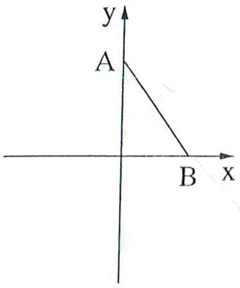
פתרון הבחינה
במתמטיקה

קיץ תשע"ט, 2019, שאלון: 35582

מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"



1. אורך הקטע AB הוא 4.

נתון: הנקודה A נמצאת על ציר ה־ y, והנקודה B נמצאת על ציר ה־ x (ראה ציור).

הנקודה M היא אמצע הקטע AB.

א. מצא את המשוואה של המקום הגאומטרי של כל הנקודות M שנבנו כך, וזהה את המקום הגאומטרי הזה.

נתון: הנקודה L נמצאת על הקטע AB כך ש־ $\frac{AL}{LB} = t$. $t > 0$ הוא פרמטר.

ב. הבע באמצעות t את המשוואה של המקום הגאומטרי של כל הנקודות L שנבנו כך, וזהה את המקום הגאומטרי הזה.

ג. בעבור איזה ערך של t המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף ב מתלכד עם המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א? נמק.

ד. האם קיים $t > 0$ שבעבורו המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף ב חותך את ציר ה־ x בנקודה $(5, 0)$? נמק.

1 א.

נציר: $A(0,a)$

$B(b,0)$

$M(x,y)$

מכיוון ש M היא אמצע הקטע AB מתקיים:

$\frac{a+0}{2} = y$ $\qquad$ $\frac{0+b}{2} = x$

$a = 2y$ $\qquad$ $b = 2x$

$B(2x,0)$ $\qquad$ $A(0,2y)$

AB=4 ולכן: $4 = \sqrt{(2x-0)^2+(0-2y)^2}$

לאחר העלאה בריבוע: $16 = 4x^2+4y^2$ $\quad /:4$

$\boxed{x^2+y^2=4}$

מעגל קנוני ברדיוס 2.

דרך נוספת:

נגדיר (כ-O) ראשית הצירים:

OM תיכון (M אמצע AB)

במשולש ישר זווית (AOB) התיכון ליתר שווה למחציתו ולכן $OM=2$

מכאן שהמרחק מנקודה M לראשית הצירים הוא תמיד 2 ולכן נקודה M

צריכה להימצא על המעגל

$$\boxed{x^2+y^2=4}$$

ב. נגדיר $L(x,y)$

ומכיוון ש $\frac{AL}{LB}=t$ מתקיים: $\frac{b\cdot t+0\cdot 1}{t+1}=x$; $\frac{0\cdot t+a\cdot 1}{t+1}=y$

$b=\frac{x(t+1)}{t}$ $\qquad$ $a=y(t+1)$

ולכן: $AB=4$

$$4=\sqrt{\left(\frac{x(t+1)}{t}-0\right)^2+\left(0-y(t+1)\right)^2}$$

$$16=\frac{x^2(t+1)^2}{t^2}+y^2(t+1)^2 \quad |:16$$

$$\boxed{\frac{(t+1)^2}{16t^2}\cdot x^2+\frac{(t+1)^2}{16}y^2=1}$$

אליפסה קנונית.

ג. עמ' שהמקומות הגיאומטריים יתלכדו L צריכה להימצא באמצע הקטע

AB מכאן נובע $AL=LB$ ולכן $\frac{AL}{LB}=1$ לפי הנתון $\frac{AL}{LB}=t$

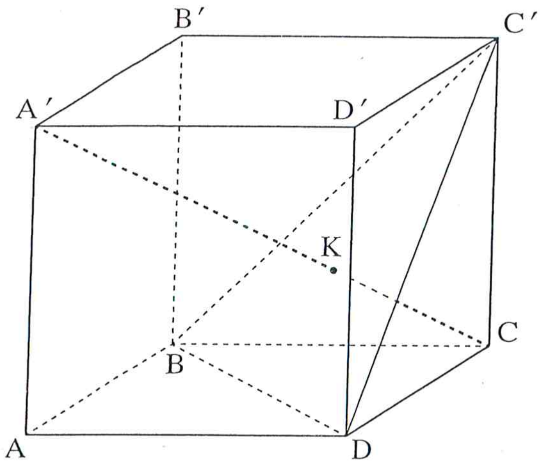
מכאן לפי כלל המעבר $\boxed{t=1}$

ד. עפ"י משוואת האליפסה החיתוך עם ציר ה-x ימצא ב: $\left(\pm\frac{4t}{t+1},0\right)$

ומכיוון ש $(t>0)$

ולכן נבדוק האם: $\frac{4t}{t+1}=5$

$4t=5t+5 \rightarrow t=-5$ | אין t חיובי עבורו מתקיים חיתוך עם (



.2 $ABCDA'B'C'D'$ היא קובייה שאורך צלעה הוא 6 (ראה ציור).

הנקודה B נמצאת על ראשית הצירים.

א. חשב את גודל הזווית שבין הקטע $A'C$ ובין הקטע BC'.

ב. הוכח שהישר $A'C$ מאונך למישור $BC'D$.

הנקודה K היא נקודת החיתוך של הישר $A'C$ עם המישור $BC'D$.

ג. מצא את היחס $\frac{A'K}{A'C}$.

הנקודה O היא נקודת החיתוך של אלכסון הבסיס AC עם אלכסון הבסיס BD.

ד. הוכח שהנקודה K נמצאת על הקטע $C'O$.

א) נניח שהנחנו קוביה באופן כזה שהקטע BA מתלכד עם הכיוון החיובי של ציר x,
BB' מתלכד עם הכיוון החיובי של ציר z
ו- BC מתלכד עם הכיוון החיובי של ציר y

נתאר את שיעורי קודקודי הקוביה

$B(0,0,0)$ $B'(0,0,6)$

$A(6,0,0)$ $A'(6,0,6)$

$C(0,6,0)$ $C'(0,6,6)$

$D(6,6,0)$ $D'(6,6,6)$

נמצא את הוקטור $\overline{A'C}$ ואת הוקטור $\overline{BC'}$

ונחשב את הזווית בינהם כך: $\cos\alpha = \frac{\overline{BC'}\cdot\overline{A'C}}{|\overline{BC'}|\cdot|\overline{A'C}|}$

$$\overline{A'C} = (-6,6,-6) \xrightarrow[\text{ת"ל}]{} (-1,1,-1)$$

$$\overline{BC'} = (0,6,6) \xrightarrow[\text{ת"ל}]{} (0,1,1)$$

$$\overline{A'C}\cdot\overline{BC'} = (-1,1,-1)\cdot(0,1,1) = -1\cdot0+1\cdot1+(-1)\cdot1=0$$

מאחר וערך המונה של הנוסחה לחישוב זווית התאפס, נסיק שהזווית הנדרשת $90°$

ב. כדי להראות ש$A'C$ מאונך למישור $BC'D$ עלינו להראות ש$A'C$ מאונך גם ל$C'D$. (בנוסף לכך שהוא מאונך לBC')

$$\overline{DC'} = (-6,0,6) \xrightarrow[\text{ת"ל}]{} (-1,0,1)$$

$$\overline{A'C}\cdot\overline{DC'} = (-1,1,-1)\cdot(-1,0,1) = (-1)\cdot(-1)+1\cdot0+(-1)\cdot1=0$$

לסיכום: מאחר ו$A'C$ מאונך גם לBC' וגם לDC' הוא הנורמל של מישור $BC'D$.

ג. נמצא את שיעורי הנקודה K ע"י חיתוך בין הישר $A'C$ למישור $BC'D$.

הצגה פרמטרית של הישר $A'C$ היא

$$\underline{x} = (6,0,6)+t(-1,1,-1)$$

נקודה K ניתנת לתיאור כך:

$$K(6-t,\ t,\ 6-t)$$

כדי למצוא את משוואת המישור $BC'D$ נשתמש בכיוון וקטור $\overline{A'C}$ כנורמל.

משוואת המישור המתקבלת היא $-x+y-z+D=0$

מאחר וראשית הצירים היא נקודה במישור $D=0$.

$\pi_{BC'D}: -x+y-z=0$

נציב את נקודה K לתוך משוואת המישור

$-(6-t)+t-(6-t)=0 \rightarrow 3t=12 \rightarrow \boxed{t=4}$

$K(2,4,2)$

כעת נבדוק מה היחס בין וקטור $\overline{A'K}$ לוקטור $\overline{A'C}$

$\overline{A'K}=(-4,4,-4)=\frac{2}{3}\cdot\overline{A'C}$

מאחר ווקטור $\overline{A'K}$ הוא $\frac{2}{3}$ מוקטור $\overline{A'C}$, יחס

הקטעים: $\boxed{\frac{A'K}{A'C}=\frac{2}{3}}$

3 כדי להראות שהנקודה K נמצאת על הקטע $C'O$ עלינו להראות שהוקטור $\overline{C'K}$ תלוי לינארית בוקטור $\overline{C'O}$. שיעורי הנקודה O הם $(3,3,0)$ מאחר ואלכסונים בריבוע חוצים זה את זה.

$\overline{C'O}=(3,-3,-6)$, $\overline{C'K}=(2,-2,-4)$

מאחר! $\overline{C'K}=\frac{2}{3}\overline{C'O}$ ניתן לקבוע שנקודה K מונחת על הקטע $C'O$.

3. א. (1) הוכח כי לכל מספר מרוכב z מתקיים $z\cdot\bar{z}=|z|^2$.

(2) הוכח כי אם המספר המרוכב z נמצא על מעגל היחידה,
אז גם המספר $\frac{1}{z}$ נמצא על מעגל היחידה.

ב. (1) הראה כי בעבור כל מספר מרוכב z הנמצא על מעגל היחידה, הסכום $z+\frac{1}{z}$ הוא מספר ממשי.

(2) z_1 ו־ z_2 הם מספרים מרוכבים הנמצאים על מעגל היחידה.
נתון כי הרכיבים המדומים של z_1 ו־ z_2 הם חיוביים.

הוכח כי אם: $z_1+\frac{1}{z_1}+z_2+\frac{1}{z_2}>2$ אז z_1 ו־ z_2 נמצאים ברביע הראשון.

$w=1\cdot cis(\alpha)$ הוא מספר מרוכב. נתון: $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

נתונה סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא $\frac{1}{w}$ והאיבר השני הוא w .

נתון כי סכום 5 האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית שווה ל־ 0 .

ג. (1) הבע באמצעות α את מנת הסדרה, והסבר מדוע כל איברי הסדרה נמצאים על מעגל היחידה.

(2) מצא את α (מצא את שתי האפשרויות).

3א(1) נגדיר: $z=R\,cis\theta$
$\bar{z}=R\,cis(-\theta)$

נוכיח כי: $z\cdot\bar{z}\stackrel{?}{=}|z|^2$

$R\,cis\theta\cdot R\,cis(-\theta)\stackrel{?}{=}|R\,cis\theta|^2$

$R^2 cis(0)\stackrel{?}{=}R^2$

$R^2\stackrel{?}{=}R^2$ מ.ש.ל א(1)

(2 נגדיר: $z=R\,cis(\theta)$
$\bar{z}=R\,cis(-\theta)$

נוכיח כי: $z\cdot\bar{z}=|z|^2$

$R\,cis\theta\cdot R\,cis(-\theta)=|R\,cis(\theta)|^2$

$R^2 cis(\theta)=R^2$

המשך 3.

$R^2 = R^2$

מ.ש.ל א(1)

2) אם z נמצא על מעגל היחידה $R=1$.

ולכן $z = 1\text{cis}(\theta)$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1\text{cis}\theta} = \frac{1\text{cis}0}{1\text{cis}\theta} = 1\text{cis}(-\theta)$$

מכאן נובע $\frac{1}{z}$ נמצא על מעגל היחידה.

ב(1)

$$z + \frac{1}{z} = 1\text{cis}\theta + \frac{1}{\text{cis}(\theta)} = 1\text{cis}\theta + 1\text{cis}(-\theta)$$

$$\cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta$$

$$2\cos\theta$$

מספר ממשי, מ.ש.ל ב(1)

(2)

מכיוון ו z_1, z_2 נמצאים על מעגל היחידה נגדיר:

$z_1 = 1\text{cis}\theta_1$

$z_2 = 1\text{cis}\theta_2$

$0 < \theta_1 < 180°$

$0 < \theta_2 < 180°$

(נתון הרכיבים המדומים של z_1, z_2 חיוביים)

מסעיף ב(1) + נתון נובע:

$2\cos\theta_1 + 2\cos\theta_2 > 2 \quad | :2$

$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 > 1$

נוכיח בדרך השלילה:

נניח ואחת הזוויות קהה למשל $90° < \theta_1 < 180°$

$\Downarrow$

$\cos\theta_1 < 0$

$\Downarrow$

$\cos\theta_2 > 1$

ערך של קוסינוס לא יכול להיות גדול מ-1 ולכן: $0 < \theta < 90°$

מכאן נובע z_1 ו z_2 ברביע הראשון מ.ש.ל ב(2).

המשך 3.

ג)1) נתון: $w = 1cis\alpha$

$\frac{1}{w} = 1cis(-\alpha)$ ולפי ג)2)

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1cis\alpha}{1cis(-\alpha)} = \boxed{1cis(2\alpha)}$$

$\Downarrow$

מנת הסדרה נמצאת על מעגל היחידה.

(2) נתון $S_5 = 0$

$$\frac{a_1(q^5-1)}{q-1} = 0$$

$$a_1(q^5-1) = 0$$

$a_1 = 0$

$1cis(-\alpha) = 0$

$\emptyset$ מספר שנמצא על מעגל היחידה לא יכול להתאפס.

$(1cis2\alpha)^5 - 1 = 0$

$1cis(10\alpha) = 1$

$1cis(10\alpha) = 1cis0$

$10\alpha = 0 + 2\pi k$

$\alpha = \frac{\pi}{5}k$

בתחום: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\boxed{\alpha = \frac{2\pi}{5}}$ או $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{5}}$

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \ell n\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$, המוגדרת לכל x .

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המקבילה לציר ה־ x .

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) הוכח כי $f(x) = x - \ell n\left(e^x + 1\right)$.

(2) הסבר מדוע גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא כולו מתחת לישר $y = x$.

ד. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}$ המוגדרת לכל x .

(1) מה הם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה)?

(2) $a > 1$ הוא פרמטר.

היעזר בנגזרת הפונקציה $f(x)$ והראה כי נפח גוף הסיבוב של השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי הצירים ועל ידי הישר $x = \ell na$ שווה ל־ $\pi \ell n\left(\frac{2a}{a+1}\right)$. פרט את חישוביך.

4א. (1) ציר y:

$f(0) = \ln\left(\frac{e^0}{e^0+1}\right) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

$(0, -\ln 2)$

ציר x:

$\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) = 0$

$\Updownarrow$

$\frac{e^x}{e^x+1} = 1$

$\Updownarrow$

אין פתרון

לסיכום: $\boxed{(0, -\ln 2)}$

(2) אין חיתוך עם ציר x, ויש נקודה מתחת לציר x

לכן:

$f(x)$ שלילית: בכל x
$f(x)$ חיובית: אף x

(3)

$x \to \infty$: $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) = \ln 1 = 0$

$x \to -\infty$: $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) \Rightarrow \ln(0) \Rightarrow -\infty$

לסיכום, האסימפטוטה ה $y=0$ והיא מתקבלת רק בצד ימין.

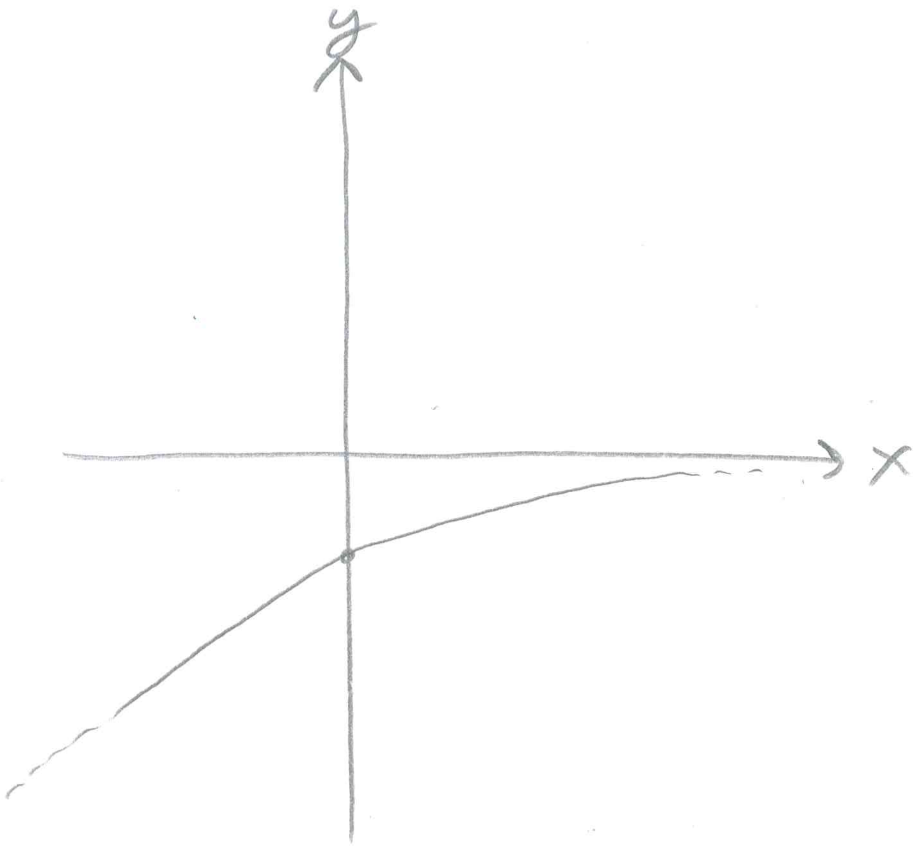
(4) נגזרת:

$$f'(x) = \frac{\frac{e^x(e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2}}{\frac{e^x}{e^x+1}} = \frac{\frac{e^x}{(e^x+1)^2}}{\frac{e^x}{e^x+1}} = \frac{1}{e^x+1}$$

הנגזרת חיובית לכל ערך של x ולכן אין נקודות קיצון, והתחומים הם:

תחום עליה: בכל x
תחום ירידה: אין

ב.



ג. (1) $f(x) = \ln \frac{e^x}{e^x+1} = \ln e^x - \ln(e^x+1)$

$$f(x) = x - \ln(e^x+1)$$

(2) e^x חיובי לכל ערך של x, מכאן שהתוכן של ln גדול מאחד לכל ערך של x ולכן $\ln(e^x+1)$ חיובי לכל ערך של x. מכאן שהביטוי $x-\ln(e^x+1)$ קטן מ-x לכל ערך של x, ולכן:

$f(x) < x$ לכל ערך של x

.3

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}$$

(1) גם המונה וגם המכנה חיוביים לכל ערך של x ולכן:

$\boxed{\text{תחום חיוביות: כל } x \quad \text{תחום שליליות: אין}}$

(2) $1<a$

$$V=\pi\cdot\int_0^{\ln a}(g(x))^2dx=\pi\cdot\int_0^{\ln a}\frac{1}{e^x+1}dx$$

הביטוי באינטגרל הוא $f'(x)$, ולכן:

$$V=\pi\cdot\left[x-\ln(e^x+1)\right]_0^{\ln a}=$$

$$=\pi\left\{\left[\ln a-\ln(e^{\ln a}+1)\right]-\left[0-\ln(e^0+1)\right]\right\}$$

$$=\pi\left[\ln a-\ln(a+1)+\ln 2\right]=\boxed{\pi\cdot\ln\left(\frac{2a}{a+1}\right)}$$

5. נתונה משפחת הפונקציות $f(x) = \dfrac{e^{-mx}}{1+x^2}$. m הוא פרמטר.

ענה על הסעיפים א-ב בעבור $m \geq 0$.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציות $f(x)$?

(2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציות $f(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

(3) נתון כי כל הפונקציות $f(x)$ מן המשפחה חותכות זו את זו בנקודה אחת. מצא את שיעוריה.

ב. (1) בעבור $m \geq 0$, מצא את הערכים של m שבעבורם הנגזרת $f'(x)$:

(i) אינה מתאפסת בשום נקודה.

(ii) מתאפסת בנקודה אחת בדיוק.

(iii) מתאפסת בשתי נקודות בדיוק.

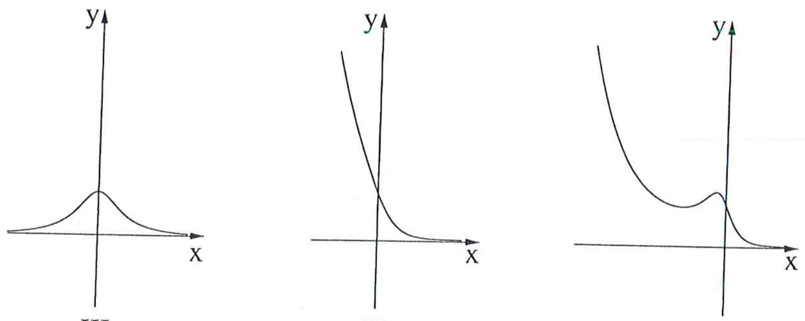
(2) בסוף השאלה נתונים שלושה גרפים (I-III) של פונקציות מן המשפחה $f(x)$ בעבור $m \geq 0$.

ידוע כי $m \neq 1$ וכי כל אחד מן הגרפים מתאים לערך או לטווח ערכים אחד של m .

הַתְאֵם לכל גרף מבין השלושה את הערך או את טווח הערכים של m המתאים לו. נמק.

ענה על סעיף ג. תוכל להיעזר בגרף המתאים מבין הגרפים I-III .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(-x)$ בעבור $0 < m < 1$.



III II I

א (1) תחום הגדרה - כל X.
הסבר: e^{-mx} הוא ביטוי מעריכי לכן ניתן להציב בו כל X
$1+x^2$ פרבולה צוחקת/מרחפת לכן חיובי תמיד.

א (2) e^{-mx} חיובי תמיד מאחר והוא ביטוי מעריכי
$1+x^2$ חיובי תמיד. לכן הפונ' חיובית לכל ערך של X.

א (3) כאשר $x=0$, שינויים בערכו של m לא ישנו את ערך הפונקציה. לכן כל הגרפים עוברות בנקודה $(0,1)$

ב (1)

$$f'(x)=\frac{-m\cdot e^{-mx}(1+x^2)-2x\cdot e^{-mx}}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-e^{-mx}[m(1+x^2)+2x]}{(1+x^2)^2}=\frac{-e^{-mx}[mx^2+2x+m]}{(1+x^2)^2}$$

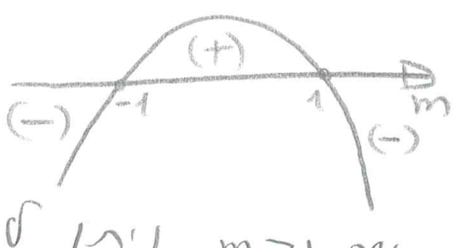
מאחר והביטוי mx^2+2x+m ריבועי עבור $m\neq 0$ ולינארי עבור $m=0$, נפריד לשני מקרים:

I $m\neq 0$: נבדוק עבור אילו ערכי m הביטוי mx^2+2x+m הוא בעל שני מאפסים, מאפס אחד או חסר מאפסים.

כאשר $\Delta>0$ ⟸ שני מאפסים
כאשר $\Delta=0$ ⟸ מאפס אחד
כאשר $\Delta<0$ ⟸ אין מאפסים

$$\Delta=b^2-4ac=4-4\cdot m^2=0 \rightarrow m=\pm 1$$

תזכורת: $m\geq 0$



כאשר $m>1$ ניתן לראות ש $\Delta<0$ לכן אין מאפסים
כאשר $m=1$ ניתן לראות ש $\Delta=0$ לכן יש מאפס אחד
כאשר $0<m<1$ ניתן לראות ש $\Delta>0$ לכן יש שני מאפסים

II $m=0$: במקרה זה מהביטוי mx^2+2x+m נשאר רק $2x$ לכן יש מאפס אחד $(x=0)$

לסיכום:

$m>1$ ← אינה מתאפסת

$m=1,0$ ← מתאפסת בנקודה אחת

$0<m<1$ ← מתאפסת בשתי נקודות

ב(2) בגרף מס' 1 ישנן 2 נקודות קיצון ולכן מתאים למצב בו הנגזרת מתאפסת פעמיים, כלומר ל- $0<m<1$.

בגרף מס' 2 אין נקודות קיצון ולכן מתאים למצב בו אין מאפסים, כלומר $m>1$

בגרף מס' 3 יש נקודת קיצון אחת ולכן מתאים למצב בו הנגזרת מתאפסת פעם אחת, כלומר $m=0$ (נתון ש- $m\neq 1$)

ג. $f(-x)$ היא טרנספורמציה שמסובבת את הגרף סביב ציר y מאחר ושיעורי ה-x של הנקודות מחליפים סימן.

לכן הגרף נראה כך: