פתרון הבחינה

במתמטיקה

חורף תשע"ט, 2019, שאלון: 35481

מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

1. בפיצרייה "נפולי" המחיר של פיצה משפחתית גבוה פי 3 מן המחיר של פיצה אישית.

בפיצרייה הכריזו על מבצע:

10% הנחה על קניית פיצה אישית,

20% הנחה על קניית פיצה משפחתית.

תלמידי שכבה י"א קנו 63 פיצות במבצע, חלקן אישיות וחלקן משפחתיות.

נתון כי מספר הפיצות המשפחתיות היה גדול פי 2.5 ממספר הפיצות האישיות.

תלמידי שכבה י"א שילמו על הפיצות 3,477.6 שקלים סך הכול.

א. חשב את המחיר המקורי של פיצה אישית, ואת המחיר המקורי של פיצה משפחתית (המחירים שלפני ההנחה).

ב. לאחר שבוע הכריזו על מבצע אחר:

מי שישלם את המחיר המקורי בעבור שתי פיצות אישיות, יקבל פיצה אישית שלישית חינם.

כמה פיצות אישיות אפשר לקנות במבצע הזה תמורת 1,232 שקלים (כולל הפיצות שהתקבלו בחינם)?

אופן בניית הטבלה:

נסמן: X שקלים כמחיר פיצה אישית לפני הנחה
$3X$ שקלים כמחיר פיצה משפחתית לפני הנחה

נתון כי המחיר של פיצה משפחתית גבוה פי 3 מהמחיר פיצה אישית.

מחירים לאחר הנחות:

פיצה אישית: הנחה של 10% ולכן מחירה יסומן כ: $0.9x$.

פיצה משפחתית: הנחה של 20% ולכן מחירה יסומן כ: $0.8\cdot 3x = 2.4x$

* התלמידים קנו 63 פיצות במבצע, חלקן אישיות וחלקן משפחתיות, מספר הפיצות המשפחתיות גדול פי 2.5 ממספר הפיצות האישיות ולכן ניתן לסמן:

מס' הפיצות האישיות: y
מס' הפיצות המשפחתיות: $2.5y$

סך הם קנו 63 פיצות ולכן:

$y+2.5y=63$

$3.5y=63$

$\boxed{y=18}$ → נרכשו 18 פיצות אישיות ו-45 פיצות משפחתיות במחירי המבצע.

(נציג את הנתונים עד כה בטבלה הבאה:

		כמות	מחיר ליחידה	סה"כ
פיצה אישית	לפני הנחה		X	
	אחרי הנחה	18	$0.9X$	$18\cdot 0.9X = 16.2X$
פיצה משפחתית	לפני הנחה		$3X$	
	אחרי הנחה	45	$2.4X$	$45\cdot 2.4X = 108X$

נתון כי התלמידים שילמו סך הכל 3,477.6 שקלים על הפיצות ולכן:

$$16.2X + 108X = 3477.6$$

$$124.2X = 3477.6 \quad /:124.2$$

$$\boxed{X = 28}$$

א. מחירה המקורי של פיצה אישית: $X =$ 28 שקלים.

מחירה המקורי של פיצה משפחתית: $3X = 3\cdot 28 =$ 84 שקלים

ב. לפי המבצע החדש, במחיר <u>המקורי</u> של 2 פיצות אישיות נקבל 3 פיצות אישיות.
המחיר של 2 פיצות אישיות במחירן המקורי הוא: 56 שקלים $= 2\cdot 28$.
כלומר, ב- 56 שקלים נקבל 3 פיצות אישיות.

על מנת לחשב את מספר הפיצות שניתן לקנות ב- 1,232 שקלים, נעזר בטבלה:

כמות	מחיר ליחידה	סה"כ
3	$\frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$	56
$\frac{1232}{18\frac{2}{3}} = \boxed{66}$	$18\frac{2}{3}$	1232

לסיכום, מסעדת כמה שף 1,232 שקלים נקנה 66 פיצות.

2. בציור שלפניך נתון מעגל שמרכזו M.

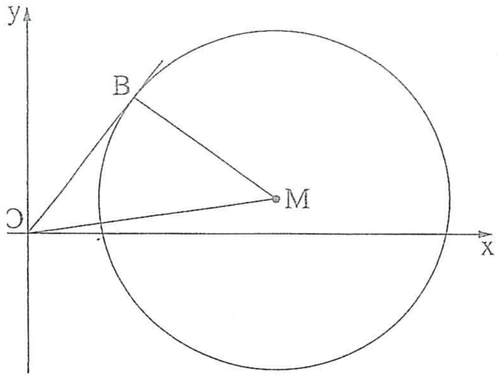
ישר העובר בראשית הצירים משיק למעגל בנקודה $B(3,4)$.

חיברו את מרכז המעגל, M, עם ראשית הצירים, O.

נתון: משוואת הישר OM היא $y=\frac{1}{7}x$.

א. מצא את משוואת הישר BM.

ב. מצא את משוואת המעגל.



המשך הקטע BM חותך את המעגל בנקודה C.

ג. מצא את שטח המשולש OBC.

העבירו מעגל נוסף כך ש־ OM הוא קוטר שלו.

ד. האם המרכז של המעגל הנוסף נמצא בתוך המעגל שמרכזו M, עליו או מחוצה לו? נמק ופרט את חישוביך.

א. נתון כי OB משיק למעגל שמרכזו M.
BM הינו רדיוס של המעגל.
לכן, $BM \perp OB$ בנקודת ההשקה.
לישרים מאונכים שיפועים הפכיים ונגדיים. לכן, נמצא את שיפוע OB
ולפיו את שיפוע BM.

$$m_{OB} = \frac{y_B - y_0}{x_B - x_0} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$$

מכאן, שיפוע BM: $m_{BM} = -\frac{3}{4}$.

משוואת BM:

נקודה: $B(3,4)$
שיפוע: $-\frac{3}{4}$

$$y-4 = -\frac{3}{4}(x-3)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4} + 4$$

$$\boxed{y = -\frac{3}{4}x + 6\frac{1}{4}}$$

ב. על מנת למצוא את משוואת המעגל יש למצוא את רדיוס המעגל ושיעורי נקודת המרכז.
נתון כי M היא מרכז המעגל וכי היא נמצאת על הישר OM: $y=\frac{1}{7}x$.
M מהווה נקודת החיתוך בין הישר OM לישר BM שמצאנו בסעיף א' ולכן:

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{1}{7}x \\ y&=-\frac{3}{4}x+6\frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \frac{1}{7}x&=-\frac{3}{4}x+6\frac{1}{4} \\ \frac{25}{28}x&=6\frac{1}{4} \quad /:\frac{25}{28} \\ x&=7 \end{aligned}$$

נציב במשוואת הישר $y=\frac{1}{7}x$ למציאת שיעור ה-y של הנקודה M:

$$y=\frac{1}{7}\cdot 7=1$$

לכן: $M(7,1)$

נמצא את רדיוס המעגל ע"י נוסחת מרחק בין 2 הנקודות M ו-B:

$$\left.\begin{aligned} &M(7,1) \\ &B(3,4) \end{aligned}\right\} \quad d=\sqrt{(7-3)^2+(1-4)^2}=5$$

רדיוס המעגל: 5 יח'.

לסיכום, משוואת המעגל היא:

$$\boxed{(x-7)^2+(y-1)^2=25}$$

ג. שטח המשולש OBC הינו שטח של משולש ישר זווית ($BM \perp OB$):

$$S_{\Delta OBC} = \frac{BC \cdot OB}{2}$$

מציאת אורך OB:

$$\left.\begin{matrix} O(0,0) \\ B(3,4) \end{matrix}\right\} \quad d = \sqrt{(0-3)^2 + (0-4)^2} = 5 \text{ יח'}$$

מציאת אורך BC:

BC הוא המשך BM כך ש-C נמצאת על המעגל. לכן, BC הינו קוטר במעגל:

$$BC = 2R$$
$$R = 5$$
$$BC = 10 \text{ יח'}$$

$$\boxed{S_{\Delta OBC} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25 \text{ יח"ר}}$$

ד. OM הוא קוטר המעגל ולכן מרכז המעגל נמצא באמצע הקטע OM.
נסמן את מרכז המעגל בנקודה D ונמצא את הנקודה בעזרת הנוסחה לאמצע קטע.

$$\left.\begin{matrix} X_D = \frac{X_O + X_M}{2} = \frac{0+7}{2} = 3.5 \\ Y_D = \frac{Y_O + Y_M}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5 \end{matrix}\right\} \text{ נק' מרכז המעגל היא } D(3.5, 0.5)$$

נבדוק מהו המרחק בין הנקודה D לנקודה M.
במידה והמרחק יהיה קטן מרדיוס המעגל המקורי ($R = 5$), הנקודה D תימצא בתוכו.
במידה והמרחק יהיה שווה לרדיוס המעגל המקורי, הנקודה D תהיה על המעגל.
במידה והמרחק יהיה גדול מרדיוס המעגל המקורי, הנקודה D תהיה מחוץ למעגל.

$$\left.\begin{array}{l} D(3.5, 0.5) \\ M(7, 1) \end{array}\right\} \quad d = \sqrt{(3.5-7)^2 + (0.5-1)^2} = 3.535$$

$$3.535 < \underset{\text{ר׳}}{5}$$

ולכן: $\boxed{\text{הנקודה D נמצאת בתוך המעגל שמרכזו M.}}$

3. ל־ 8% בדיוק מחברי מועדון ג'ודו ארצי יש חגורה שחורה.

א. בוחרים באקראי 6 מן החברים במועדון.

(1) מהי ההסתברות שבדיוק ל־ 2 מהם יש חגורה שחורה?

(2) מהי ההסתברות שאין חגורה שחורה לאף לא אחד מן ה־ 6 שנבחרו?

$\frac{1}{5}$ מן החברים במועדון הם מדריכים, והשאר חניכים.

75% מחברי המועדון שיש להם חגורה שחורה הם מדריכים.

ב. בחרו באקראי חבר מועדון.

מהי ההסתברות שהחבר שנבחר הוא חניך שיש לו חגורה שחורה?

ג. בחרו באקראי חניך חבר במועדון.

מהי ההסתברות שיש לו חגורה שחורה?

נגדיר מאורעות: A - לחבר מועדון יש חגורה שחורה

$\bar{A}$ - לחבר מועדון אין חגורה שחורה.

לפי הנתון: $P(A)=0.08$

ולכן: $P(\bar{A})=0.92$

(א) נציג את הנתונים בטבלת אפשרויות:

A	0.08	0	1	2	3	4	5	6
$\bar{A}$	0.92	6	5	4	3	2	1	0

(1) ההסתברות שבדיוק ל-2 מתוך 6 חברי המועדון יש חגורה שחורה:

$$P_6(2)=\binom{6}{2}\cdot 0.08^2\cdot 0.92^4=\boxed{0.0688}$$

(2) ההסתברות שאין חגורה שחורה לאף לא אחד מן ה-6 שנבחרו:

$$P_6(0)=\binom{6}{0}\cdot 0.08^0\cdot 0.92^6=\boxed{0.6064}$$

(ב) נגדיר את המאורעות החדשים: B- חבר המועדון הוא מדריך.

$\bar{B}$- חבר המועדון הוא חניך.

נציג את הנתונים בטבלה דו-מימדית:

	$\bar{A}$	A	
0.2	0.14	0.06	B
0.8	0.78	0.02	$\bar{B}$
1	0.92	0.08	

ידוע מהסעיף הקודם ש:

$P(A)=0.08$

$P(\bar{A})=0.92$

לפי הנתון:

$P(B)=0.2$

ולכן:

$P(\bar{B})=0.8$

לפי הנתון: $P(B/A)=0.75$

לפי הנוסחה להסתברות מותנית:

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=0.75$$

נציב $P(A)=0.08$:

$$\frac{P(A\cap B)}{0.08}=0.75 \quad /\cdot 0.08$$

$$P(A\cap B)=0.06$$

נשלים את שאר הטבלה:

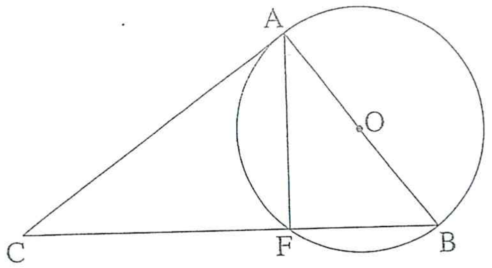
$P(A\cap\bar{B})=0.02$, $P(\bar{A}\cap B)=0.14$, $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0.78$

על-פי הנתונים שהשלמנו בטבלה:

$$\boxed{P(A \cap \bar{B}) = 0.02}$$

ד) לפי הנוסחה להסתברות מותנית:

$$P(A / \bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.02}{0.8} = \boxed{0.025}$$



4. נתון מעגל שמרכזו O.

C היא נקודה מחוץ למעגל, כך שהישר CA משיק למעגל בנקודה A.

מן הנקודה C העבירו ישר החותך את המעגל

בנקודות F ו- B, כמתואר בציור, כך ש- AB הוא קוטר במעגל.

א. הוכח: $\triangle AFB \sim \triangle CAB$.

נתון: $FB = 9$, $FC = 16$.

ב. חשב את קוטר המעגל, AB.

ג. חשב את שטח המשולש CFA.

ד. האם $\triangle CAB \sim \triangle CFA$? הוכח את תשובתך.

א

	טענה	נימוק
1	CA משיק למעגל בנקודה A	נתון
2	AB קוטר במעגל	נתון
3	$\sphericalangle CAB = 90°$	במעגל הרדיוס מאונך למשיק הפוגש אותו בנקודת ההשקה + שורות 1,2
4	$\sphericalangle AFB = 90°$	במעגל זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה ל- 90 + שורה 2.
5	$\sphericalangle CAB = \sphericalangle AFB$	כלל המעבר
6	$\sphericalangle ABF = \sphericalangle CBA$	זווית משותפת.
7	$\triangle AFB \sim \triangle CAB$	לפי משפט דמיון זווית-זווית + שורות 6,5.

מ.ש.ל א

ב

	טענה	נימוק
8	$FB=9$ יח', $FC=16$ יח'	נתון
9	$CB=CF+FB$	חיבור קטעים
10	$CB=16+9=25$ יח'	הצבה + חישוב.
11	$\frac{FB}{AB}=\frac{AB}{CB}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים + שורה 7.
12	$\frac{9}{AB}=\frac{AB}{25}$	הצבה + שורות 8, 10.
13	$AB^2=225$	חישוב
14	$AB=15$ יח'	חישוב

מ.ש.ל ב'

ג

	טענה	נימוק
15	$\triangle AFB$ ישר-זווית	משולש שבו זווית ישרה + שורה 4.
16	$AF^2+FB^2=AB^2$	משפט פיתגורס ב- $\triangle AFB$.
17	$AF^2+9^2=15^2$	הצבה + שורות 8, 14.
18	$AF^2=144$	חישוב
19	$AF=12$ יח'	חישוב.
20	$\measuredangle AFC=180-\measuredangle AFB$	זוויות צמודות משלימות ל-180°.
21	$\measuredangle AFC=180-90=90$	הצבה + חישוב + שורה 4.

	טענה	נימוק
22	ΔAFC ישר-זווית	משולש שבו זווית ישרה + שורה 21.
23	$S_{AFC} = \frac{AF \cdot FC}{2}$	נוסחה לשטח משולש ישר-זווית
24	$S_{AFC} = \frac{12 \cdot 16}{2}$	הצבה + שורות 8, 19.
25	$S_{AFC} = 96$ יח"ר	

מ.ש.ל ג'

ד)

	טענה	נימוק
26	$\sphericalangle AFC = \sphericalangle CAB$	לפי המספר + שורות 21, 4.
27	$\sphericalangle ACF = \sphericalangle BCA$	זווית משותפת
28	$\Delta CFA \sim \Delta CAB$	לפי משפט דמיון זווית-זווית.

מ.ש.ל ד'

5. נתון משולש ABC.

הנקודה D נמצאת על הצלע AB כך ש- $BD = 2DA$ (ראה ציור).

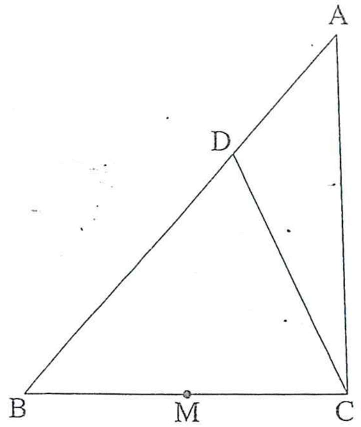
נתון: $\sphericalangle DCB = 65^\circ$, $DC = 10$, $BC = 12$.

א. חשב את אורך הקטע BD.

ב. חשב את שטח המשולש ADC.

הנקודה M היא אמצע הקטע BC.

ג. האם הנקודה M היא מרכז המעגל החוסם את המשולש BDC ? נמק.



א) נתבונן ב- ΔBDC

משפט הקוסינוסים:

$BD^2 = 10^2 + 12^2 - 2\cdot10\cdot12\cdot\cos65^\circ$

$BD^2 = 142.572$

$\boxed{BD = 11.94}$

ב) נתבונן ב- ΔBDC

משפט הסינוסים:

$$\frac{11.94}{\sin65} = \frac{12}{\sin\sphericalangle BDC}$$

$$\sin\sphericalangle BDC = \frac{12\cdot\sin65}{11.94}$$

$\sin\sphericalangle BDC = 0.911$

$\sphericalangle BDC = 65.644^\circ$

$\sphericalangle ADC = 180^\circ - \sphericalangle BDC = 180^\circ - 65.644^\circ = 114.356^\circ$

נתון גם ש: $BD=2DA$, כלומר: $DA=\frac{1}{2}\cdot BD$

נציב: $BD=11.94$:

$DA=\frac{1}{2}\cdot 11.94$

$DA=5.97$

<u>נתבונן ב- ΔADC</u>

נוסחה לשטח משולש:

$$S_{ADC}=\frac{5.97\cdot 10\cdot \sin 114.356^\circ}{2}$$

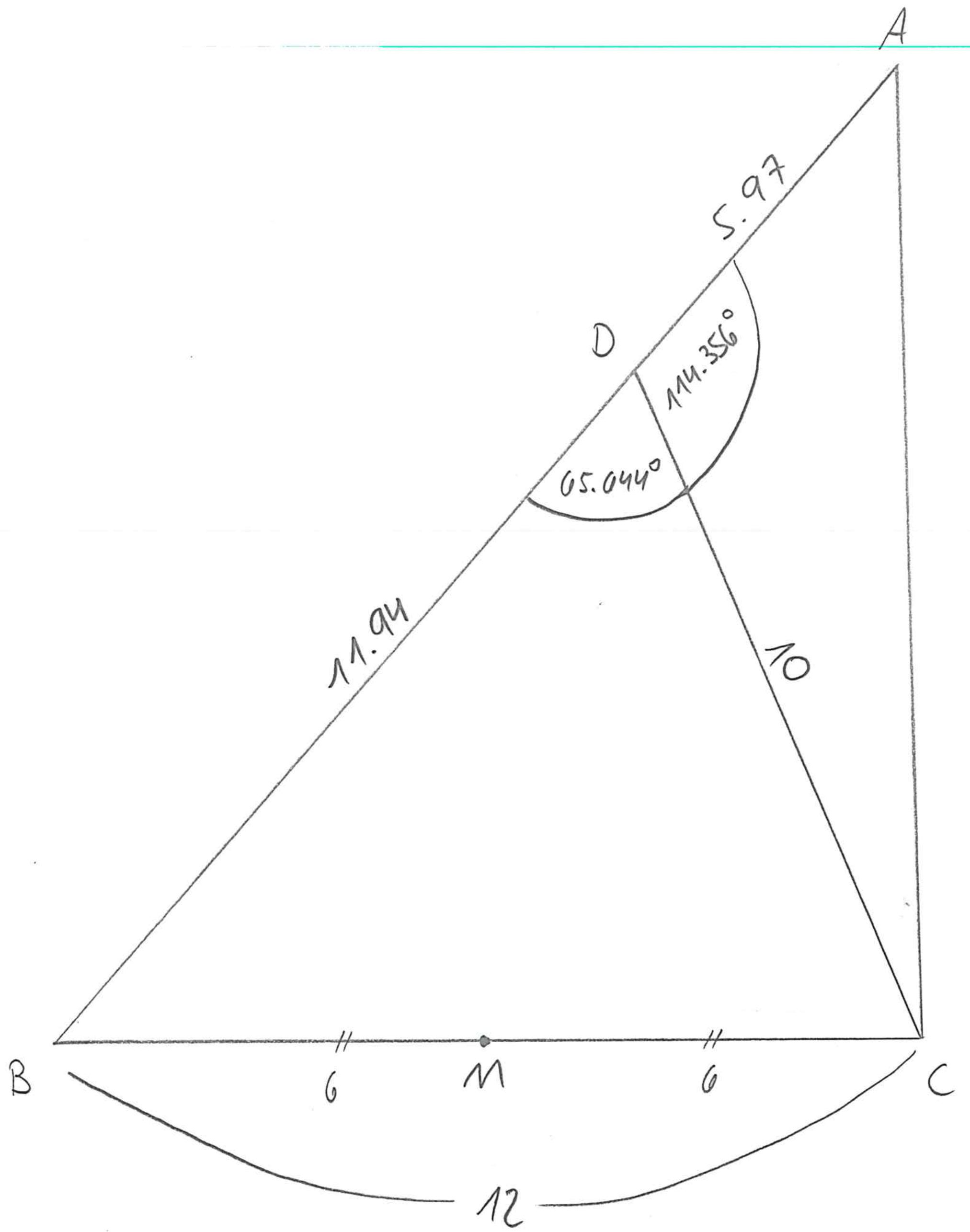
$$\boxed{S_{ADC}=27.193 \text{ יח"ר}}$$

ג) במעגל החוסם את המשולש BDC, M היא אמצע מיתר שהזווית ההיקפית הנשענת עליו אינה שווה ל- 90° ($\measuredangle BDC$) ולכן BC אינו קוטר במעגל זה.

כלומר, M היא מרכז מיתר שאינו קוטר ולכן:

הנקודה M אינה מרכז המעגל החוסם את ΔBDC

* שרטוט מפורט בעמוד הבא


A
5.97
D
114.356°
65.044°
11.94
10
B
6
M
6
C
12

6. נתונה הפונקציה $f(x) = -2 + \sqrt{-x^2 + 5x}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x ?

ג. מצא את השיעורים של כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$?

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + c$, שתחום הגדרתה הוא תחום ההגדרה של $f(x)$. c הוא פרמטר.

ו. מה הם כל ערכי c שבעבורם הפונקציה $g(x)$ חיובית בכל תחום הגדרתה?

א) תחום הגדרה: הביטוי שבתוך השורש צריך להיות גדול או שווה לאפס, ולכן $-x^2+5x \ge 0$

נתבונן בפרבולה $y=-x^2+5x$, אשר חותכת את ציר x בנק' $(0,0)$ $(5,0)$

התחום בו $-x^2+5x \ge 0$ הוא $\boxed{0 \le x \le 5}$

הערה: ניתן גם להראות כי תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $0 \le x \le 5$ בעזרת הצבות על ציר מספרים.

ה) נקודות חיתוך עם ציר x: נציב $f(x)=0$

$$0=-2+\sqrt{-x^2+5x}$$

$$2=\sqrt{-x^2+5x} \quad /(\ )^2$$

$$4=-x^2+5x$$

$$x^2-5x+4=0$$

פתרוני המשוואה הריבועית הם: $x_2=4$ $x_1=1$

לכן נקודות החיתוך הן: $(4,0)$ $(1,0)$

ו) נקודות קיצון:

נמצא תחילה את הנקודות בקצה תחום ההגדרה:

$$f(0)=-2+\sqrt{-0^2+5\cdot 0}=-2 \rightarrow (0,-2)$$

$$f(5)=-2+\sqrt{-5^2+5\cdot 5}=-2 \rightarrow (5,-2)$$

נגזור את הפונקציה:

$$f'(x)=\frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x}}$$

נציב $f'(x)=0$

$$0=\frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x}}$$

$$0=-2x+5$$

$$2x=5$$

$$x=2.5$$

נמצא את שיעור y ע"י הצבת $x=2.5$ בפונקציה.

$$f(2.5) = -2+\sqrt{-2.5^2+5\cdot 2.5} = \frac{1}{2} \rightarrow \left(2.5, \frac{1}{2}\right)$$

נעזר בטבלה ע"מ למצוא סוג הקיצון

x	0	$x=1$	2.5	$x=3$	5
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	-2

$$f'(1) = \frac{-2\cdot 1+5}{2\sqrt{-1^2+5\cdot 1}} = \frac{3}{4}$$

$$f'(3) = \frac{-2\cdot 3+5}{2\sqrt{-3^2+5\cdot 3}} = -0.2$$

נקודות הקיצון:

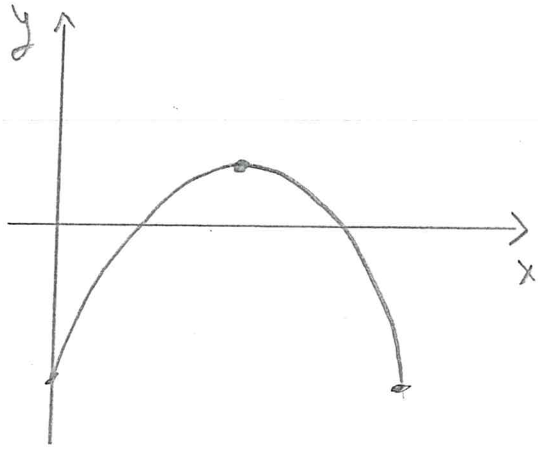
$(0,-2)$ מינימום קצה
$\left(2.5, \frac{1}{2}\right)$ מקסימום
$(5,-2)$ מינימום קצה

ד) נעזר בטבלה:

תחומי עליה: $0<x<2.5$

תחומי ירידה: $2.5<x<5$

ה)

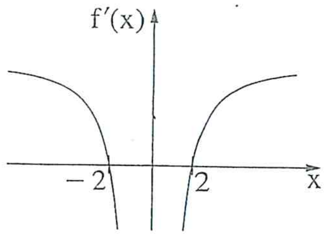


① הפונקציה $g(x)=f(x)+c$ הינה הזזה של הפונקציה
$f(x)$ ב- $\pm c$ יחידות כלפי מעלה/מטה. על מנת
שהפונקציה $g(x)$ תהיה חיובית בכל תחום הגדרתה,
נרצה שנקודות המינימום המוחלטות של הפונקציה
תהיינה בעלות שיעור y חיובי.
מכיוון שבנקודות המינימום המוחלטות של $f(x)$ שיעור
ה-y הינו -2, נרצה להזיז את הפונקציה
<u>ביותר מ-2 יח'</u> כלפי מעלה.
לכן עבור $\boxed{c>2}$, $g(x)$ תהיה חיובית
בכל תחום הגדרתה.

.7 הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל $x \neq 0$.

בציור שלפניך מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, המוגדרת גם היא לכל $x \neq 0$,

וחותכת את ציר ה־ x בנקודות $(2\,,0)$, $(-2\,,0)$.



א. מצא את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$,

וקבע את סוגן על פי הגרף.

נתון: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + a$ לכל $x \neq 0$. $a > 0$ הוא פרמטר.

ב. מצא את a .

ענה על סעיף ג בעבור $x > 0$.

שיעור ה־ y של נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$ הוא 10 .

ג. (1) כתוב ביטוי אלגברי לפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בעבור $x > 0$.

א) נתבונן בגרף פונק' הנגזרת:

כאשר $f'(x)>0$, $f(x)$ עולה $\Leftarrow$ $f(x)$ עולה עבור $x<-2$, $x>2$

כאשר $f'(x)<0$, $f(x)$ יורד $\Leftarrow$ $f(x)$ יורד, עבור $-2<x<0$
$0<x<2$

בנקודות החיתוך של $f'(x)$ עם ציר x, לפונקציה $f(x)$ תהיינה נקודות קיצון.

עבור $x<-2$ הפונקציה עולה ועבור $-2<x<0$ הפונקציה יורדת

לכן $\boxed{\text{עבור } x=-2 \text{ נקבל נק' מקסימום}}$

עבור $0<x<2$ הפונקציה יורדת ועבור $x>2$ הפונקציה עולה,

לכן $\boxed{\text{עבור } x=2 \text{ נקבל נק' מינימום.}}$

ד) כאשר ב- $x=2$ מתקבלת נק' מינימום, ולכן $f'(2)=0$

ולכן:

$$0=-\frac{1}{2^2}+a$$

$$0=-\frac{1}{4}+a$$

$$\boxed{a=\frac{1}{4}}$$

ה) נעלה

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=$$

$$f(x)=\int\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4}\right)dx$$

$$f(x)=\int\left(-x^{-2}+\frac{1}{4}\right)dx$$

$$f(x)=-\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{1}{4}x+c$$

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{4}x+c$$

מצאנו כי שיעור x בנק' המינימום הוא $x=2$

נתון כי שיעור y בנק' המינימום הוא $y=10$

נציב ונקבל

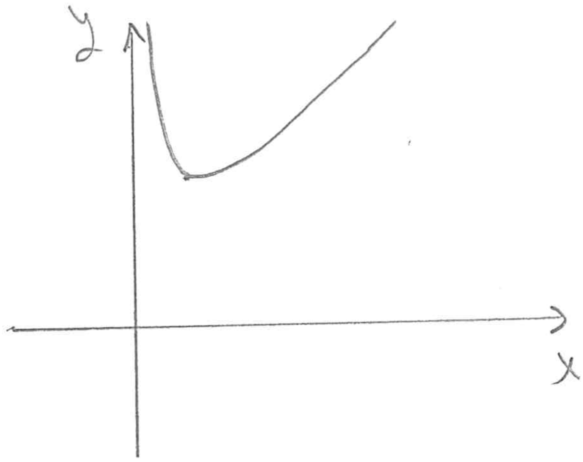
$$10=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 2+c$$

$$c=9$$

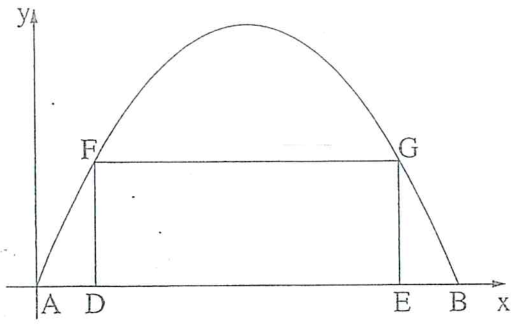
ולכן:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{4}x+9}$$

ד (ב') לפונק' $f(x)$ נק' מינימום עבור $(2,10)$,
ולכן נוכל לשרטט אותה:



8. המלבן DFGE חסום בין גרף הפרבולה $y = -x^2 + 6x$
ובין ציר ה־ x , כמתואר בציור.
הנקודות A ו־ B הן נקודות החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה־ x ,
כמתואר בציור.
k הוא פרמטר. נתון: $0 < k < 3$.
נתון: $AD = EB = k$.
א. הבע באמצעות k את אורכי הצלעות של המלבן DFGE .
ב. מצא את k שבעבורו שטח המלבן DFGE הוא מקסימלי.
תוכל להשאיר שורש בתשובתך.



א) נמצא DE: $DE = AB - AD - BE$

נק' A,B: נק' חיתוך עם ציר x, נציב $y=0$

$0 = -x^2 + 6x$

$0 = -x(x-6)$

$x = 0$ $\qquad$ $x - 6 = 0$

$\qquad\qquad x = 6$

$A(0,0)$ $\qquad$ $B(6,0)$

לכן $AB = 6$ יח'

נתון לנו $AD = BE = k$

לכן: $DE = 6 - k - k$

$\boxed{DE = 6 - 2k}$

נביא DF: מכיוון ש- DF מאונך לציר x,

$X_D = X_F = k$

נציב $X_F = k$ ונמצא שיעור y בנק' F:

$y_F = -k^2 + 6k$

$DF = y_F - y_D = -k^2 + 6k - 0$

$\boxed{DF = -k^2 + 6k}$

ב) נבנה פונקציה המתארת את שטח המלבן:

$S_{\text{מלבן}} = DF \cdot DE$

$f(k) = (-k^2 + 6k)(6 - 2k)$

$f(k) = -6k^2 + 2k^3 + 36k - 12k^2$

$f(k) = 2k^3 - 18k^2 + 36k$

על מנת למצוא את k עבורו השטח מקסימלי, נגזור את הפונקציה:

$f'(k) = 6k^2 - 36k + 36$

נז'ב $f'(k)=0$ ונקבל $0=6k^2-36k+36$

פתרונות המשוואה הריבועית הם

$k_2=3-\sqrt{3}=1.27$ $k_1=3+\sqrt{3}$

נוודא שעבור ערך זה מתקבל ערך מקסימלי

הפתרון נפסל משום שנתון $0<k<3$

↓

נגזור: $f''(k)=12k-36$

נז'ב $k=3-\sqrt{3}$ $f''(3-\sqrt{3})=-12\sqrt{3}$

$f''(3-\sqrt{3})<0$

לכן עבור $\boxed{k=3-\sqrt{3}}$

שטח המלבן מקסימלי.

הערה: ניתן להראות כי עבור $k=3-\sqrt{3}$

מתקבל שטח מקסימלי גם בעזרת

טבלת ערכים.