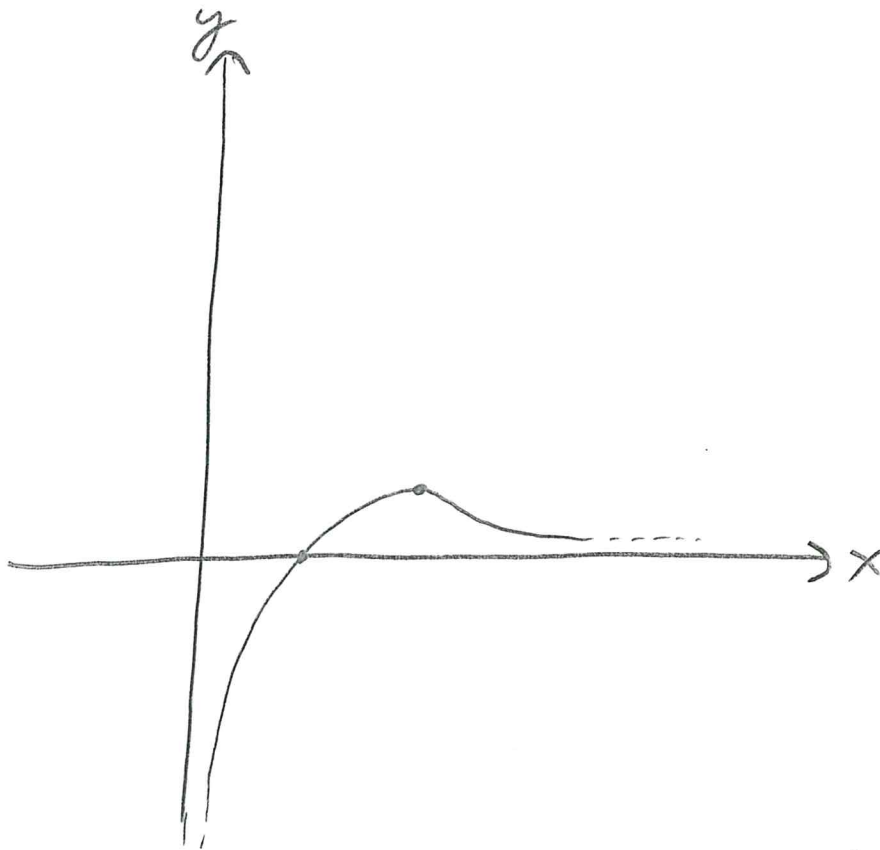
ה. (1)

נתון כי שיעור הנג של נקודת המרובע הוא $\frac{1}{4}$. נרצה $x=1$ בפונקציה ונשלוף:

$$\frac{1}{4} = \frac{1 + \ln 1}{a \cdot 1} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{a} \Rightarrow \boxed{a=4}$$



(2)



$$g(x) = -f(x) \quad .1$$

$$g'(x) = -f'(x)$$

לפיכך, נקודת המקסימום של $g(x)$ היא נקודת המינימום של $f(x)$.
 נקודת המקסימום של $f(x)$ היא נקודת המינימום של $g(x)$.
 נקודת המקסימום של $f(x)$ היא נקודת המינימום של $g(x)$.

$(1, -\frac{1}{4})$

