

## פתרון הבחינה

# במתמטיקה

חורף תשע"ט, 2019, שאלון: 35581  
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



1. קבוצת פועלים, חוטבי עצים מנוסים, תכננה לירות 216 מ"ק עץ במספר ימים מסוים (ההספק של הפועלים הוא קבוע).
- בשלושת הימים הראשונים עבדו הפועלים על פי ההספק המתוכנן. החל מן היום הרביעי הם הגבירו את קצב עבודתם ומדי יום כרתו 8 מ"ק עץ יותר מן המתוכנן. הם עבדו בפועל יום אחד פחות ממספר הימים המתוכנן, וכרתו 232 מ"ק עץ סך הכול.
- א. (1) על פי התכנון, כמה מ"ק עץ היו אמורים הפועלים לירות ביום?  
(2) כמה ימים עבדו הפועלים בפועל?
- ב. במהלך איזה יום מתחילת העבודה סיימו הפועלים לירות  $\frac{2}{3}$  מן הכמות המתוכננת?  
לאחר מכן הוצמד פועל מתלמד לכל פועל מנוסה בקבוצה, וכך נוצרה קבוצה חדשה ובה 2m פועלים סך הכול (m מנוסים ו-m מתלמדים).
- ההספק היומי של הפועלים המנוסים הוא ההספק היומי המתוכנן. כל הפועלים המנוסים עובדים באותו הספק יומי. ההספק היומי של פועל מתלמד קטן ב-1 מ"ק מן ההספק היומי של פועל מנוסה. הקבוצה החדשה עבדה 8 ימים.
- ג. (1) בטא את ההספק היומי של פועל מנוסה יחיד ושל פועל מתלמד יחיד באמצעות m.  
(2) כמה פועלים יש בקבוצה החדשה אם ידוע שהם כרתו 336 מ"ק עץ סך הכול?

1א)א

הצגה:

x - הספק מתוכנן

(כמה ימים עבדו הפועלים?)

| הספק | זמן                  | כמות   |
|------|----------------------|--------|
| x    | $\frac{216}{x}$      | 216    |
| x    | 3                    | 3x     |
| x+8  | $\frac{232-3x}{x+8}$ | 232-3x |

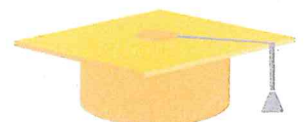
יחידות: ימים, ימים, ימים

$$3 + \frac{232-3x}{x+8} + 1 = \frac{216}{x}$$

↑  
יום אחד פחות

למידע על פסיכומטרי  
ביזאל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**



קמטק (א2)

$$4 + \frac{232-3x}{x+8} = \frac{216}{x} \quad | \cdot x(x+8)$$

$$4x(x+8) + x(232-3x) = 216(x+8)$$

$$4x^2 + 32x + 232x - 3x^2 = 216x + 1,728$$

$$x^2 + 48x - 1,728 = 0$$

$$(x+72)(x-24) = 0$$

נפסל ע"י קינניא  
ההספק אינו שלילי.

$x = -72$        $x = 24$

ע"י התכנון התואכים היו אחרים אכרוא, 24 מ"ק אר גיוס.

ק(2)

$$3 + \frac{232-3x}{x+8}$$

$$3 + \frac{232-3 \cdot 24}{32} = 8$$

ע"י האבאיה  
מס הימים אפועל קוא:

$x = 24$  (3)

הפועלים אצט 19 א 8 מ"מ קסום

2.

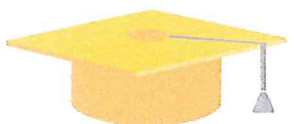
$\frac{2}{3}$  והכואר המטוננת קוא: 144 מ"ק אר

אחר 3 יואם הפועלים כרעו  $3 \cdot 24 = 72$  א

מיהא ה-3 קהספק טעמ קוא 32 מ"ק אר

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



1. ק. דמשך

הזמן שכתוב הוא 72 דקות הנותרים הוא:  $\frac{72}{32} = 2.25$

לכן:  $3 + 2.25 = 5.25$

במהלך היום השישי

א) ע.

הקבוצה התנוסה בסוף הספק משותף של 24 יקום ליום ולכן:

הספק כל פועל מנוסה הוא  $\frac{24}{m}$

הספק כל פועל מנוסה הוא  $\frac{24}{m} - 1$

הספק פועל מנוסה הוא הספק מנוסה פועל אחד ולכן:

(2)  $8 \times \text{הספק} = \text{עבודה}$

$$8 \left( m \cdot \frac{24}{m} + m \cdot \left( \frac{24}{m} - 1 \right) \right) = 336$$

כשהקבוצה עובדת יחד:

$$24 + 24 - m = 42$$

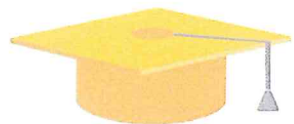
$$48 - m = 42$$

$$m = 6$$

אם הפועלים הקבוצה יתחבב הוא:  $2 \cdot 6 = 12$

נמידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**



2. נתונה סדרה חשבונית  $a_1, a_2, \dots, a_{2n+3}$  ובה  $2n+3$  איברים ( $n$  הוא מספר טבעי).  
סכום הסדרה גדול פי 43 מן האיבר האמצעי. האיבר האמצעי שונה מ-0.

א. (1) הראה כי סכום הסדרה שווה ל-  $(2n+3) \cdot a_{n+2}$ .

(2) מצא את מספר האיברים בסדרה.

ב. ידוע כי בסדרה הנתונה סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים גדול ב-40 מסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

(1) מצא את האיבר האמצעי.

(2) מצא את סכום הסדרה.

נתון כי הפרש הסדרה הנתונה הוא  $-a_1$ .

ג. קבע אם הסדרה עולה או יורדת.

מכל איברי הסדרה הנתונה בנויים סדרה חדשה על ידי חיבור של כל  $k$  איברים סמוכים ( $k$  הוא מספר טבעי) באופן

הזה:  $(a_1 + a_2 + \dots + a_k), (a_2 + a_3 + \dots + a_{k+1}), (a_3 + a_4 + \dots + a_{k+2}), \dots$

ד. הבע באמצעות  $k$  את מספר האיברים בסדרה החדשה.

$$2 \text{ ב. (1)} \quad \sum_{i=1}^{2n+3} a_i = \frac{(2n+3)(2a_1 + (2n+2)d)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{2n+3} a_i = \frac{2(2n+3)(a_1 + (n+1)d)}{2} \quad * \quad a_{n+2}$$

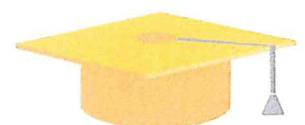
$$\sum_{i=1}^{2n+3} a_i = (2n+3)a_{n+2}$$

\* ע"י (וסמן) אפניו  
 $n=1$   
 $a_{n+2} = a_1 + (n+1)d$

(2)  $\sum_{i=1}^{2n+3} a_i = 43 \cdot a_{n+2}$

ע"י הניח:

$$(2n+3)a_{n+2} = 43 \cdot a_{n+2} \quad | : a_{n+2} \neq 0$$



ק(2) קיטק

$$2n+3 = 43$$

$$2n = 40$$

$$n = 20$$

$$\boxed{2 \cdot 20 + 3 = 43 \quad \text{סך הכל 43} \quad \text{מספר האיברים} \quad \text{נ}} \quad \text{נ}$$

ק(1)

$$\sum_{n=1}^{20} 2n = 40 + \sum_{n=1}^{20} 2n$$

$$\frac{22(2a_1 + 21 \cdot 2b)}{2} = 40 + \frac{21(2a_2 + 20 \cdot 2d)}{2}$$

$$22(a_1 + 21b) = 40 + 21(a_2 + 20d)$$

$$22a_1 + 462b = 40 + 21a_2 + 420d$$

$$22a_1 + 462b = 40 + 21a_2 + 21b + 420d$$

$$a_1 + 21b = 40$$

↓

$$\boxed{a_{22} = 40 \quad \text{(איבר)} \quad \text{מספר האיברים} \quad \text{נ}} \quad \text{נ}$$

ק(2)

$$\sum_{2n+3} = (2n+3) \cdot a_{n+2}$$

לפי סעיף א(1)

ק(3)

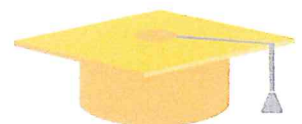
$$\boxed{\sum_{n=1}^{20} 43 = 43 \cdot 20 = 1,720}$$

$$h=20$$

$$a_{22}=40$$

לחידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



ז.

$$a_{22} = 40$$

↓

$$a_1 + 21d = 40$$

$$a_1 + 21(-a_1) = 40$$

$$-20a_1 = 40$$

$$a_1 = -2$$

$$d = -(-2) = 2 \quad d > 0$$

הסדרה  
עולה

ז.

אם האברים מסתכמים  
התוצאה תהיה

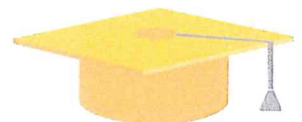
$$43 - (n-1)$$

$$44 - n$$

ע"מ שיהיה מספיק  
אברים לסכום  
באיבר האחרון צריך  
לעבור 44 ו-1 אברים  
מהם ולכן:

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



3. בבית ספר תיכון ניגשים תלמידי שכבת י"ב לבחינת המתכונת באזרחות ולאחר מכן לבחינת הברגות באזרחות. נתון: גם בשנת 2017 וגם בשנת 2018 מספר התלמידים שעברו את בחינת המתכונת ונכשלו בבחינת הברגות היה שווה למספר התלמידים שנכשלו בבחינת המתכונת ועברו את בחינת הברגות.
- א. בשנת 2017 ניגשו 250 תלמידים לבחינת המתכונת ולאחר מכן לבחינת הברגות באזרחות. ידוע שאם תלמיד עבר את בחינת המתכונת, ההסתברות שהוא עבר את בחינת הברגות היא 0.9. שיעורם של הנכשלים בבחינת הברגות מכלל התלמידים שניגשו לבחינות בשנה זו היה 20%.
- (1) מהו מספר התלמידים שעברו גם את בחינת המתכונת וגם את בחינת הברגות?
  - (2) ידוע שתלמיד מסוים נכשל בבחינת המתכונת. מהי ההסתברות שאותו תלמיד עבר את בחינת הברגות?
  - (3) בוחרים באקראי (עם החזרה) שני תלמידים שנכשלו בבחינת הברגות. מהי ההסתברות ששניהם נכשלו גם בבחינת המתכונת?
- ב. נתון כי בשנת 2018 לא הייתה תלות בין המאורע "עובר את בחינת המתכונת" לבין המאורע "עובר את בחינת הברגות", וכי ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת הברגות בשנה זו היא  $a$  ( $0 < a < 1$ ). הבע באמצעות  $a$  את ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת המתכונת ונכשל בבחינת הברגות בשנה זו.

אוכלוסיה: תלמידים שניגשו באזרחות

A - עברו מתכונת

$\bar{A}$  - נכשלו במתכונת

B - עברו הברגות

$\bar{B}$  - נכשלו בהברגות

נתון ש"מספר התלמידים שעברו מתכונת וגם נכשלו בהברגות שווה למספר התלמידים שעברו את הברגות ונכשלו במתכונת". נתון להסיק:

$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap B)$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap B)$$

נתון שאם תלמיד עבר את בחינת המתכונת אז

ההסתברות שהוא עבר את בחינת הברגות היא 0.9.

נתון להסיק:  $P(B|A) = 0.9$





נתון שאחוז הנכשלים בבגרות מכלל הנבחנים הוא 20%

נסיק e  $P(\bar{B}) = 0.2$

נעזרז אף הנתונים ונמלא טבלה  $2 \times 2$ .

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0.9$$

נסמן אף  $P(A) = x$

נוקע e  $P(B \cap A) = 0.9x$

נימן עהבין מהטבלה e

$P(A \cap \bar{B}) = 0.1x$

מהנתון עולה שגם  $P(\bar{A} \cap B) = 0.1x$

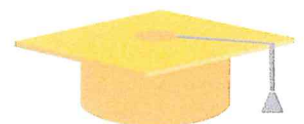
|           |           |        |  |
|-----------|-----------|--------|--|
|           | $\bar{A}$ | A      |  |
| B         | 0.8       | $0.9x$ |  |
| $\bar{B}$ | 0.2       | $0.1x$ |  |
|           | 1         | x      |  |

מסכמת מהסתברויות בשורה הראשונה עולה e

$$0.9x + 0.1x = 0.8 \rightarrow x = 0.8$$

כעג נימן עהפטים אף הטבלה:

|           |           |      |  |
|-----------|-----------|------|--|
|           | $\bar{A}$ | A    |  |
| B         | 0.8       | 0.72 |  |
| $\bar{B}$ | 0.2       | 0.08 |  |
|           | 1         | 0.8  |  |



$$P(A \cap B) = 0.72$$

א (1)

ההסתברות לעבור עם מתכונת וגם בגרות היא 0.72. נסיק ש 72% מתוך 250 המועמדים שנבחנו עברו עם מתכונת וגם בגרות.  
 $0.72 \cdot 250 = 180$

180 מועמדים עברו עם בגרות וגם מתכונת

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0.08}{0.2} = 0.4$$

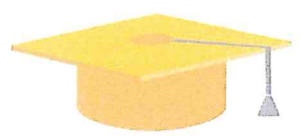
א (2)

ההסתברות שמועמד שנבחר בבחינת המתכונת יעבור את בחינת הגרות היא 0.4

א (3) כאשר בוחרים מועמד בודד שנבחר בגרות והסתברות שהוא נכשל עם בחינת המתכונת היא  $P(\bar{A}/B)$ . מכך נגזר בוחרים שניים עם התוצרה ההסתברות היא  $(P(\bar{A}/B))^2$

$$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.12}{0.2} = 0.6$$

לסיכום - ההסתברות המבוקשת היא  $0.6^2$   
 כלומר 0.36



$P(A \cap \bar{B}) = ?$

תשובה: ניתן בתחילה  
השאלה a

ק B, A ב"ת - נתון  
 $P(B) = a$  נתון.

|           |   |                |  |
|-----------|---|----------------|--|
|           | A | A              |  |
| B         | a | a <sup>2</sup> |  |
| $\bar{B}$ |   |                |  |
|           | 1 | a              |  |

$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap B)$   
הצורה הזו נהוגה יותר:  
 $\begin{cases} P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B) \\ P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A) \end{cases}$

$P(A) = P(B)$

$P(A) = a$  ולכן נסיק שגם

מאחר  $A \neq B$  ב"ת ניתן לומר ש

$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

$a \cdot a = P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = a^2$

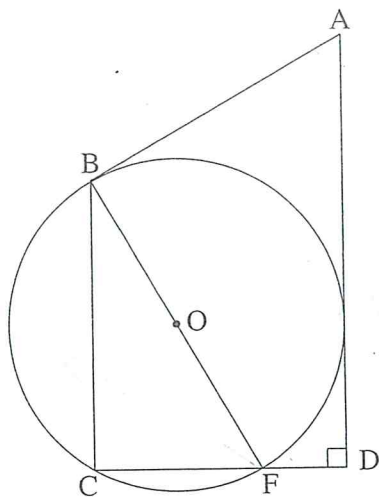
מחיסור הסתברויות בעזרה הראשונה של הטבלה

$P(A \cap \bar{B}) = a - a^2$

עולה ש

סמינר: הסתברות - שאלה 2.6 א - בחינת המבחן  
אם נכש בבעיה היא  $a - a^2$





4. המשולש BCF חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R. BF הוא קוטר במעגל. מן הנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל – האחד משיק למעגל בנקודה B והאחר חותך את המשך הצלע CF בנקודה D, כמתואר בציור שלפניך. נתון:  $AD \perp CD$ .

א. הוכח:  $\angle BFC = \angle BAD$ .

נתון: K היא נקודה על הצלע BC, כך ש-FK חוצה את  $\angle BFC$ .

ב. הוכח:  $KC = \frac{CF \cdot BO}{AB}$ .

ג. הוכח:  $KB \cdot AB = 2R^2$ .

ד. הסבר מדוע שטח  $\triangle BFK$  גדול משטח  $\triangle KFC$ .

שיטת זריז עם בניית הנקודה G + סימון, מציאת בסוף הפתרון!

| נימוק  | זריז   | כ |
|--|--|---|
| נתון   | BF - חצי - (כחול)                                  | ① |
| נתון + סימון נקודה G                                   | AB, AG - משיק (כחול)                               | ② |
| נתון $AD \perp CD$                                     | $\angle GDF = 90^\circ$                            | ③ |
| נ"ל: ה"ר"ה הנשען על חצי - (שורה 1) היא נ"ל ישירה       | $\angle BCF = 90^\circ$                            | ④ |
| סימון  | $\angle BAG = \alpha$                              | ⑤ |
| ה"ר"ה ומ"ר ניצבים בנקודה ההלכה (G - סימון נקודה ההלכה) | $\angle ABO = 90^\circ$<br>$\angle AGO = 90^\circ$ | ⑥ |



נימוק

180°

כלל זעזע לשוויון (4) - (3)

$$\angle C = \angle D \quad (7)$$

זוויות מתאימות שוות, עכשיו מקבילים  
לפי שוויון (7)

$$BC \parallel AD \quad (8)$$

סכום זוויות חזר זוגיות בין ישרים  
מקבילים שווה 180°

$$\angle CBA + \angle BAD = 180^\circ \quad (9)$$

הזכר כי שוויון (6) - (5)

$$\angle CBF + 90^\circ + \alpha = 180^\circ \quad (10)$$

$$\angle CBF = 90^\circ - \alpha$$

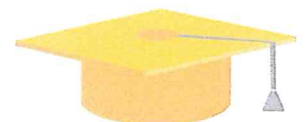
משלשלת  $\triangle BCF$  ישרים (10)  
משלשלת  $\triangle BCF$  ישרים (10)

$$\angle CFB = \alpha \quad (11)$$

לפי כלל זעזע לשוויון (11) - (5)

$$\angle CFB = \angle BAD \quad (12)$$

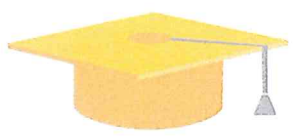
בני-כ"א



| נימוק                                | פתרון   | פ    |
|--------------------------------------|---|------|
| (14) נשוא $\angle BFC$ ושווה         | $\angle KFC = \frac{\alpha}{2}$                 | (13) |
| (15) - (7) ע"פ כפל המשכה לשווה       | $\angle KFC = \angle BAO$                       | (14) |
| (6) - (4) ע"פ כפל המשכה לשווה        | $\angle KCF = \angle OBA$                       | (15) |
| (17) - (16) ע"פ משפ. זנבון S.S ושווה | $\triangle FCK \sim \triangle ABO$              | (16) |
| (18) יחס הזנבון ק-ס'ם זולאי, שווה    | $\frac{FC}{AB} = \frac{CK}{BO} = \frac{FK}{AO}$ | (17) |
| (19) חישוב שווה                      | $KC = \frac{CF \cdot BO}{AB}$<br>כנ"ל >         | (18) |

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



\* BFC זכר KF הסימולטרי  
 $\triangle BFC \sim$

$$\frac{BK}{KC} = \frac{BF}{CF}$$

ד  
 (19)

הערה:  $BF = 2R$  (21) + זכר

$$BK \cdot CF = 2R \cdot CK \quad (20)$$

הערה (20)  $\rightarrow$  (22)

$$BK \cdot CF = 2R \cdot \frac{CF \cdot BO}{AB} \quad (21)$$

הערה  $BO = R$

$$BK \cdot AB = 2R^2 \quad (22)$$

כנגד ז'

הערה  $\triangle BFC \sim \triangle KFC$  זכר

$$BF > CF \quad (23)$$

הערה (23)  $\rightarrow$  (24)

$$\frac{BK}{KC} = \frac{BF}{CF} > 1 \quad (24)$$

הערה  $CF > KC$  זכר

(25)

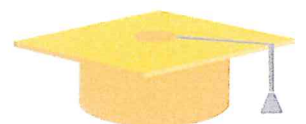
$$\frac{S_{\triangle BFK}}{S_{\triangle KFC}} = \frac{\frac{1}{2} BK \cdot CF}{\frac{1}{2} CK \cdot CF} = \frac{BK}{CK} > 1$$

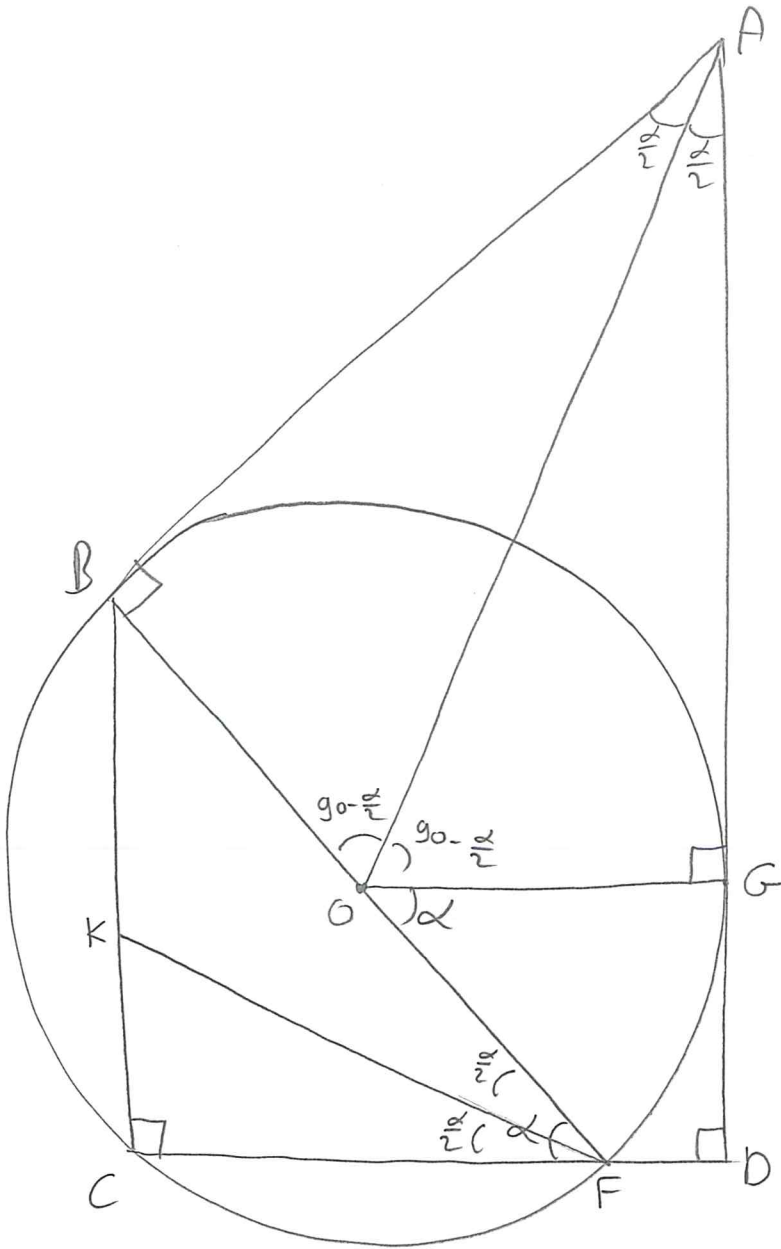
(26)

הערה (26)

$$S_{\triangle BFK} > S_{\triangle KFC} \quad \text{כנגד ז'}$$

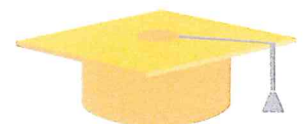
(27)



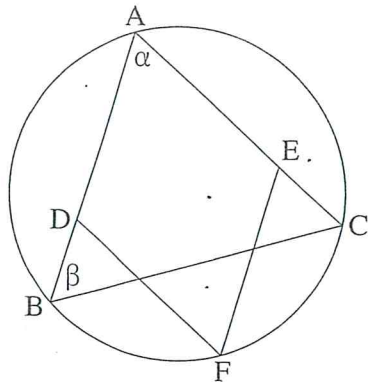


נחידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.







5. ABC הוא משולש החסום במעגל שרדיוסו R.

הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AB

ו-AC בהתאמה, והנקודה F נמצאת על הקשת BC

כך שהמרובע ADFE הוא מעוין (ראה ציור).

נתון:  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$ .

א. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את  $\angle ABF$ .

ב. הבע באמצעות R,  $\alpha$  ו- $\beta$  את אורך האלכסון AF.

ג. הבע באמצעות R,  $\alpha$  ו- $\beta$  את אורך צלע המעוין.

נתון כי AF הוא קוטר במעגל.

ד. הראה כי שטח המעוין הוא  $2R^2 \tan \frac{\alpha}{2}$ .

ה. נתון כי רדיוס המעגל החסום במעוין ADFE הוא  $\frac{3}{5}R$ .

ו. חשב את  $\beta$ .

/המשך בעמוד 5/

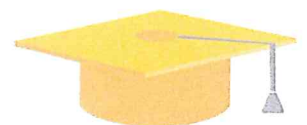
ציר מרכז וסליל בנייה העל-וסימולר נוספים נגזרים  
בסוף הפתרון המסווג.

1) (c) AF - אלכסון האסי במעוין

$\angle EAF = \angle DAF = \frac{\alpha}{2}$  - אלכסוני מעוין חוצים כל אחד את השני

$\angle FBC = \angle FAC = \frac{\alpha}{2}$  - מעוין חסום במעגל

הערה: FC הוא כוון



חזית -  $\angle ABF = \beta + \frac{\alpha}{2}$

(2) לפי משפט הסינוס ב-  $\triangle ABF$ :

$$\frac{AF}{\sin(\beta + \frac{\alpha}{2})} = 2R \rightarrow AF = 2R \cdot \sin(\beta + \frac{\alpha}{2})$$

2 לפי משפט הסינוס ב-  $\triangle AFE$ :

$$\frac{FE}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{AF}{\sin(180^\circ - \alpha)}$$

( $\angle AEF = 180^\circ - \alpha$  - נוסף כי הזווית הנגזרת היא  $180^\circ - \alpha$ )

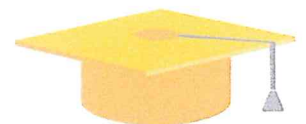
$$FE = \frac{AF \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} = \frac{2R \cdot \sin(\beta + \frac{\alpha}{2}) \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{R \sin(\beta + \frac{\alpha}{2})}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

3 נתון כי  $AF$  הוא היתר במעגל

$\angle ABF = \beta + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$  - נוסף כי הזווית הנגזרת היא  $90^\circ$  - נוסף כי הזווית הנגזרת היא  $90^\circ$

אזכרון: במעגל מתחברת הזווית הנגזרת לשני זוויות שוויות

$$S = 2 \cdot S_{\triangle AEF} = 2 \cdot \frac{1}{2} FE^2 \cdot \sin(180^\circ - \alpha)$$



הצבה א פתרון כי :

$$\sqrt{S} = \frac{R^2 \sin^2(\beta + \frac{\alpha}{2})}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \alpha$$

הצבה  $\beta + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$  :

$$= \frac{R^2 \cdot \sin^2 90^\circ}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cancel{\cos \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= 2 R^2 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \boxed{2 R^2 \tan \frac{\alpha}{2}}$$

2 מהכנס מעגל היחסים במעגלון הוא קטע  $\sin$  היסוד

נתון כי AF הוא הזווית - המעגל האולן,

עכשיו מהכנס המעגל האולן הוא איננו הזווית -

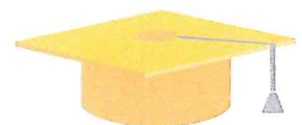
מכיוון לפני המעגל מהכנס מעגל.

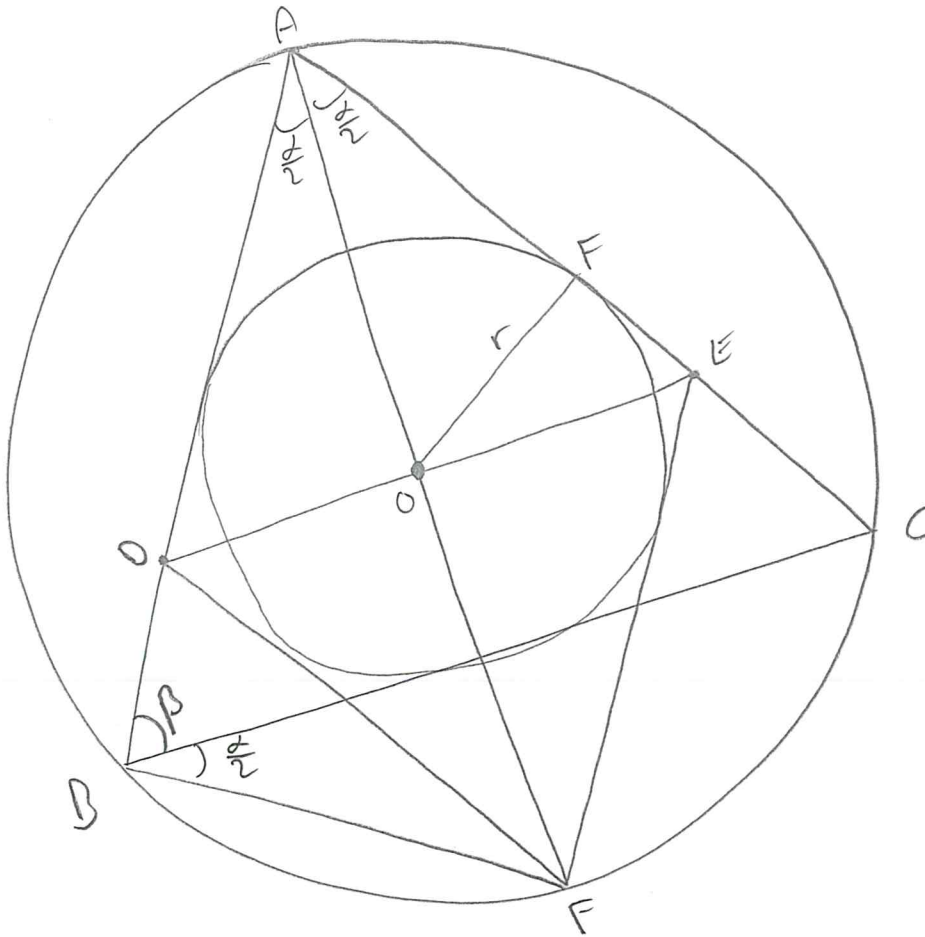
OF  $\perp$  AE - היחס ניצב למשך בקוטר F

נסתכל ב  $\triangle AOF$  יש זווית :

$$\frac{F}{OA} = \sin \frac{\alpha}{2}$$

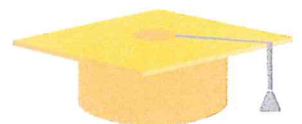
$$\frac{\frac{3}{5}R}{R} = \sin \frac{\alpha}{2} \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 36.86 \rightarrow \boxed{\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 53.13^\circ}$$





נמידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



6. נתון: הפונקציה  $g''(x) = -\frac{18}{x^4} + \frac{18}{(x-4)^4}$  היא פונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה  $g(x)$ .

הפונקציות  $g(x)$ ,  $g'(x)$ ,  $g''(x)$  מוגדרות באותו תחום.

נתון כי משוואת המשיק לפונקציה  $g(x)$  בנקודת הפיתול שלה היא  $y = \frac{3}{2}x - 3$ .

א. (1) מצא את הפונקציה  $g(x)$ .

(2) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ ?

(3) מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה  $g(x)$ .

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

נגדו:  $h(x) = |g(x)|$ .

ב. באותה מערכת צירים שבה סרטטת סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ , הוסף בקו מקווקו סקיצה של גרף

הפונקציה  $h(x)$ .

ג. נתון כי  $\int_a^2 g(x) dx = t$ ,  $0 < a < 2$ ,  $t$  הוא פרמטר.

הבע בלמצעות  $t$  את  $\int_a^2 (h(x) - g(x)) dx$ .

א/ (1) נמצא את שיאור ה- $x$  של נקודת הפיתול  
ע"י השוואת הנגזרת השנייה לאפס.

$$0 = \frac{18}{(x-4)^4} - \frac{18}{x^4} \quad | \cdot x^4(x-4)^4$$

$$0 = 18x^4 - 18(x-4)^4 \quad | :18$$

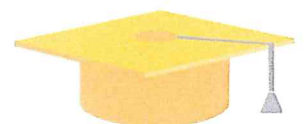
$$0 = x^4 - (x-4)^4$$

$$(x-4)^4 = x^4 \quad | \sqrt[4]{\quad}$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \searrow \\ x-4 = x \quad x-4 = -x \\ \text{נסו} \quad \boxed{x=2} \end{array}$$

למידע על פסיכומטרי  
ביזאל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**



מאתר ונאמר שיש לקוצר כמעט בסוף נימ  
 מהסיק ש?  $x=2$  יש פירו בווזאלג ואין צורך  
 מאמר זאת.

נחשב את שיעור ה- $y$  של לקוצר ההסקה  
 ע"י הצבה של  $x=2$  במשוואת המשיק.

$$y = \frac{3}{2} \cdot 2 - 3 = 0$$

לקוצר ההסקה היא  $(2,0)$ .

נבצע אינטגרציה של  $g'(x)$  כדי למצוא את  $g(x)$

$$g'(x) = \int g''(x) dx = \int \left( \frac{18}{(x-4)^4} - \frac{18}{x^4} \right) dx = \int \left( 18(x-4)^{-4} - 18 \cdot x^{-4} \right) dx$$

$$g'(x) = 18 \cdot \frac{(x-4)^{-3}}{-3 \cdot 1} - 18 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} + C_1 = \frac{6}{x^3} - \frac{6}{(x-4)^3} + C_1$$

כדי למשק את  $C_1$  נסב ששיבוע משיק הוא

השיבוע הנקוצר ההסקה:  $g'(2) = \frac{3}{2}$

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{2^3} - \frac{6}{(2-4)^3} + C_1 \rightarrow C_1 = 0$$

$$g'(x) = \frac{6}{x^3} - \frac{6}{(x-4)^3}$$



נקבע אינטגרציה נוספת מן המצוינות כאן  $g(x)$

$$g(x) = \int g'(x) dx = \int \left( \frac{6}{x^3} - \frac{6}{(x-4)^3} \right) dx = \int \left( 6 \cdot x^{-3} - 6(x-4)^{-3} \right) dx$$

$$g(x) = \frac{6 \cdot x^{-2}}{-2} - \frac{6 \cdot (x-4)^{-2}}{-2 \cdot 1} + C_2$$

$$g(x) = \frac{3}{(x-4)^2} - \frac{3}{x^2} + C_2$$

(3) כאן נקודת ההשקה:

$$0 = \frac{3}{(2-4)^2} - \frac{3}{2^2} + C_2 \rightarrow C_2 = 0$$

$$g(x) = \frac{3}{(x-4)^2} - \frac{3}{x^2}$$

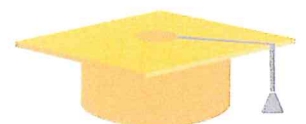
א) (2) ג.ה של  $g(x)$   $x \neq 0, 4$

ב) (3) נשווה את  $g'(x)$  לאפס כדי למצוא קיביון כנימי.

$$0 = \frac{6}{x^3} - \frac{6}{(x-4)^3} \quad | \cdot x^3(x-4)^3$$

$$0 = 6(x-4)^3 - 6x^3 \quad | :6$$

$$0 = (x-4)^3 - x^3$$



$$x^3 = (x-4)^3 \quad | \sqrt[3]{\quad}$$

$$x = x-4$$

אין נקודות  
חשובות כקייבין

| $x$     | $x < 0$ | $0 < x < 4$ | $x > 4$ |
|---------|---------|-------------|---------|
| $g'(x)$ | -       | +           | -       |
| $g(x)$  | ↘       | ↗           | ↘       |

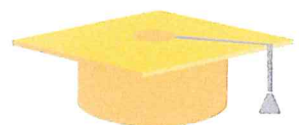
$$g'(-1) = (-)$$

$$g'(1) = (+)$$

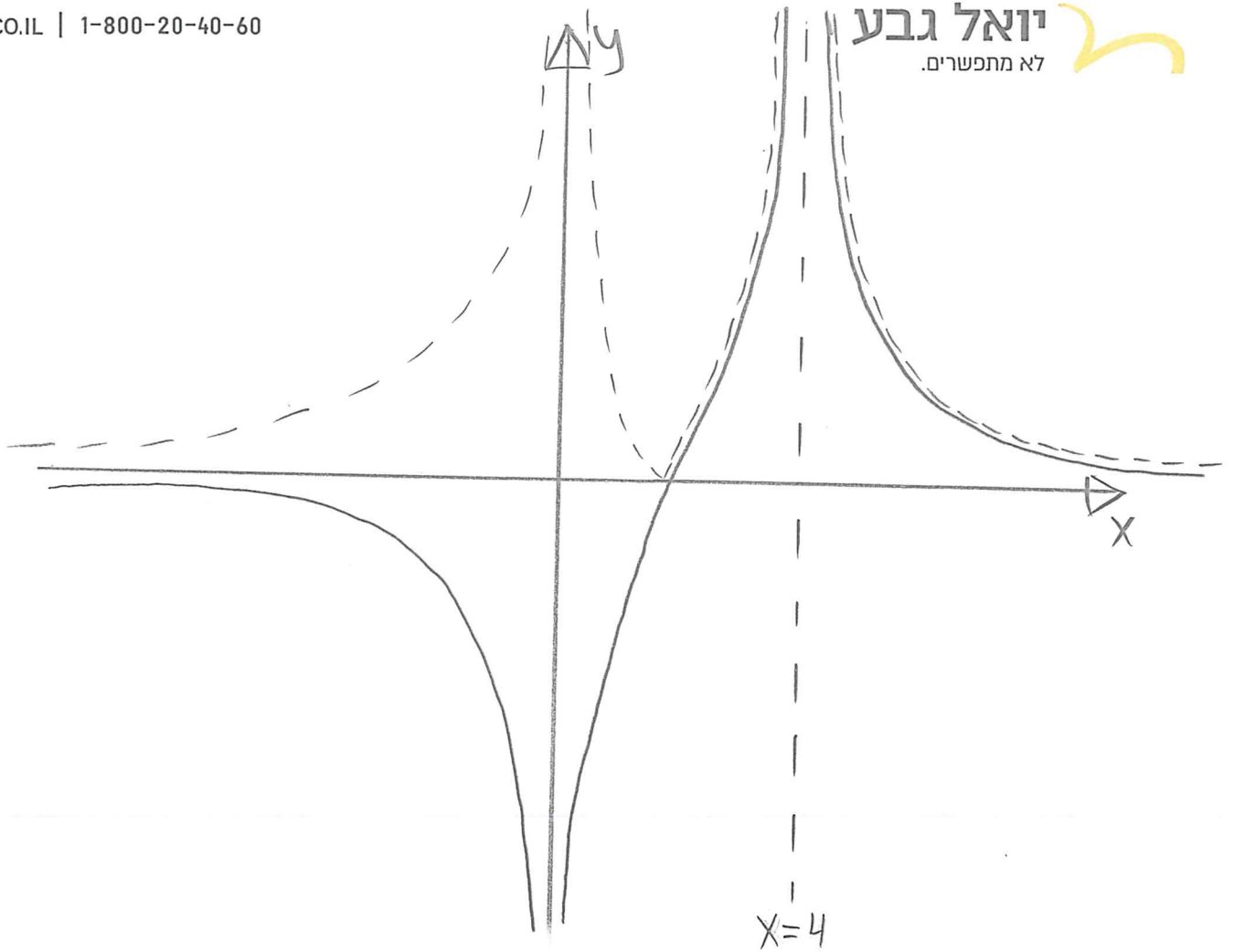
$$g'(5) = (-)$$

אחראי עליה:  $0 < x < 4$   
אחראי ירידה:  $x < 0$  או  $x > 4$

א (4) חשבה לאורך עיבודתן שיש אסימטות אנכיות  
?  $x=0$  !?  $x=4$  ויש אסימטות אנכיות ?  $y=0$   
כך אחראי הסרטוט.







ב  $f(x)$  מתקבל ממוק "קייבול" של גרמי השליוג  
של הפונ (אפ ביתס עזיר א.

$$\int_a^2 f(x) dx = t$$

ג חסוב עסימ בסעיל

כה שהפונ (אפ חוגכ

אמ ציר א ?  $x=2$ .

אמאר אנאר  $0 < a < 2$  אמאר !  $f(x)$  שליוג

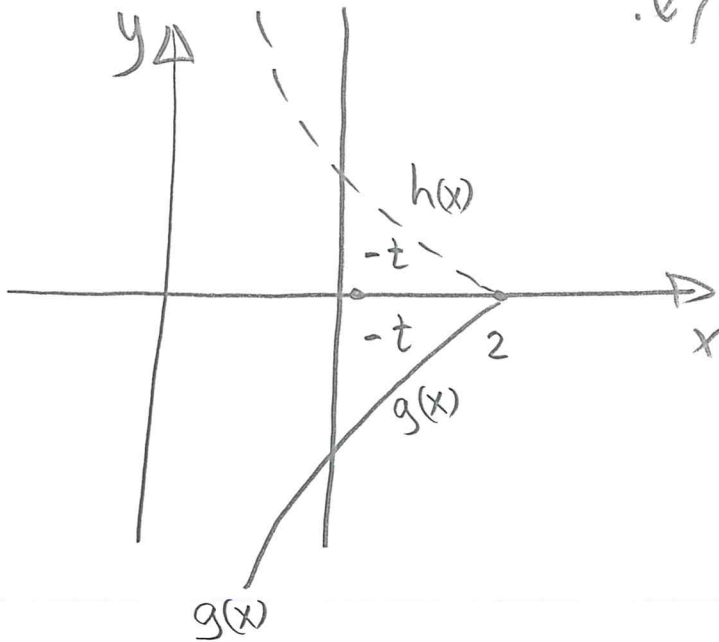
בתחום כה, אנצמא האינעגל שליוג, כפומר השלח

בין (אפ עזיר א בתחום הנ"ל הוא  $-t$ .



$$\int_a^z (h(x) - g(x)) dx = ?$$

משטח האינטגרל שהתבקשנו  
לחשב הוא השטח בין  
הפונקציות המבוקש.



מאחר !  $h(x)$  היא שיקוף של  $g(x)$  ביחס לציר  $x$   
ניתן לחסוק שהשטח בין  $g(x)$  לציר  $x$  שם בין  $0$  ל- $-t$   
אזכך האינטגרל הנדרש הוא  $-2t$ .



מתמטיקה, חורף תשע"ט, מס' 035581 + נספח

- 6 -

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x - 1$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ .

- א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.
- (2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  וקבע את סוגן.
- (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

גרף הפונקציה  $f(x)$  הוזז שמאלה ב- $\frac{\pi}{2}$  כך שהתקבלה פונקציה  $g(x)$  המוגדרת בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

- ב. (1) בטא את הפונקציה  $g(x)$  באמצעות הפונקציה  $f(x)$ .
- (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .
- (3) הוכח כי  $g(x)$  היא פונקציה זוגית.

לפניך 3 ביטויים, III-I :  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x + \pi) dx$  : I  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x + \frac{\pi}{2}) dx$  : II  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x - \frac{\pi}{2}) dx$  : III

ג. ציין איזה מן הביטויים III-I שווה ל- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ . נמק את תשובתך. אין צורך בחישוב.

7.10 (1)

$F(0) = 2 \sin(0) + \cos(2 \cdot 0) - 1 = 0 \rightarrow (0, 0)$  חיתוך עם ציר y

אסי לזהות  
כאן יש  
 $\cos 2x$ .

$2 \sin x + \cos 2x - 1 = 0$

$2 \sin x + 1 - 2 \sin^2 x - 1 = 0$

$2 \sin x (1 - \sin x) = 0$

$\sin x = 0$

$x = \pi k$

$k=0 \rightarrow x=0$

$k=1 \rightarrow x=\pi$

$\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$k=0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

חיתוך עם ציר x:

אלו הציורים א  
החיתוך עם הציורים הנתונים:

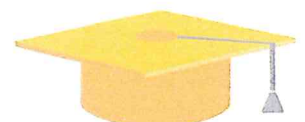
$(\pi, 0)$

$(\frac{\pi}{2}, 0)$

$(0, 0)$

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.**



7(2)  
 אולי תזכיר  
 אולי תזכיר  
 אולי תזכיר  

$$f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x$$

$$2\cos x - 4\sin x \cos x = 0$$

$$2\cos x(1 - 2\sin x) = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$k = -1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$$

זאתה הוצגת א  
 הנתן התשובות לקיצון  
 בתחום הקצב

| x       | $-\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---------|------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|
| $f'(x)$ |                  | +               | -               | +                | -                |
| $f(x)$  |                  | ↗               | ↘               | ↗                | ↘                |

$$f'(0) = + \quad f'(\frac{3\pi}{4}) = +$$

$$f'(\frac{\pi}{3}) = - \quad f'(\pi) = -$$

נמצא את שיעורי ה-y של נקודות הקיצון  
 וזו הבעיה בסוף התקווה

$$f(-\frac{\pi}{2}) = -4$$

$$f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

$$f(\frac{3\pi}{2}) = -4$$

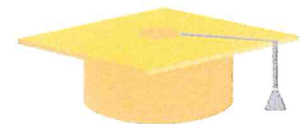
$$\min(-\frac{\pi}{2}, -4) \quad \max(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2})$$

$$\max(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}) \quad \min(\frac{3\pi}{2}, -4)$$

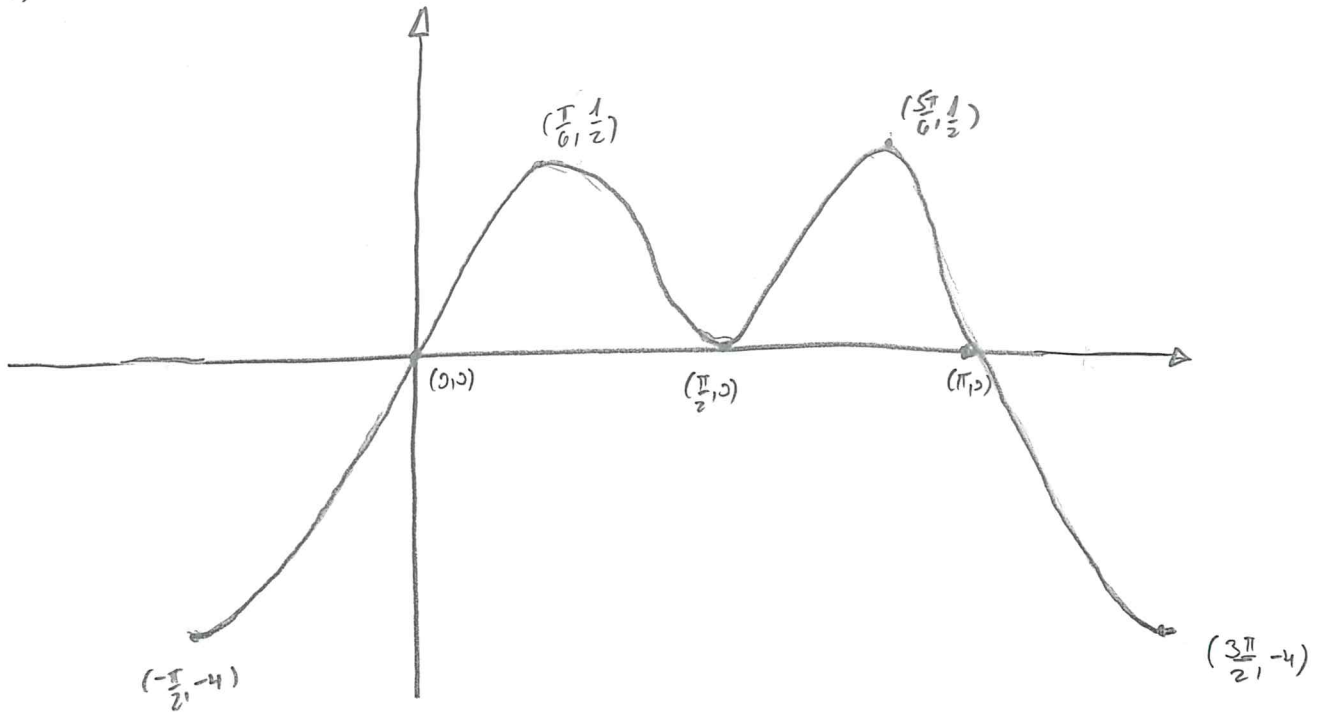
$$\min(\frac{\pi}{2}, 0)$$

למידע על פסיכומטרי  
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
 אל תתפשר עליה.



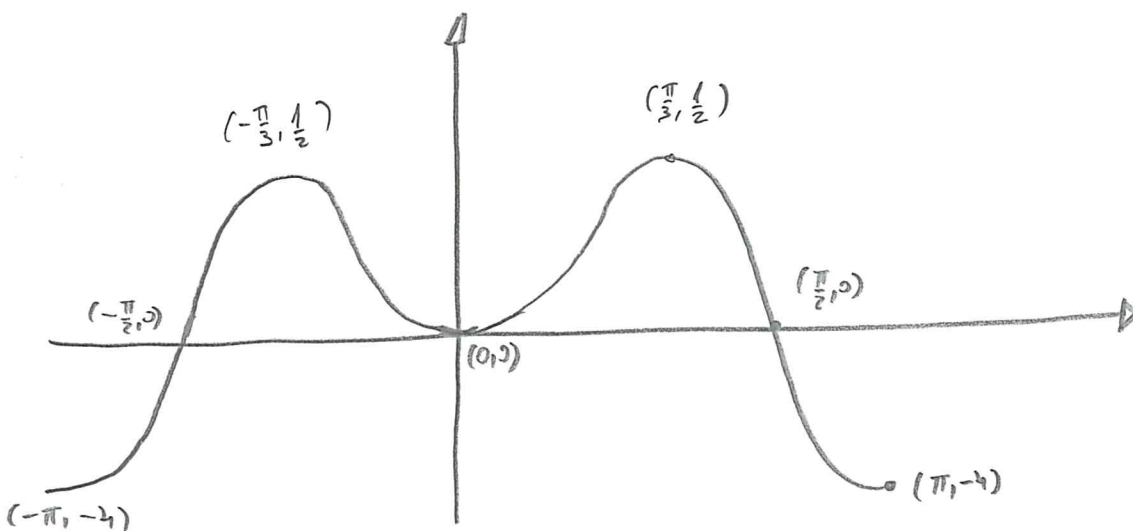
7(3)



7(1)  $g(x)$  תהי תלשי אלסקי  
של  $f(x)$  אלסקי

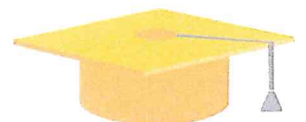
$$g(x) = f(x + \frac{\pi}{2})$$

(2)



למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



ג(3)

$$F(x) = 2\sin x + 1 - 2\sin^2 x - 1$$

$$F(x) = 2\sin x - 2\sin^2 x$$

$$g(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{2}) - 2\sin^2(x + \frac{\pi}{2})$$

נוף לסנות את  
f(x) אתי בחינה  
כפיה של גבע

$$g(x) = 2\cos x - 2\cos^2 x$$

$$g(-x) = 2\cos(-x) - 2\cos^2(-x)$$

$$g(-x) = 2\cos x - 2\cos^2 x$$

אפי הבהות:

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$$

אפי הבהות:  
 $\cos(-x) = \cos x$

$$g(x) = g(-x)$$

הסוג g(x) זוגי

ג.

ד. ע"י הסוכות מסוג (3)

האינטגרל

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

למאר את השטח הכלוא

בין הסוג לבין ה-x קצוות

$$x=0 \quad ; \quad x=\frac{\pi}{2}$$

שטח זה, וישאר לזה לשטח הכלוא בין g(x) לבין ה-x

בזקוות  $x = -\frac{\pi}{2}$  ! מאחר,  $x=0$ , היא השה אופקית f(x)

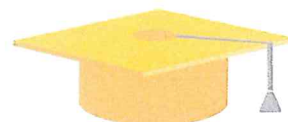
אופן:

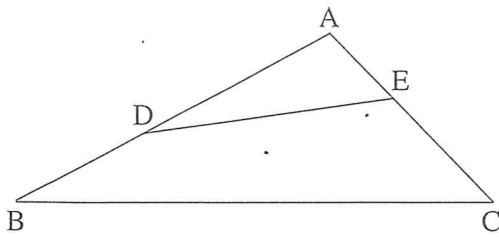
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x + \frac{\pi}{2}) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 g(x) dx$$

קיסוי מספר II

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**





8. במשולש ABC נתון:  $AC = 20$ ,  $AB = 30$ .  
 $\angle CAB = \alpha$ . הוא קבוע.  
 הנקודה D נמצאת על הצלע AB והנקודה E נמצאת על הצלע AC (ראה ציור).  
 נתון: שטח המשולש ADE שנוצר באופן הזה הוא רבע משטח המשולש ABC.  
 סמן את אורך הקטע AD ב- $x$ .  
 א. הבע באמצעות  $x$  את אורך הקטע AE.  
 ב. (1) הבע באמצעות  $\alpha$  את האורך המינימלי של הקטע DE.  
 (2) הסק מתת-סעיף ב(1) את הערך של  $x$  שבעבורו היחס  $\frac{DE}{BC}$  הוא מינימלי. הסבר.

1 ניתן שיהיו היחסים הוא  $\frac{1}{4}$

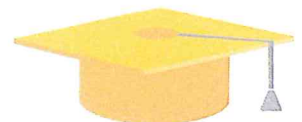
$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{AD \cdot AE \cdot \sin \alpha}{2}}{\frac{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2}} = \frac{x \cdot AE}{30 \cdot 20} = \frac{1}{4}$$

(מיין)

$$AE = \frac{600}{4x} \rightarrow \boxed{AE = \frac{150}{x} \text{ יח"א}}$$

ב(1) ע'ינו עקנו - כוף שמאר את אורך הקטע DE, מחקור אותה, ולמצוא את האינתינאום היחסי שלה.

אורך DE  $f(x) = \sqrt{AD^2 + AE^2 - 2 \cdot AD \cdot AE \cdot \cos \alpha}$



$$f(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{150}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{150}{x} \cdot \cos \alpha}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{150^2}{x^2} - 300 \cdot \cos \alpha}$$

$$f'(x) = \frac{2x + \frac{0 - 2x \cdot 150^2}{(x^2)^2}}{2 \sqrt{x^2 + \frac{150^2}{x^2} - 300 \cos \alpha}}$$

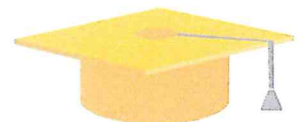
$$f'(x) = \frac{2x^5 - 2x \cdot 150^2}{x^4 \cdot 2 \sqrt{x^2 + \frac{150^2}{x^2} - 300 \cos \alpha}}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^4 - 150^2)}{2x^4 \sqrt{x^2 + \frac{150^2}{x^2} - 300 \cos \alpha}}$$

$$f'(x) = \frac{x^4 - 150^2}{x^3 \sqrt{x^2 + \frac{150^2}{x^2} - 300 \cos \alpha}} = 0$$

נחידע עב פסיכומטרי  
 ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
 אל תתפשר עליה.**





$$X^4 - 150^2 = 0 \rightarrow X^4 = 150^2 \rightarrow \boxed{X = \sqrt{150}}$$

\* הפתרון השלישי נכשל מאחר ! X חיובי.

נוצא שאכן מצאנו בקורס חומר ע"י

נצטרף שניה מקורבט שממשל עסיוול קיבולן פנימי

כל גב. מאחר ומכנה הנצטרף חיובי כאשר  $X = \sqrt{150}$

ניתן עכבוק סימן מונה כל גב.

$$f''(X) = 4X^3$$

$$f''(\sqrt{150}) = 4 \cdot (\sqrt{150})^3 = (+) \rightarrow \text{חומר}$$

מאחר ו בקשו את האורך האינינלי של DE,

$$X = \sqrt{150} \quad f(X) \quad \text{ב כולן}$$

$$f(\sqrt{150}) = \sqrt{(\sqrt{150})^2 + \frac{150^2}{(\sqrt{150})^2} - 300 \cos \alpha}$$

$$f(\sqrt{150}) = \sqrt{300 - 300 \cos \alpha} = \sqrt{300(1 - \cos \alpha)}$$

$$\boxed{f(\sqrt{150}) = 10\sqrt{3(1 - \cos \alpha)}} \quad \text{אורך DE האינינלי:}$$

ב (2) מאחר ! BC קבוע, וגם DE, BC חיוביים נ"מ

עקב קבוע שהמנה איננלי כאשר המונה איננלי.

ע"כ סעיף ב (א) DE איננלי כאשר  $X = \sqrt{150}$ .

