פתרון הבחינה

במתמטיקה

חורף תשע"ט, 2019, שאלון: 35482

מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

<u>סדרות</u>

1. נתונה סדרה הנדסית a_n שבה $a_2 = 6$, $a_5 = 162$.

א. מצא את מנת הסדרה ואת a_1 .

סכום האיברים במקומות האי־זוגיים בסדרה הוא 1640 .

ב. מצא את מספר האיברים במקומות האי־זוגיים בסדרה.

נתון כי מספר האיברים בסדרה הוא אי־זוגי.

ג. מצא את סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה.

הסדרה b_n היא סדרה הנדסית <u>אין־סופית</u>, ובה: $b_2 = \frac{5}{a_2}$, $b_1 = \frac{5}{a_1}$.

ד. (1) מצא את מנת הסדרה b_n .

(2) מצא את סכום הסדרה b_n .

א) נתון כי: $a_2=6$, $a_5=162$

לפי הנוסחה לאיבר כללי של סדרה הנדסית:

$a_1q^4=162$, $a_1q=6$

נחלק את שתי המשוואות זו בזו:

$$\frac{\cancel{a_1}q^4}{\cancel{a_1}\cancel{q}}=\frac{162}{6}$$

$q^3=27 \;/\sqrt[3]{\;}$

$\boxed{q=3}$

נציב את ה-q שמצאנו באחת המשוואות:

$a_1\cdot 3=6 \;/:3$

$\boxed{a_1=2}$

ב) נגדיר את מספר האיברים במקומות האי-זוגיים בתור n.

נתון כי סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 1640,

כלומר:

$$S_{n\ \text{אי-זוגיים}} = 1640$$

נשתמש בנוסחה לסכום סדרה הנדסית.

מכיוון שמדובר בסכום של איברים במקומות אי-זוגיים

נציב: $a_1 = 2$, ומנת הסדרה תהיה: $3^2 = 9$.

$$\frac{2\cdot(9^n-1)}{9-1} = 1640$$

$$\frac{\cancel{2}(9^n-1)}{\cancel{8}} = 1640$$

$$\frac{9^n-1}{4} = 1640 \quad /\cdot 4$$

$$9^n - 1 = 6560$$

$$9^n = 6561$$

$$9^n = 9^4$$

$$n = 4$$

$\boxed{\text{מספר האיברים במקומות האי-זוגיים בסדרה הוא } 4}$

ג) נתון כי מספר האיברים בסדרה כולה הוא אי-זוגי!
בסעיף הקודם גילינו כי מספר האיברים במקומות האי-זוגיים
הוא 4. כלומר, מספר האיברים במקומות הזוגיים הוא 3.
נמצא את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים
באמצעות הנוסחה לסכום סדרה הנדסית.
מכיוון שמדובר בסכום של איברים במקומות הזוגיים
נציב: $a_2=6$, ומנת הסדרה תהיה $3^2=9$:

$$S_{3\,\text{זוגיים}}=\frac{6\cdot(9^3-1)}{9-1}$$

$$\boxed{S_{3\,\text{זוגיים}}=546}$$

ד) נתונה סדרה הנדסית אינסופית b_n שבה:

$$b_1=\frac{5}{a_1},\ b_2=\frac{5}{a_2}$$

ידוע לנו כי $a_1=2$, $a_2=6$, ולכן:

$$b_1=\frac{5}{2},\ b_2=\frac{5}{6}$$

(1) נמצא את מנת הסדרה b_n:

$$\frac{b_2}{b_1}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{2}}=\frac{1}{3}$$

$\boxed{\text{מנת הסדרה } b_n \text{ היא } \frac{1}{3}}$

(2) נמצא את סכום הסדרה b_n באמצעות הנוסחה לסכום סדרה הנדסית אינסופית:

$$S=\frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{3}}$$

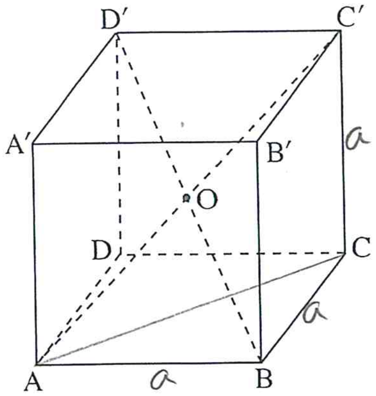
$$\boxed{S=3.75}$$

<u>טריגונומטריה במרחב</u>

.2 נתונה קובייה $ABCDA'B'C'D'$.

אורך צלע הקובייה הוא a.

האלכסונים AC' ו- BD' חוצים זה את זה בנקודה O.



א. **(1)** הבע באמצעות a את אורך אלכסון הבסיס, AC.

(2) מצא את גודל הזווית בין האלכסון AC' ובין המישור $ABCD$.

ב. הבע באמצעות a את אורך אלכסון הקובייה, AC'.

ג. מצא את גודל הזווית החדה שבין האלכסונים AC' ו- BD'.

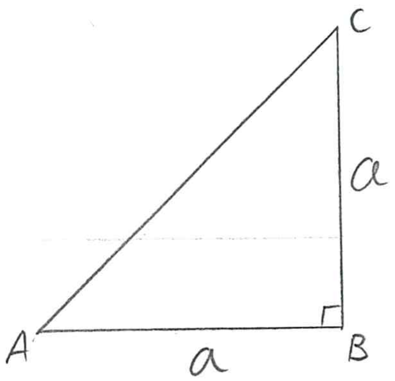
ד. הבע את שטח המשולש AOB באמצעות a.

נתון כי שטח המשולש AOB הוא $4\sqrt{2}$.

ה. חשב את a.

/המשך בעמוד 3/

א) (1) נתבונן ב- ΔABC שהוא ישר-זווית ושווה שוקיים.



נביע את AC באמצעות

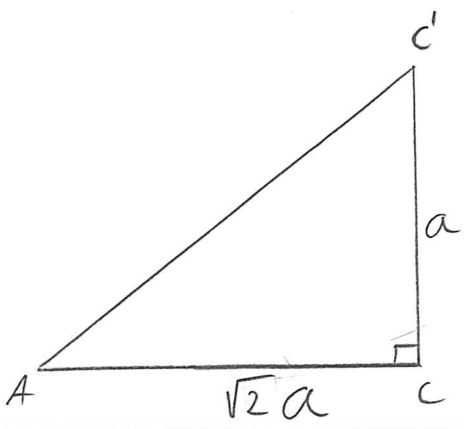
נשתמש בפיתגורס:

$$AC^2=a^2+a^2$$

$$AC^2=2a^2 \quad /\sqrt{\ }$$

$$\boxed{AC=\sqrt{2}a}$$

(2) נתבונן ב- $\Delta ACC'$ שהוא ישר זווית.



הזווית בין האלכסון AC' לבסיס $ABCD$

היא: $\measuredangle C'AC$

$$\tan\measuredangle C'AC=\frac{a}{a\sqrt{2}}$$

$$\tan\measuredangle C'AC=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\measuredangle C'AC=35.264^\circ}$$

ב) נתבונן ב- $\Delta ACC'$ שהוא ישר-זווית.

נביע את AC' באמצעות משפט פיתגורס:

$$AC'^2 = a^2 + (\sqrt{2}a)^2$$

$$AC'^2 = a^2 + 2a^2$$

$$AC'^2 = 3a^2 \quad /\sqrt{\ }$$

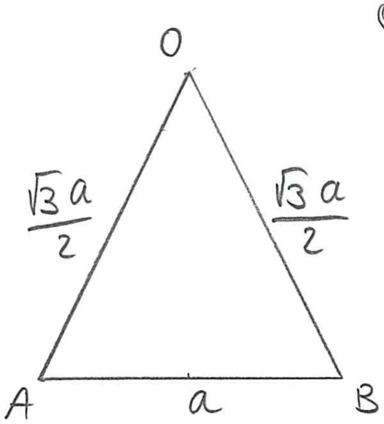
$$\boxed{AC' = \sqrt{3}a}$$

ג) אלכסוני הקובייה שווים זה לזה ולכן:

$$BD' = AC' = \sqrt{3}a$$

נתון כי האלכסונים חוצים זה את זה בנקודה O, ולכן:

$$OA = OB = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$



נתבונן ב- ΔAOB שהוא שווה-שוקיים.

נחשב את הזווית $\measuredangle AOB$ באמצעות

משפט הקוסינוסים:

$$a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot\cos\measuredangle AOB$$

$$a^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{2}\cdot\cos\measuredangle AOB$$

$$-\frac{a^2}{2} = -\frac{3a^2}{2}\cdot\cos\measuredangle AOB \quad /: -\frac{3a^2}{2}$$

$$\cos\measuredangle AOB = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\measuredangle AOB = 70.529^\circ}$$

ד) נתבונן ב- ΔAOB שהוא שווה-שוקיים.
נחשב את שטח המשולש:

$$S_{AOB} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot\sin 70.529^\circ}{2}$$

$$\boxed{S_{AOB} = 0.354a^2}$$

ה) נתון כי: $S_{AOB} = 4\sqrt{2}$.
נשווה את הנתון לתוצאה שמצאנו בסעיף הקודם:

$$0.354a^2 = 4\sqrt{2} \quad / :0.354$$

$$a^2 = 15.98 \quad /\sqrt{\ }$$

$$\boxed{a = 4}$$

<u>הערה</u>: ניתן היה לפתור את סעיף ג' גם על-ידי הורדת גובה במשולש שווה-שוקיים AOB.

פרק שני — גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על **שתיים** מן השאלות 5-3 (לכל שאלה — $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

3. נתונה הפונקציה $f(x)=\sin^2x+6$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. (1) סרטט במערכת צירים נפרדת סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 \le x \le \pi$.

(2) חשב את השטח שבין גרף הנגזרת $f'(x)$ ובין ציר ה־ x בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

א. נציב $f(x)=0$, נצטרך מציאת נק' החיתוך עם ציר x:

$$\sin^2x+6=0$$
$$\sin^2x=-6$$

אין פתרון - לא ניתן להוציא שורש ריבועי ממספר שלילי:

נציב $x=0$ נצטרך מציאת נק' החיתוך עם ציר y:

$$f(0)=\sin^2 0+6=6 \Rightarrow \boxed{(0,6)}$$

ב. על מנת למצוא את נק' הקיצון נגזור ונשווה ל-0:

$$f'(x)=2\sin x\cos x=0$$
$$\sin 2x=0$$

$$\sin 2x = \sin(0)$$

$$2x = 0 + 2\pi k \;/ :2 \qquad\qquad 2x = \pi + 2\pi k \;/ :2$$

$$x = \pi k \qquad\qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

k	x	
0	0	✓
1	π	✓
-1	$-\pi$	✓
~~2~~	~~2π~~	
~~-2~~	~~-2π~~	

k	x	
0	$\frac{\pi}{2}$	✓
~~1~~	~~$\frac{3\pi}{2}$~~	
-1	$-\frac{\pi}{2}$	✓
~~-2~~	~~$-\frac{3\pi}{2}$~~	

שיעורי ה- x של הנק' החשודות לקיצון :

$x = 0$

$x = \pi$

$x = -\pi$

$x = \frac{\pi}{2}$

$x = -\frac{\pi}{2}$

מציאת שיעורי ה- y של נק' הקיצון החשודות :

$$f(0) = 6 \Rightarrow (0,6)$$

$$f(\pi) = \sin^2(\pi) + 6 = 6 \Rightarrow (\pi, 6)$$

$$f(-\pi) = \sin^2(-\pi) + 6 = 6 \Rightarrow (-\pi, 6)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 6 = 7 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 7\right)$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 6 = 7 \Rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, 7\right)$$

מציאת סוג הקיצון:

x	$-\pi$	(-0.75π)	$-\frac{\pi}{2}$	(-0.25π)	0	(0.25π)	$\frac{\pi}{2}$	(0.75π)	π
y'	0	+	0	−	0	+	0	−	0
y		↗		↓		↗		↓	

נציב את ערכי הביניים בפונקציית הנגזרת על מנת למצוא תחומי עליה וירידה של הפונקציה:

$$f'(x) = 2\sin x\cos x$$
$$f'(x) = \sin 2x$$

$$f'(-0.75\pi) = \sin(2\cdot(-0.75\pi)) = +1$$
$$f'(-0.25\pi) = \sin(2\cdot(-0.25\pi)) = -1$$
$$f'(0.25\pi) = \sin(2\cdot 0.25\pi) = +1$$
$$f'(0.75\pi) = \sin(2\cdot 0.75\pi) = -1$$

לסיכום, נק' הקיצון של הפונקציה הן:

$(-\pi,6)$ קצה min

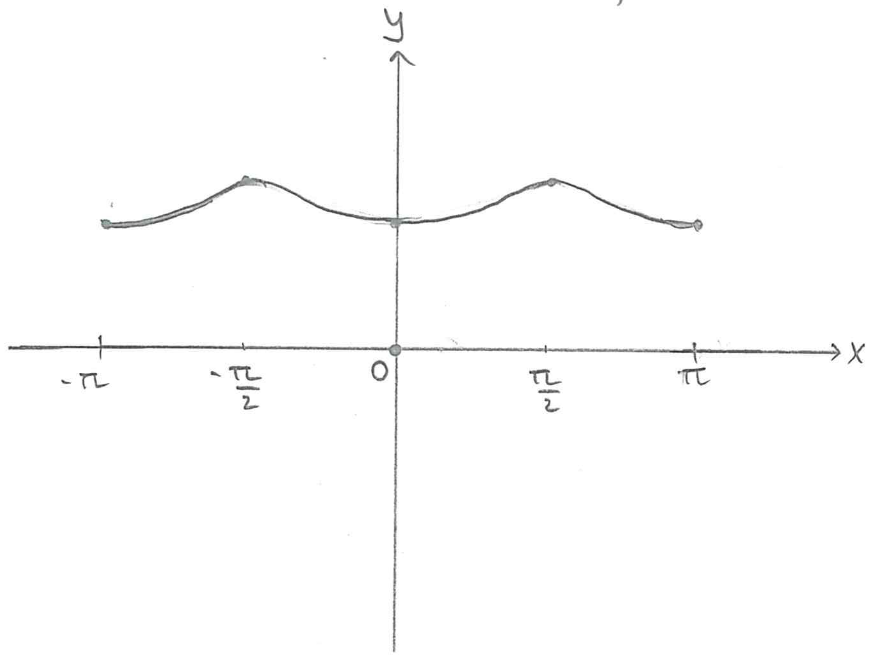
$(\pi,6)$ קצה min

$(0,6)$ min

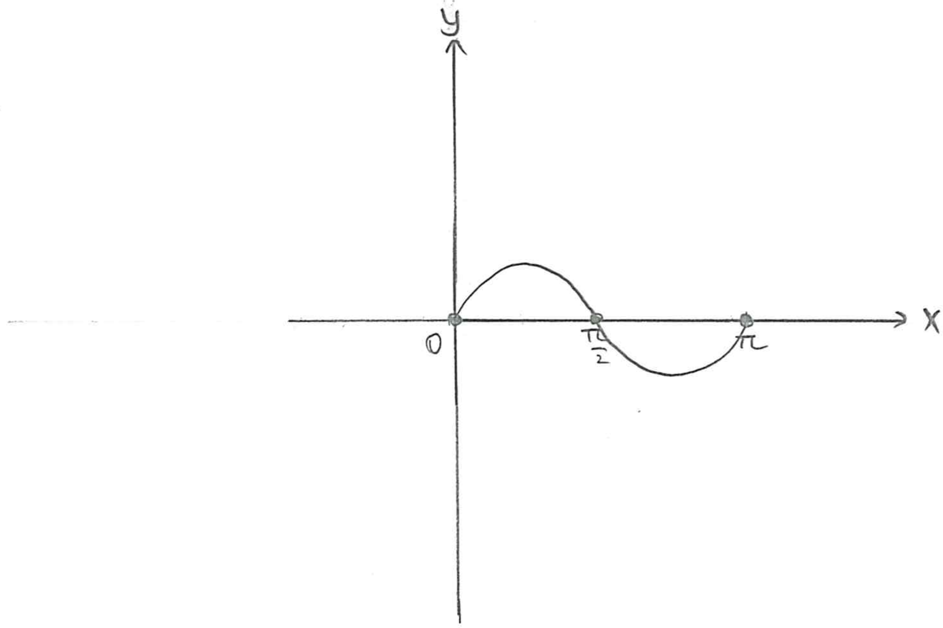
$(-\frac{\pi}{2},7)$ max

$(\frac{\pi}{2},7)$ max

א. שרטוט גרף הפונקציה:



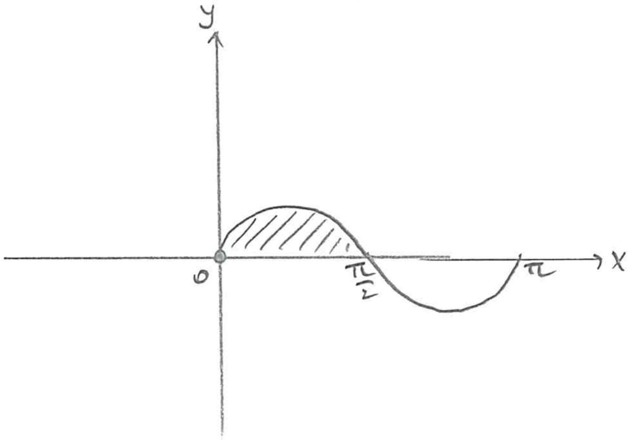
ב. (1) שרטוט גרף הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 \le x \le \pi$:



נשרטט לפי הכללים הבאים:

- כאשר הפונקציה $f(x)$ עולה, הנגזרת $f'(x)$ חיובית $(0 < x < \frac{\pi}{2})$.
- כאשר הפונקציה $f(x)$ יורדת הנגזרת $f'(x)$ שלילית $(\frac{\pi}{2} < x < \pi)$.
- בשיעורי ה-x של נק' קיצון של $f(x)$; $f'(x)$ חותכת את ציר ה-x.

3. (2) חישוב השטח שבין הגרף $f'(x)$ לבין ציר ה-x בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - 0)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)\,dx =$$

$$-\frac{\cos 2x}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad \underline{x=\frac{\pi}{2}} : -\frac{\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\underline{x=0} : -\frac{\cos(2\cdot 0)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{S_{\text{מקסי}} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ יח"ר}}$$

4. נתונה הפונקציה $f(x)=(x+2)e^{x+3}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ חיובית.

ג. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+a$. a הוא פרמטר. נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לישר $y=\frac{1}{2}$.

ה. מצא את a . נמק.

א) תחום הגדרה: $\underline{\underline{\text{כל } x}}$

ב) מציאת תחום חיוביות: נשווה את $f(x)$ ל-0

$0=(x+2)e^{x+3}$

$x+2=0$

$x=-2$

$e^{x+3}=0$

אין פתרון - ביטוי מעריכי חיובי תמיד.

ניעזר בהצבה של ציר מספרים:

$f(-3)=(-3+2)e^{-3+3}$

$f(-3)=-1$

$f(0)=(0+2)e^{0+3}$

$f(0)=40.17$

תחום החיוביות של $f(x)$: $\underline{\underline{x>-2}}$

ג) מציאת נקודות קיצון: נגזור פונק' מכפלה

$f'(x) = 1 \cdot e^{x+3} + (x+2)e^{x+3}$

נוציא גורם משותף

$f'(x) = e^{x+3}(1+x+2)$

$f'(x) = e^{x+3}(x+3)$

נציב $f'(x)=0$

$0 = e^{x+3}(x+3)$

$e^{x+3} = 0$ אין פתרון, ביטוי מעריכי חיובי תמיד

$x+3=0$

$x=-3$

מציאת שיעור y: נציב ב $f(x)$

$f(-3) = (-3+2) \cdot e^{-3+3}$

$f(-3) = -1$

ניעזר בטבלה למציאת סוג הקיצון

x	$x=-4$	-3	$x=0$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗

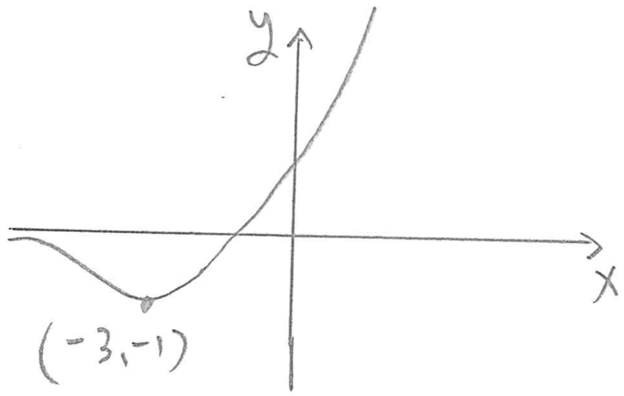
$f'(-4) = -0.36$

$f'(0) = 60.26$

$(-3,-1)$

נקודת מינימום

ד)



ה) $g(x)=f(x)+a$

הפונקציה $g(x)$ מהווה הזזה של $f(x)$ ב-$\pm a$ יחידות כלפי מעלה/מטה. על מנת שגרף הפונקציה $g(x)$ ישיק לישר $y=\frac{1}{2}$, שיעור ה-y בנק' המינימום של הפונקציה צריך להיות $\frac{1}{2}$.

שיעור ה-y בנק' המינימום של הפונקציה $f(x)$ הוא -1, ולכן על מנת ששיעור ה-y בנק' המינימום של הפונקציה $g(x)$ יהיה $\frac{1}{2}$, עלינו להזיז את הפונקציה 1.5 יחידות כלפי מעלה, ולכן $\underline{\underline{a=1.5}}$.

5. נתונה הפונקציה $f(x) = 2\ln(x) + 2\ln(x^2) - 3$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

ג. מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. הוסף בקו מקווקו למערכת הצירים שסרטטת בסעיף ד סקיצה של גרף הפונקציה $-f(x)$.

א) תחום הגדרה: הביטוי שבתוך ה-ln צריך להיות חיובי.

ולכן: $x^2 > 0$ וגם $x > 0$

$x \neq 0$ וגם $x > 0$

תחום ההגדרה: $\underline{\underline{x > 0}}$

ב) נקודות חיתוך עם ציר x:

ראשית, כאשר x חיובי, $\ln(x^2) = 2\ln x$

ולכן: $2\ln(x^2) \to 2 \cdot 2\ln(x) \to 4\ln x$

כלומר: $f(x) = 2\ln x + 4\ln x - 3$

נציב $f(x)=0$ $\quad 0 = 2\ln x + 4\ln x - 3$

$3 = 6\ln x$

$\ln x = \frac{1}{2}$

$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ $\qquad \underline{\underline{(\sqrt{e}, 0)}}$

ג) נגזור את הפונקציה: $f(x)=6\ln x-3$

$$f'(x)=6\cdot\frac{1}{x}$$

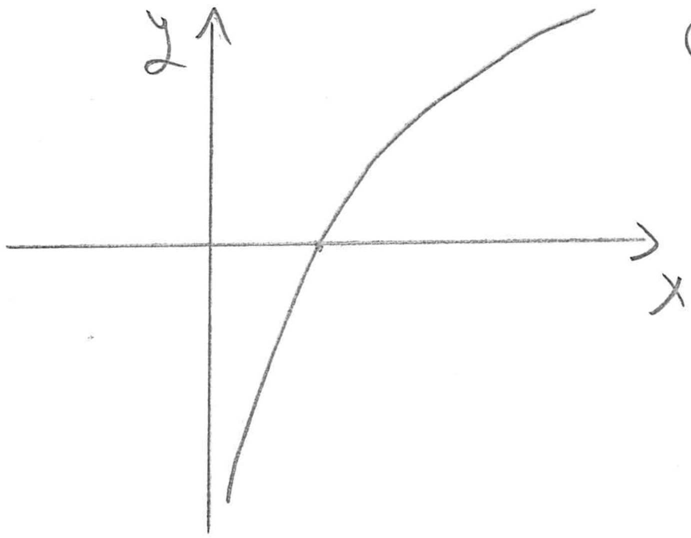
$$f'(x)=\frac{6}{x}$$

מכיוון שתחום ההגדרה הוא $x>0$, הנגזרת הינה מנה של שני ביטויים חיוביים, ולכן $f'(x)>0$ לכל ערך של x בתחום ההגדרה של הפונקציה.

כלומר:

תחום עלייה: $x>0$
תחום ירידה: אף x

ד)



ה) הפונקציה $-f(x)$ הינה הפונקציה הנגדית לפונקציה $f(x)$,
ולכן הפונקציות סימטריות ביחס לציר x. כלומר:

+ לשיעורי x שבהם ערכי $f(x)$ חיוביים, נקבל שיעורי x שבהם ערכי $-f(x)$ שליליים ולהפך.

+ לשיעורי x שבהם $f(x)$ היא פונקציה עולה, נקבל שיעורי x שבהם $-f(x)$ היא פונקציה יורדת ולהפך.